GYS

GENEL YETENEK

DERS KİTABI



Bu kitap Kadro Akademi tarafından hazırlanmış olup ücretsiz olarak sunulmaktadır.

Kamu kurumları için Genel Yetenek dersine yönelik olarak 30 Ekim 2026 tarihinde güncel bilgiler kullanılarak üretilmiştir.

Tam kaynakça için: www.kadroakademi.com/kitaplar

KADRO AKADEMİ

www.kadroakademi.com

KİTAP HAKKINDA

Bu eser, Genel Yetenek alanında matematiksel, sayısal ve sözel akıl yürütme becerilerini geliştirmek isteyen yetişkin okuyucular ve kamu kurumlarının ilgili sınavlarına hazırlanan adaylar için bağımsız bir konu anlatımı kitabıdır. Doğal, tam ve rasyonel sayılardan başlayarak problemler, sayısal mantık, veri yorumlama, paragraf, sözel mantık ve temel geometriye uzanan konuları fihrist sırasına göre işler. Belirli bir kamu kurumunun resmî yayını veya onaylı, eksiksiz sınav müfredatı değildir.

Metin bir ders kitabıdır; test, deneme, konu kartı ve hızlı tekrar içermez. Öğretici örneklerde işlemlerin yalnız sonucu değil, neden o sonuca ulaştığı açıklanır.

KADRO AKADEMİ HAKKINDA

Kadro Akademi, görevde yükselme ve benzeri sınavlara hazırlanan kamu personelinin konuları yalnızca gözden geçirmesine değil, gerçekten anlamasına yardımcı olma düşüncesiyle geliştirilen bir eğitim çalışmasıdır. Konu anlatımları, çalışma araçları ve kişisel ilerlemeyi izlemeye yönelik yaklaşımı, sınırlı zamanda daha planlı ve anlaşılır bir hazırlık sağlama amacıyla bir araya gelir.

Bu kitap, basılı kaynakla veya dijital ortamda çalışmayı sevenler için hazırlanan bağımsız bir kaynaktır. Bir kitabın değerini sayfa sayısı değil, okuyucunun çalışma masasında gerçekten işe yaraması belirler.

İNANIYORUM

Per aspera ad astra — Zorlukların içinden yıldızlara.

Bazen bir hedefe ulaşmanın en zor yanı nereden başlayacağını bilmemek değil, her gün yeniden başlayacak gücü bulmaktır. İş, aile, sorumluluklar ve yetişmesi gereken onca şey arasında çalışmaya ayrılan bir saat, dışarıdan göründüğünden çok daha değerlidir. Bu yüzden burada kusursuz bir çalışma günü beklenmiyor. Bugün açılan birkaç sayfa da yarın atılacak adımın bir parçasıdır.

İnanıyorum: Emek boşa gitmez. Her konu ilk okumada anlaşılmayabilir; bazı bilgiler dönüp dönüp çalışmayı gerektirebilir. Önemli olan, zorlandığımız yerde kendimizden vazgeçmemek. Gökyüzündeki yıldızlara giden yolun düz olması gerekmiyor. Bazen ilerlemek, yalnızca bir sayfa daha çevirmektir.

Kadro Akademi

İÇİNDEKİLER

8 ana modül • 53 konu. Noktalı kılavuzlarla gösterilen sayfa numaraları bu baskının gerçek sayfalarıdır. Başlıklara dokunarak ilgili konuya geçebilirsiniz.

KİTAP HAKKINDA 1

BÖLÜM 01 — TEMEL MATEMATİK VE SAYILAR 4

1.1. DOĞAL, TAM VE RASYONEL SAYILAR 4

1.2. DÖRT İŞLEM, İŞLEM ÖNCELİĞİ VE İŞLEM ÖZELLİKLERİ 8

1.3. TEK-ÇİFT, POZİTİF-NEGATİF VE ASAL SAYILAR 13

1.4. BASAMAK KAVRAMI VE SAYI ÇÖZÜMLEME 18

1.5. BÖLÜNEBİLME KURALLARI VE KALAN 24

1.6. ASAL ÇARPANLARA AYIRMA, EBOB VE EKOK 31

1.7. KESİRLER, ONDALIK SAYILAR VE SAYI KARŞILAŞTIRMALARI 39

BÖLÜM 02 — CEBİR, ORAN VE SAYISAL İLİŞKİLER 49

2.1. BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER 49

2.2. ORAN VE ORANTI 57

2.3. YÜZDE HESAPLAMALARI 66

2.4. BASİT EŞİTSİZLİKLER 74

2.5. ÜSLÜ VE KÖKLÜ SAYILARA GİRİŞ 83

2.6. MUTLAK DEĞER VE TEMEL İŞLEMLER 91

2.7. BASİT CEBİRSEL İFADELER VE ÖZDEŞLİKLER 100

BÖLÜM 03 — MATEMATİK PROBLEMLERİ 108

3.1. SAYI VE KESİR PROBLEMLERİ 108

3.2. YAŞ PROBLEMLERİ 115

3.3. İŞÇİ, HAVUZ VE İŞ-ZAMAN PROBLEMLERİ 123

3.4. HIZ, HAREKET VE YOL PROBLEMLERİ 132

3.5. KÂR, ZARAR, İNDİRİM VE ALIŞVERİŞ PROBLEMLERİ 141

3.6. YÜZDE, FAİZ VE ORAN-ORANTI PROBLEMLERİ 150

3.7. KARIŞIM PROBLEMLERİ 158

3.8. GÜNLÜK YAŞAM VE ÇOK ADIMLI MUHAKEME PROBLEMLERİ 167

BÖLÜM 04 — SAYISAL MANTIK VE ANALİTİK DÜŞÜNME 176

4.1. SAYI DİZİLERİ VE ÖRÜNTÜLER 176

4.2. ŞEKİL VE SAYI İLİŞKİLERİ 184

4.3. İŞLEM TANIMLAMA VE İŞLEM MANTIĞI 193

4.4. KOŞULLU SAYISAL MUHAKEME 200

4.5. Sayısal Sıralama ve Yerleştirme 208

4.6. VERİLEN KURALLARDAN SONUÇ ÇIKARMA 217

BÖLÜM 05 — TABLO VE GRAFİK YORUMLAMA 226

5.1. TABLO OKUMA VE KARŞILAŞTIRMA 226

5.2. SÜTUN, ÇİZGİ VE DAİRE GRAFİKLERİ 234
5.3. GRAFİKLERDE YÜZDE, FARK VE ORAN HESABI 245
5.4. ÇOKLU VERİ KARŞILAŞTIRMASI 255
5.5. EKSİK VERİYİ HESAPLAMA VE ÇIKARIM 264
5.6. GRAFİK DESTEKLİ PROBLEMLER 273
BÖLÜM 06 — TÜRKÇE ANLAMA VE PARAGRAF 284
6.1. SÖZCÜKTE ANLAM VE ANLAM İLİŞKİLERİ 284
6.2. CÜMLEDE ANLAM VE KESİN YARGI 292
6.3. PARAGRAFIN ANA DÜŞÜNCESİ VE KONUSU 303
6.4. YARDIMCI DÜŞÜNCE VE ÇIKARIM 313
6.5. PARAGRAF TAMAMLAMA VE SIRALAMA 322
6.6. ANLATIMIN AKIŞI VE AKIŞI BOZAN CÜMLE 331
6.7. METİN YORUMLAMA VE ANLAM BÜTÜNLÜĞÜ 341
BÖLÜM 07 — SÖZEL MANTIK VE MUHAKEME 352
7.1. SIRALAMA VE YERLEŞTİRME PROBLEMLERİ 352
7.2. EŞLEŞTİRME VE GRUPLANDIRMA 362
7.3. KOŞULLU ÖNERMELER VE ÇIKARIM 371
7.4. TABLO OLUŞTURARAK ÇÖZÜM 382
7.5. ÇOKLU KOŞULLARA DAYALI SÖZEL PROBLEMLER 391
7.6. METİNDEN HAREKETLE MANTIKSAL SONUÇ ÇIKARMA 402
BÖLÜM 08 — TAMAMLAYICI MATEMATİK VE GEOMETRİ 413
8.1. KÜMELER VE TEMEL KÜME İŞLEMLERİ 413
8.2. ÇARPANLARA AYIRMA 424
8.3. BASİT OLASILIK VE SAYMA 434
8.4. ÜÇGEN, DÖRTGEN VE ÇEMBERİN TEMEL ÖZELLİKLERİ 446
8.5. ÇEVRE, ALAN VE HACİM HESAPLAMALARI 459
8.6. KOORDİNAT VE TEMEL GEOMETRİK ŞEKİL YORUMLAMA 474
KAYNAKÇA VE DOĞRULAMA (QR) 486

BÖLÜM 01

TEMEL MATEMATİK VE SAYILAR

KONU 1.1

DOĞAL, TAM VE RASYONEL SAYILAR

Sayılar, miktarların sayılmasını, büyüklüklerin karşılaştırılmasını, sıralama yapılmasını ve çeşitli durumların matematiksel biçimde ifade edilmesini sağlar. Günlük kullanımda birbirine benzeyen sayılar, matematiksel özellikleri bakımından farklı kümelere ait olabilir. Bir ürünün adedi doğal sayıyla belirtilirken sıfırın altındaki sıcaklık tam sayıyla, bir bütünün belirli oranı ise rasyonel sayıyla ifade edilebilir. Bu ayrımları bilmek, daha sonra karşılaşılacak dört işlem, denklem ve problem konularında uygun yöntemi seçmeyi kolaylaştırır.

1. Sayı kümeleri ve neden farklı kümelere ihtiyaç duyulur?

En temel sayma işlemi 1, 2, 3 gibi sayıları gerektirir. Sayılacak herhangi bir nesne olmadığını göstermek için 0 kullanılır. Borç, sıfırın altındaki sıcaklık veya referans seviyesinin altındaki bir konum gibi durumlarda negatif sayılar gerekir. Bir bütünü eşit parçalara ayırmak gerektiğinde ise tam sayıların yeterli olmadığı görülür; bu noktada rasyonel sayılar devreye girer. Böylece sayı kümeleri, önceki kümenin anlatamadığı durumları da açıklayacak biçimde genişler.

Bir küme, belirli özelliklere sahip elemanların oluşturduğu topluluktur. Matematikte sayı kümeleri özel sembollerle gösterilir. Bir sayının hangi kümenin elemanı olduğu ile bir kümenin başka bir kümenin içinde bulunması ayrı ilişkilerdir: 3 sayısı doğal sayılar kümesinin bir elemanıdır; doğal sayılar kümesi ise tam sayılar kümesinin alt kümesidir. Bu iki ilişkiyi birbirine karıştırmamak gerekir.

2. Doğal sayılar kümesi ($\mathbb{N}$)

Doğal sayılar, sıfırdan başlayıp birer birer artan 0, 1, 2, 3, ... sayılarıdır. Bu kitapta $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ gösterimi kullanılacaktır. Pozitif doğal sayılar ise 1'den başlar ve $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ olarak gösterilebilir. Bazı bağlamlarda sayma sayıları adı özellikle 1, 2, 3, ... dizisi için kullanılır. Bu nedenle “doğal sayılar” ile “pozitif doğal sayılar” ifadelerinin aynı anlama geldiği varsayılmamalıdır.

Doğal sayılar sonlu bir liste değildir. Her doğal sayıdan sonra bir sonraki doğal sayı bulunduğundan bu kümenin en büyük elemanı yoktur. Sıfır, doğal sayılar kümesinin bu kitapta benimsenen tanımına göre en küçük elemanıdır. Sayıların arasındaki farkın bir olduğu ardışık doğal sayılar, sayma ve sıra kavramlarının temelini oluşturur.

Doğal sayılar, kesirli miktarı ya da sıfırın altındaki bir değeri tek başına ifade etmez. Örneğin bir rafın üzerindeki kitap adedi doğal sayıyla gösterilebilir; rafta hiç kitap yoksa adet 0'dır. Buna karşılık bir rafın uzunluğunun 2,5 metre olması doğal sayıyla tam olarak anlatılamaz.

3. Tam sayılar kümesi ($\mathbb{Z}$)

Tam sayılar, doğal sayılara negatif tam sayıların eklenmesiyle elde edilir: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Pozitif tam sayılar 1, 2, 3, ...; negatif tam sayılar −1, −2, −3, ... biçimindedir. Sıfır ne pozitif ne negatiftir. Tam sayıların tamamı sayı doğrusu üzerinde sıfırın iki yanına yerleşir.

Negatif sayılar, yalnız bir borç kaydını değil, seçilen başlangıç noktasına göre ters yönde bulunan konumu da ifade edebilir. Deniz seviyesinden 40 metre aşağıdaki bir noktanın yüksekliği −40 metre olarak; deniz

seviyesinin 40 metre üzerindeki noktanın yüksekliği +40 metre olarak belirtilebilir. Her iki değerin de sıfıra uzaklığı aynı olsa da işaretleri, referansın iki farklı yanını gösterir. Buradaki “işaret” ile “büyüklük” ayrımı, sonraki işlem konularında önem kazanır.

Tam sayılar kümesinde en küçük veya en büyük eleman yoktur. Çünkü bir tam sayıdan daha küçük bir tam sayı da daha büyük bir tam sayı da bulunabilir. Buna karşılık art arda gelen iki tam sayı arasında başka bir tam sayı bulunmaz. Örneğin 4 ile 5 arasında tam sayı yoktur; 4,5 gibi değerler farklı bir sayı kümesinde değerlendirilir.

Doğal sayılarla tam sayıların temel ayrımı

Özellik	Doğal sayılar (ℕ)	Tam sayılar (ℤ)
Örnek elemanlar	0, 1, 2, 3	..., −2, −1, 0, 1, 2, ...
Negatif sayı içerme	Hayır	Evet
Sıfırı içerme	Evet	Evet
En küçük eleman	0	Yok
En büyük eleman	Yok	Yok
Kesirli sayı içerme	Hayır	Hayır

4. Rasyonel sayılar kümesi (ℚ)

Rasyonel sayı, a ve b tam sayı olmak ve b sıfır olmamak koşuluyla a/b biçiminde yazılabilen her sayıdır. Burada a pay, b paydadır. Pay, paylaştırılan miktarı veya seçilen parça sayısını; payda ise bir bütünün kaç eş parçaya ayrıldığını belirtir. Payda 0 olamaz; çünkü sıfır eş parçaya bölme anlamlı bir sayı üretmez.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

Anlamı: a ve b tam sayıdır; b sıfırdan farklıdır.

Koşullar: Rasyonel sayı olabilmek için a/b gösteriminin en sade biçimde yazılması zorunlu değildir.

Rasyonel sayının payı 0 olabilir: 0/7 = 0'dır. Payda negatif olabilir: 3/(−4), −3/4 ile aynı sayıyı gösterir. 6/3 = 2 olduğu için 2 de rasyoneldir; 2/1 yazılması yeterlidir. Bu nedenle rasyonel sayılar yalnız “kesirli görünen” sayılardan oluşmaz. Bütün tam sayılar da rasyonel sayı kümesindedir.

Aynı rasyonel sayı farklı kesirlerle gösterilebilir. Örneğin 1/2, 2/4 ve 5/10 aynı noktayı temsil eder. Pay ile paydayı aynı sıfırdan farklı sayıyla çarpmak kesrin değerini değiştirmez. Bu ilişki, kesirlerde genişletme ve sadeleştirme yönteminin temelidir; ayrıntılı uygulaması GY-01.07'de ele alınacaktır. Bu aşamada önemli olan, farklı yazılmış iki kesrin her zaman farklı sayı anlamına gelmediğini kavramaktır.

Rasyonel sayı gösteriminin farklı görünümleri

Gösterim	Karşılık geldiği sayı	Açıklama
7/1	7	Her tam sayı paydası 1 olan kesir olarak yazılır
−9/3	−3	Negatif tam sayı da rasyoneldir
0/5	0	Pay 0 olabilir; payda 0 olamaz
3/4	0,75	Kesir ve sonlu ondalık gösterim aynı sayıyı anlatır
1/3	0,333...	Sonsuz tekrarlayan ondalık gösterim rasyoneldir
8/0	Tanımsız	Bir sayı değildir; rasyonel kümede bulunmaz

5. Ondalık gösterim ile rasyonel sayı ilişkisi

Ondalık gösterim, bir sayının tam kısmı ile birden küçük kısımlarını virgül yardımıyla belirtir. Sonlu ondalık gösterimler, örneğin 0,6 = 6/10 ve 2,75 = 275/100 biçiminde iki tam sayının oranı olarak yazılabildiği için rasyoneldir. Bazı rasyonel sayıların ondalık gösterimleri ise bitmez; aynı rakam veya rakam grubu belirli bir düzende tekrar eder. Örneğin 1/3 sayısı 0,333... olarak gösterilir. Buradaki üç nokta, 3 rakamının sonsuza kadar tekrar ettiğini belirtir.

Sonlu ondalık gösterim ile tekrarlı sonsuz gösterimi ayırmak gerekir. 0,333 sayısı tam olarak 333/1000'dir; 0,333... ise 1/3'e eşittir. Bu ikisi birbirine çok yakın olsa da aynı sayı değildir. Ayrıca her sonsuz ondalık gösterim rasyonel sayı değildir: tekrarlamayan ve sonlanmayan bazı gösterimler irrasyonel sayıları ifade eder. Bu ayrım bir sonraki başlıkta yalnız kümelerin sınırlarını göstermek için ele alınır.

6. Gerçek sayılar, irrasyonel sayılar ve küme ilişkisi

Rasyonel sayılar her sayı doğrusu noktasını tek başına temsil etmez. Örneğin karesi 2 olan pozitif sayının tam değeri, iki tam sayının oranı biçiminde yazılamaz; √2 irrasyonel sayıdır. Dairenin çevresinin çapına oranını gösteren π de irrasyoneldir. İrrasyonel sayıların ondalık gösterimi sonlanmaz ve periyodik olarak tekrar etmez. Bu başlıkta irrasyonel sayılar ayrı bir ders konusu olarak genişletilmez; sayı kümelerinin birbirine göre konumu açıklanır.

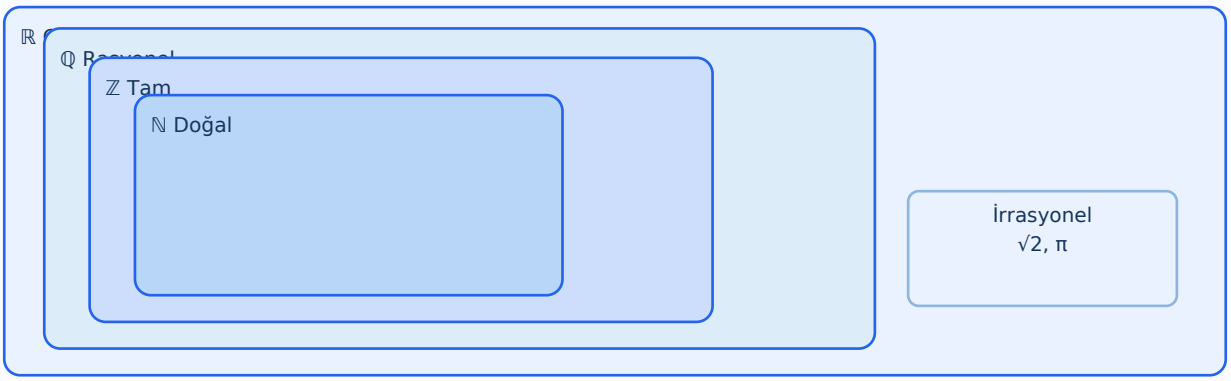
Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşimi gerçek sayılar kümesini (ℝ) oluşturur. Rasyonel bir sayı aynı zamanda gerçek sayıdır; irrasyonel bir sayı gerçek sayıdır ancak rasyonel değildir. √49 = 7 olduğu için √49 rasyoneldir; “karekök işareti bulunan her sayı irrasyoneldir” genellemesi yanlıştır.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Anlamı: Her doğal sayı tam sayı; her tam sayı rasyonel sayı; her rasyonel sayı gerçek sayıdır.

Koşullar: Ters yönde kapsama doğru değildir; örneğin −1 doğal sayı değildir, 1/2 tam sayı değildir.

Sayı kümelerinin kapsama ilişkisi



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

Bazı sayıların ait oldukları kümeler

Sayı	Doğal mı?	Tam mı?	Rasyonel mi?	Gerçek mi?
0	Evet	Evet	Evet	Evet
−5	Hayır	Evet	Evet	Evet
2/3	Hayır	Hayır	Evet	Evet
12/4	Evet	Evet	Evet	Evet
√2	Hayır	Hayır	Hayır	Evet
√36	Evet	Evet	Evet	Evet

7. Sayı doğrusu üzerinde konum ve sıralama

Sayı doğrusu, üzerinde bir başlangıç noktası olarak 0 seçilen ve birim aralıkları eşit belirlenmiş bir doğrudur. Sağ yön büyümeyi, sol yön küçülmeyi gösterir. Bu nedenle −2, −5'ten büyüktür; çünkü −2 noktası sayı doğrusunda −5'in sağındadır. Aynı mantık, tam sayılar arasında olmayan rasyonel değerlere de uygulanır.

Örneğin −5/2 = −2,5 sayısı −3 ile −2 arasında yer alır; 7/4 = 1,75 sayısı 1 ile 2 arasındadır. Sayıların karşılaştırılmasında işaret ve tam kısım dikkate alınır. Paydaları farklı kesirlerin ayrıntılı sıralanması GY-01.07'de açıklanacaktır. Bu bölümde sayı doğrusu, her sayının tek bir konumu olduğu ve sağa ilerledikçe değerin arttığı temel anlamıyla kullanılır.

Ardışık iki tam sayı arasında başka bir tam sayı yoktur; buna karşılık iki farklı rasyonel sayı arasında daima başka bir rasyonel sayı bulunur. Örneğin 1/3 ile 2/3 arasında 1/2 vardır. 1/3 ile 1/2 arasında da başka bir rasyonel sayı bulunabilir. Bu süreç sürdürülebilir; rasyonel sayılar belirli aralıklarda “birer birer sıralanmış” ayrı noktalardan ibaret değildir.

> **Önemli ayrım** En küçük doğal sayı (bu kitapta) 0'dır; en küçük tam sayı yoktur. Sıfır ne pozitif ne negatiftir. Tam sayıların hepsi rasyoneldir, fakat tüm rasyonel sayılar tam sayı değildir.

8. Bir kümeye ait olmak ile işlem sonucunun o kümede kalması

Bir sayının bir kümeye ait olması, o kümenin elemanları üzerinde yapılan her işlemin sonucunun yine aynı kümede kalacağı anlamına gelmez. Örneğin 3 ve 5 birer doğal sayıdır; 3 − 5 = −2 sonucu ise doğal sayı değil tam sayıdır. Benzer biçimde 1 ve 2 tam sayıdır; 1/2 sonucu rasyonel olmasına rağmen tam sayı değildir.

Bir sayı kümesinde seçilen iki elemanla yapılan bir işlem her zaman yine o kümede bir sonuç veriyorsa o kümenin ilgili işleme göre kapalı olduğu söylenir. Doğal sayılar toplama ve çarpmaya göre kapalıdır, çıkarmaya göre kapalı değildir. Tam sayılar toplama, çıkarma ve çarpmaya göre kapalıdır; bölmeye göre kapalı değildir. Rasyonel sayılar toplama, çıkarma ve çarpmaya göre kapalıdır; sıfıra bölme hariç bölme işleminin sonucu da rasyoneldir. Burada amaç işlem yöntemlerini öğretmek değil, sayı kümelerinin neden birbirinden farklı olduğunu göstermektir.

Sayı kümeleri ve işlem sonucunun kümeye ait olması

Küme	Toplama	Çıkarma	Çarpma	Bölme
$\mathbb{N}$	Her zaman $\mathbb{N}$	Her zaman değil	Her zaman $\mathbb{N}$	Her zaman değil
$\mathbb{Z}$	Her zaman $\mathbb{Z}$	Her zaman $\mathbb{Z}$	Her zaman $\mathbb{Z}$	Her zaman değil
$\mathbb{Q}$	Her zaman $\mathbb{Q}$	Her zaman $\mathbb{Q}$	Her zaman $\mathbb{Q}$	Sıfırdan farklı bölenle her zaman $\mathbb{Q}$

9. Sayı kümelerinin günlük ve matematiksel yorumda seçimi

Bir stokta 18 ürün olması doğal sayıyla, bir hesapta −250 liralık bakiye kaydı bulunması tam sayıyla, bir üretim parçasının 3/8 oranında tamamlanması rasyonel sayıyla temsil edilebilir. Ancak günlük dilde kesirler “üçte sekiz” gibi yanlış okunursa sayısal bilgi kaybolabilir: 3/8, sekiz eş parçanın üçünü; 8/3 ise üç eş parçanın sekizini gösterir. Pay ile paydanın yer değiştirmesi değer değiştirir.

Matematiksel modelde sayı türünü doğru tanımak bazen yapılabilecek işlemlerin sınırını da belirler. Bir soru metninde “kişi sayısı” tam ve negatif olmayan bir sayı gerektirirken “ortalama süre” kesirli bir değer alabilir. Bir niceliğin matematiksel işlem sonucu olarak 2,5 çıkması, o niceliğin gerçek bağlamda mutlaka yarım kişiyle ifade edilebileceği anlamına gelmez. Dolayısıyla sayının kümesi ile niceliğin gerçek yaşamdaki anlamı birlikte yorumlanmalıdır.

Sonuç olarak $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri birbirinden kopuk değil, iç içe genişleyen sayı sistemleridir. Doğal sayılar sayma ve adetleri, tam sayılar işaretli bütün değerleri, rasyonel sayılar iki tam sayının oranıyla yazılabilen değerleri temsil eder. Sonraki bölümde dört işlemin kuralları bu sayılarla çalışırken kullanılacak; kesirler ve sayı karşılaştırmaları ayrıca ayrıntılandırılacaktır.

KONU 1.2

DÖRT İŞLEM, İŞLEM ÖNCELİĞİ VE İŞLEM ÖZELLİKLERİ

Matematiksel işlemler bir miktarın artmasını, azalmasını, eşit gruplara ayrılmasını veya başka bir miktarın kaç katı olduğunu anlatır. Dört işlem yalnız sonuca ulaşma yöntemi değildir; kullanılan sayı türüne, işaretlere, parantezlere ve niceliklerin anlamına göre yorumlanmalıdır. Aynı sayılar farklı sırada işlendiğinde sonuç değişebileceğinden hem işlemin anlamı hem de yazılış biçimi önem taşır.

1. Toplama, çıkarma, çarpma ve bölmenin anlamı

Toplama, aynı tür nicelikleri bir araya getirmek ya da bir başlangıç değerine artış veya azalış eklemektir. a + b gösteriminde a ile b toplanan sayılardır. Çıkarma, bir değerden diğerini ayırmak ya da iki değer arasındaki farkı bulmak için kullanılır. Her çıkarma, çıkarılan sayının toplama işlemine göre tersini eklemek şeklinde de yazılabilir: a − b = a + (−b). Bu eşitlik, çıkarılan sayı negatif olduğunda sonucun neden artabildiğini açıklar.

Çarpma, doğal sayılarda eşit grupların tekrarından hareketle anlaşılabilir, ancak negatif ve rasyonel sayılar için de tanımlanır. a · b ifadesinde a ve b çarpandır. Bölme, bir toplamı eş paylaştırmaya ya da bir miktarın diğerine oranını belirlemeye yarar. a ÷ b veya a/b ifadesinde a bölünen, b bölen, sonuç bölümdür. Bölmede b'nin sıfırdan farklı olması gerekir. Bölen sıfır değilse bölme, onun çarpmaya göre tersiyle çarpmaya eşdeğerdir.

$$a - b = a + (-b) \qquad a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Anlamı: Çıkarma ters sayıyı eklemektir; bölme sıfırdan farklı bölenin çarpımsal tersiyle çarpmaktır.

Koşullar: a ve b gerçek sayıdır; bölmede b ≠ 0 olmalıdır.

84 sayfanın 7 güne eşit dağıtılması günde 84 ÷ 7 = 12 sayfadır. Sonucun doğruluğu 12 sayfa/gün · 7 gün = 84 sayfa hesabıyla kontrol edilir. Sayıların yanında birimlerin de korunması, bir işlemin gerçek durumu doğru anlatıp anlatmadığını gösterir. Örneğin 7 sayfa ile 7 gün doğrudan toplanamaz; nicelik türleri farklıdır.

2. İşaretli sayılarda toplama ve çıkarma

Aynı işaretli iki sayı toplanırken büyüklükler birleştirilir ve ortak işaret korunur. Zıt işaretli iki sayının toplamında ise büyüklükler arasındaki fark alınır; sonucu mutlak değeri daha büyük olan sayının işareti belirler. Burada mutlak değer, sayının sıfıra uzaklığı anlamındadır. Mutlak değer konusunun genel özellikleri GY-02.06'da ayrıntılandırılacaktır.

Örneğin 18 + (−27) işlemi, sıfırdan sağa 18 ve sola 27 birimlik değişimin birleşimidir. Negatif yönde 9 birim kalır, dolayısıyla sonuç −9'dur. Tersine kontrol edildiğinde −9 + 27 = 18 elde edilir. (−13) − (−8) hesabında ise negatif sekizi çıkarmak, pozitif sekiz eklemektir: −13 + 8 = −5. Bu sonuç da −5 − 8 = −13 eşitliğiyle sınanır.

Bir sayının önündeki eksi işareti ile iki sayı arasındaki çıkarma işareti aynı görevde değildir. (−13) − (−8) yazımındaki ilk ve son eksi sayının işaretini, ortadaki eksi çıkarma işlemini belirtir. Çıkarılan negatif sayının pozitif eklemeye dönüşmesi gelişigüzel bir işaret değişimi değil, çıkarma tanımının sonucudur. Pozitif ve negatif sayıların toplamı sıfır olduğunda sayılar birbirinin toplamsal tersidir; a + (−a) = 0 eşitliği bütün gerçek a değerleri için geçerlidir.

Toplama ve çıkarma sırasında işaretlerin etkisi

İşlem	Gerekçe	Sonuç
12 + 7	İki pozitif değer birleştirilir	19
−12 + (−7)	İki negatif değer birleştirilir	−19
−12 + 7	Negatif büyüklük 5 daha fazladır	−5
12 − (−7)	Çıkarılan negatif sayının tersi eklenir	19
−12 − 7	Negatif yönde yedi birim ilerlenir	−19

3. Çarpma ve bölmede işaret kuralları

Sıfırdan farklı iki sayının çarpımı ve bölümü, sayılar aynı işaretliyse pozitif; farklı işaretliyse negatiftir. İki negatif sayının çarpımı pozitiftir. (−6) · (−7) = 42 işlemi, 42 ÷ (−7) = −6 kontrolüyle doğrulanır. (−96) ÷ 12 = −8 işleminin ters kontrolü ise 12 · (−8) = −96'dır. Üç veya daha fazla sıfırdan farklı çarpan bulunduğunda negatif çarpanların sayısı çiftse çarpım pozitif, tekse negatiftir.

Çarpma ve bölmede işaret

İki sayının işareti	Çarpım	Bölüm (bölen sıfırdan farklı)
+ ve +	+	+
− ve −	+	+
+ ve −	−	−
− ve +	−	−

Bir sayının sıfırla çarpımı her zaman sıfırdır. Buna karşılık sıfıra bölme tanımlı değildir. Çünkü a ÷ 0 = c kabul edilirse 0 · c = a olması gerekir. a sıfırdan farklıysa bu eşitliği sağlayan hiçbir c yoktur. a = 0 olduğunda ise her c için 0 · c = 0 olur; tek bir bölüm belirlenemez. Dolayısıyla 0 ÷ 0 da tanımsızdır. Buna karşılık 0 ÷ 5 = 0'dır; 0 · 5 = 0 ters kontrolü bunu doğrular.

Bölüm her zaman tam sayı olmak zorunda değildir. Örneğin 15 ÷ 4 = 3,75 sonucu rasyonel bir sayıdır; 3,75 · 4 = 15 ile doğrulanır. Payda ve kesirlerle işlemlerin kapsamlı açıklaması GY-01.07'ye bırakılacaktır. Burada önemli olan, doğru bölme işleminin sonucun mutlaka tam sayı olmasını gerektirmediğidir.

4. İşlem önceliği ve soldan sağa kuralı

Bir ifadede farklı işlemler bir arada yer aldığında ortak işlem önceliği kullanılır. Öncelikle parantez içindeki ifadeler çözülür; iç içe parantezlerde en içten başlanır. Ardından üslü ifadeler hesaplanır. Daha sonra çarpma ve bölme; en sonunda toplama ve çıkarma uygulanır. Çarpma ile bölme kendi aralarında aynı önceliğe sahiptir ve parantez aksi yönde bir düzen kurmuyorsa soldan sağa gerçekleştirilir. Toplama ile çıkarma için de aynı soldan sağa ilkesi geçerlidir. Üslü sayıların genel özellikleri GY-02.05'te incelenecektir.

Karma ifadeler için işlem sırası

Aşama	İşlem	Dikkat edilecek nokta
1	Parantez ve gruplama	En iç gruptan başlanır
2	Üs alma	Üs işaretinin kapsadığı sayı belirlenir
3	Çarpma ve bölme	Aynı öncelikte soldan sağa
4	Toplama ve çıkarma	Aynı öncelikte soldan sağa

Örneğin 24 − 6 · 3 + 8 ÷ 2 ifadesinde önce 6 · 3 = 18 ve 8 ÷ 2 = 4 bulunur. İfade 24 − 18 + 4 biçimini alır. Soldan sağa 24 − 18 = 6, ardından 6 + 4 = 10 elde edilir. Aynı sonucu farklı gruplama ile kontrol etmek mümkündür: (24 + 4) − 18 = 28 − 18 = 10. Toplanan pozitif terimlerle çıkarılan terimlerin işaretleri korunarak yeniden gruplandığında sonuç değişmemiştir.

48 ÷ 6 · 2 ifadesi 48 ÷ 6 = 8 ve 8 · 2 = 16 adımlarıyla çözülür. Önce 6 · 2 işlemini yapmak için yazılı ifadede bulunmayan bir parantez varsaymak gerekir. Oysa 48 ÷ (6 · 2) = 48 ÷ 12 = 4 farklı bir ifadedir. Aynı ayrım 36 ÷ 3 · 2 = 24 ve 36 ÷ (3 · 2) = 6 karşılaştırmasında da görülebilir. Çarpmanın bölmeden kendiliğinden önce geldiği düşüncesi yanlıştır.

Gösterimin açıklığı 12 ÷ 2(2 + 1) türündeki bitişik çarpma ve bölme yazımları yanlış yorumlanmaya elverişlidir. (12 ÷ 2) · (2 + 1) veya 12 ÷ [2 · (2 + 1)] gibi açık parantezler kullanılmalıdır. Farklı gruplama farklı işlem ifade eder.

Negatif işaretle üs alma yan yana geldiğinde parantez önem kazanır. -3^2 ifadesi $-(3 \cdot 3) = -9$ anlamına gelirken $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$'dur. İki sonucun bağımsız çarpma ile kontrolü, negatif sayının tabana dâhil edilip edilmediğini görünür kılar. Bu ayrım üslerin genel kurallarından bağımsız olarak gösterim kapsamıyla ilgilidir.

5. Parantezler ve çok katmanlı ifadelerin çözülmesi

Parantez, köşeli parantez ve süslü parantez bir işlem grubunu birlikte değerlendirmek için kullanılır. İç içe gruplarda en içeridekinden başlanır; aynı düzeydeki gruplar kendi içinde ayrı ayrı çözülebilir. Bir parantezin önündeki eksi işareti, parantezin tüm değerinin toplamsal tersini ifade eder. Bu nedenle $-(7 - 4) = -3$ olduğu gibi $-7 + 4 = -3$ yazımı da geçerlidir. İşaret değişiminin dayanağı parantezdeki toplamın tersinin alınmasıdır.

$18 - [5 - (-3) \cdot 2]$ örneğinde önce $(-3) \cdot 2 = -6$ elde edilir. Köşeli parantezin değeri $5 - (-6) = 11$, bütün ifadenin değeri $18 - 11 = 7$'dir. İkinci bir çözümde işaretler açılarak $18 - 5 + (-3) \cdot 2 = 13 - 6 = 7$ bulunur. İki yöntem aynı sonucu verir. Benzer biçimde $(9 - 4) \cdot (-2 + 6) = 5 \cdot 4 = 20$; bu değer $(9 - 4) \cdot 4 = 9 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 36 - 16 = 20$ olarak bağımsız biçimde doğrulanır.

6. Değişme, birleşme ve kapalılık özelliklerinin kapsamı

Toplamada terimlerin yerini değiştirmek sonucu değiştirmez: $a + b = b + a$. Çarpmada çarpanların yerini değiştirmek de sonucu korur: $a \cdot b = b \cdot a$. Bunlar değişme özellikleridir. $17 + (-5)$ ve $(-5) + 17$ işlemleri aynı 12 sonucuna; $(-4) \cdot 6$ ve $6 \cdot (-4)$ işlemleri aynı -24 sonucuna ulaşır. Ancak $11 - 4 = 7$ iken $4 - 11 = -7$; $18 \div 3 = 6$ iken $3 \div 18 = 1/6$ olduğundan çıkarma ve bölmede değişme özelliği genel olarak yoktur.

Birleşme özelliği, üç veya daha fazla sayı için grup sınırlarının değişmesine rağmen sonuçların aynı kalmasıdır. Toplamada $(a + b) + c = a + (b + c)$, çarpmada $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ geçerlidir. Örneğin $(25 + 37) + 63 = 62 + 63 = 125$ ve $25 + (37 + 63) = 25 + 100 = 125$; iki yol aynı sonuca çıkar. Ancak $(12 - 5) - 2 = 5$ iken $12 - (5 - 2) = 9$'dur. Bölmede de $(24 \div 6) \div 2 = 2$ fakat $24 \div (6 \div 2) = 8$'dir. Her biri ters işlemle kontrol edilebilir: $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$; $8 \cdot 3 = 24$.

$$a + b = b + a;\ (a + b) + c = a + (b + c);\ a \cdot b = b \cdot a;\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Anlamı: Toplama ve çarpmanın değişme ve birleşme özellikleri.

Koşullar: a, b, c gerçek sayılardır. Çıkarma ve bölmeye bu özellikler doğrudan uygulanamaz.

Kapalılık, bir kümenin içinden seçilen sayıların işlem sonucunun yine aynı kümede kalmasıdır. Örneğin iki tam sayının toplamı tam sayı, fakat iki tam sayının bölümü her zaman tam sayı değildir. Bu konu bir önceki GY-01.01'de sayı kümeleriyle ilişkilendirilmiştir. Burada işlemlerin özellikleri kullanılırken hangi sayı kümesinde bulunulduğuna dikkat edilmesi yeterlidir.

7. Etkisiz eleman, ters eleman ve yutan eleman

Toplamada sıfır etkisiz elemandır; $a + 0 = 0 + a = a$. Çarpmada bir etkisiz elemandır; $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Buna karşılık sıfır çarpmada yutan elemandır; $a \cdot 0 = 0$'dır. Çıkarma ve bölmede iki yönlü aynı etkisiz eleman ilişkisi bulunmaz: $a - 0 = a$ olmasına rağmen $0 - a$ genellikle a değildir. $a \div 1 = a$ iken $1 \div a$ genellikle a değildir ve $a = 0$ için zaten tanımsızdır.

Bir sayının toplama işlemine göre tersi, onunla toplandığında sıfır veren sayıdır: 14 ile −14 bunun örneğidir. Çarpma işlemine göre ters ise sıfırdan farklı bir sayıyla çarpıldığında 1 sonucunu verir. 5 ile 1/5'in çarpımı 1'dir. Sıfırın çarpmaya göre tersi yoktur. Ayrıca bir tam sayının çarpmaya göre tersi her zaman tam sayı değildir; örneğin 5'in tersi 1/5 rasyoneldir.

$$a + 0 = a;\ a + (-a) = 0;\ a \cdot 1 = a;\ a \cdot 0 = 0;\ a \cdot (1/a) = 1$$

Anlamı: Toplamanın ve çarpmanın etkisiz elemanları, ters elemanlar ve çarpmanın yutan elemanı.

Koşullar: a gerçek sayıdır. 1/a ve a · (1/a) ifadeleri yalnız a ≠ 0 için tanımlıdır.

Dört işlemin temel özelliklerinin karşılaştırılması

Özellik	Toplama	Çıkarma	Çarpma	Bölme
Değişme	Var	Genel olarak yok	Var	Genel olarak yok
Birleşme	Var	Genel olarak yok	Var	Genel olarak yok
İki yönlü etkisiz eleman	0	Yok	1	Yok
Sıfırla ilişki	a + 0 = a	a − 0 = a	a · 0 = 0	a ÷ 0 tanımsız
Ters kavramı	Toplamsal ters −a	Ters sayıyı toplama	a ≠ 0 için 1/a	Çarpımsal tersle çarpma

8. Dağılma özelliği ve yaygın yanlış genellemeler

Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği a · (b + c) = a · b + a · c biçimindedir. Çıkarma için de a · (b − c) = a · b − a · c olur. Parantezdeki her terim aynı dış çarpanla ayrı ayrı çarpılır. Örneğin (−4) · (7 − 3) önce parantez çözülerek (−4) · 4 = −16 bulunur. Dağılma kullanılarak (−4) · 7 − (−4) · 3 = −28 − (−12) = −16 elde edilir; bu, ilk hesabın bağımsız doğrulamasıdır.

Aynı sıfırdan farklı bölen, bir toplamın terimlerine ayrı ayrı uygulanabilir: (a + b)/c = a/c + b/c. Fakat paydası toplam olan a/(b + c) ifadesini a/b + a/c şeklinde parçalamak doğru değildir. Nitekim 12/(2 + 4) = 2 iken 12/2 + 12/4 = 9'dur. Bölüneni parçalara ayırmak ile böleni parçalara ayırmak aynı işlem değildir. Ayrıca bölmenin sıfırdan farklı bölen koşulu hiçbir cebirsel dönüşüm sırasında kaybedilmemelidir.

$$a(b + c) = ab + ac;\ a(b - c) = ab - ac;\ (a + b)/c = a/c + b/c$$

Anlamı: Çarpma, toplam ve farkın terimleri üzerine dağılır; toplam aynı sıfırdan farklı bölenle terim terim bölünebilir.

Koşullar: a, b, c gerçek sayı, bölme eşitliğinde c ≠ 0'dır. a/(b + c) için aynı dağıtım genel olarak geçersizdir.

9. Birleşik işlemleri yorumlama ve bağımsız denetim

Çok adımlı ifadeler çözümlenirken önce hangi grupların bir arada bulunduğu belirlenir. Örneğin 50 − 2 · [7 + (−3)] + 24 ÷ (−6) işleminde 7 + (−3) = 4, sonra 2 · 4 = 8, ayrıca 24 ÷ (−6) = −4 bulunur. Kalan ifade 50 − 8 − 4 = 38 değerini verir. İkinci yöntemde çarpmanın dağılma özelliği kullanılır: 50 − (14 − 6) − 4 = 50 − 14 + 6 − 4 = 38. İki yöntemin aynı sonuca ulaşması, işlem önceliği ve işaretlerin doğru korunduğunu destekler.

Elde edilen sonucu denetlerken özellikle negatif sayının çıkarılması, bölmede sıfır kısıtı, aynı öncelikli işlemlerin soldan sağa uygulanması ve parantezin sınırları gözden geçirilmelidir. Dört işlemdeki bu ilkeler,

ilerleyen tek-çift ve asal sayılar, bölünebilme, kesirler, denklemler, oran ve problem çözme konularının ortak hesaplama temelini oluşturur. Kesirlerle dört işlemin ayrıntılı yöntemleri ise GY-01.07'de ele alınacaktır.

KONU 1.3

TEK-ÇİFT, POZİTİF-NEGATİF VE ASAL SAYILAR

Tam sayılar, sayı doğrusundaki konumları dışında bazı yapısal özelliklere göre de sınıflandırılır. Teklik ve çiftlik bir tam sayının 2'nin katı olup olmadığıyla, pozitiflik ve negatiflik sıfıra göre konumuyla, asal olma ise pozitif bölenlerinin sayısıyla ilişkilidir. Bu sınıflandırmaların koşulları farklıdır: −8 negatif ve çift bir tam sayıdır fakat asal değildir; 2 pozitif, çift ve asal sayıdır. Teklik-çiftlik, işaret ve asal olma kavramları birbirinin yerine kullanılmamalıdır.

1. Tek ve çift tam sayılar

2'nin bir tam sayı katı olarak yazılabilen tam sayılar çifttir. 2'nin tam katı olmayan tam sayılar ise tektir. Çift sayılar ..., −6, −4, −2, 0, 2, 4, 6, ...; tek sayılar ..., −5, −3, −1, 1, 3, 5, ... biçiminde sıralanır. Sıfır çifttir çünkü $0 = 2 \cdot 0$'dır. Negatif bir sayı da çift ya da tek olabilir: $-14 = 2 \cdot (-7)$ çift, $-13 = 2 \cdot (-7) + 1$ tek sayıdır. Teklik-çiftlik tam sayılara ait bir özelliktir; 2,5 gibi bir rasyonel sayı ne tek ne de çift tam sayıdır.

Çift sayı $2n$, tek sayı $2n + 1$ ya da $2n - 1$ biçiminde gösterilir. Bu ifadelerde n herhangi bir tam sayıdır; n'nin pozitif olması gerekmez. İki tek sayı gösterimi, n tam sayılar üzerinde değiştikçe aynı kümeyi verir. Örneğin $-7 = 2 \cdot (-4) + 1 = 2 \cdot (-3) - 1$'dir. Genel gösterimler, çok sayıda örnek denemek yerine bütün tam sayılar için özellikleri gerekçelendirmeyi sağlar.

$$\text{Çift tam sayı} = 2n;\ \text{Tek tam sayı} = 2n + 1$$

Anlamı: Her tam sayı ya çift ya tektir; her iki sınıfa birden giremez.

Koşullar: $n \in \mathbb{Z}$; tek-çift sınıflandırması tam sayılar içindir.

İşaret ile tek-çift özelliklerinin ayrı değerlendirilmesi

Sayı	İşaret	Teklik-çiftlik	Açıklama
−18	Negatif	Çift	$-18 = 2 \cdot (-9)$
−9	Negatif	Tek	$-9 = 2 \cdot (-5) + 1$
0	Ne pozitif ne negatif	Çift	$0 = 2 \cdot 0$
17	Pozitif	Tek	$17 = 2 \cdot 8 + 1$
24	Pozitif	Çift	$24 = 2 \cdot 12$
5/2	Pozitif	Tek veya çift değil	Tam sayı değildir

Onluk sayı sisteminde birler basamağı 0, 2, 4, 6 veya 8 olan tam sayı çifttir; 1, 3, 5, 7 veya 9 olan tam sayı tektir. Çünkü birler basamağı dışındaki bütün basamak değerleri 10'un katıdır ve 2'ye tam bölünür. Örneğin 5836 sayısı 5830 + 6 biçiminde yazılır; iki terim de 2'nin katıdır. Bu gerekçe, sayının kaç basamaklı olduğundan bağımsızdır. Bölünebilme kurallarının ayrıntıları GY-01.05'te verilecektir.

2. Toplama ve çıkarma işlemlerinde tek-çift sonucu

İki çift sayının toplamı çifttir: 2a + 2b = 2(a + b). İki tek sayının toplamı da çifttir: (2a + 1) + (2b + 1) = 2(a + b + 1). Bir tek ve bir çift sayının toplamı ise 2(a + b) + 1 olduğundan tektir. Burada a ve b tam sayıdır; parantez içinde kalan katsayıların tam sayı olması, sonuçların 2'ye göre sınıfını belirler. Çıkarma için de sonuçların teklik-çiftlik düzeni aynıdır.

Örneğin 41 + 27 = 68 işlemi iki tek sayının toplamıdır. Bağımsız kontrol için 41 = 2 · 20 + 1 ve 27 = 2 · 13 + 1 yazıldığında toplam 2 · 34 = 68 olur. 42 − 17 = 25 sonucunun tek olması da çift eksi tek özelliğiyle uyumludur. Teklik-çiftlik hesabı gerçek sayısal değeri belirlemez; yalnız sonucun hangi sınıfa ait olduğunu önceden söyler.

Tek-çift sayıların toplanması ve çıkarılması

İlk sayı	İkinci sayı	Toplam	Fark
Çift	Çift	Çift	Çift
Çift	Tek	Tek	Tek
Tek	Çift	Tek	Tek
Tek	Tek	Çift	Çift

Birden fazla tam sayı toplanırken toplamın teklik-çiftliği, tek terimlerin sayısına bağlıdır. Tek terim sayısı çiftse toplam çift, tekse toplam tek olur. Çift terimler sonucu etkilemez. Örneğin 13 + 24 + 35 + 48 + 51 ifadesinde üç tek terim bulunduğundan toplam tektir. Doğrudan hesap 13 + 24 + 35 + 48 + 51 = 171 sonucunu verir. Terimlerden bazıları negatif olsa da tek-çift ilişkisi değişmez.

3. Çarpma ve kuvvetlerde tek-çift sonucu

İki tek tam sayının çarpımı tektir. Çünkü (2a + 1)(2b + 1) = 2(2ab + a + b) + 1 yazılabilir. Buna karşılık çarpanlardan en az biri çiftse çarpım çifttir; çift çarpan çarpımda 2'nin bir çarpan olarak bulunmasını sağlar. Örneğin 15 · 17 = 255 tek, 15 · 18 = 270 çifttir. Sonuçların birler basamağına bakmak, çarpma hesabından bağımsız bir denetimdir.

$$(2a + 1)(2b + 1) = 2(2ab + a + b) + 1;\ (2a)(2b + 1) = 2[a(2b + 1)]$$

Anlamı: Tek çarpı tek tektir; en az bir çift çarpan bulunan çarpım çifttir.

Koşullar: a, b ∈ ℤ.

Bir tek tam sayının pozitif tam sayı kuvveti tek, bir çift tam sayının pozitif tam sayı kuvveti çifttir. Örneğin $(-3)^3 = -27$ tek, $(-4)^2 = 16$ çifttir. Ancak sıfırıncı kuvvet ayrıdır: Sıfırdan farklı bir tam sayının sıfırıncı kuvveti 1 olduğu için çift tabanın sıfırıncı kuvveti de tektir. Ayrıca negatif tam sayı üslü ifadelerin sonuçları her zaman tam sayı olmadığından onların tek-çift niteliği doğrudan varsayılamaz. Üslü sayıların ayrıntıları GY-02.05'te incelenecektir.

Çarpma ve pozitif tam sayı üslerinde tek-çift özellikleri

İşlem	Sonuç	Dayanak
Tek · Tek	Tek	2k + 1 biçimindedir
Tek · Çift	Çift	En az bir çarpan 2'nin katıdır
Çift · Çift	Çift	Çarpım 2'nin katıdır
Tek tabanın pozitif tam sayı kuvveti	Tek	Tek çarpanlar yinelenir
Çift tabanın pozitif tam sayı kuvveti	Çift	Çift çarpan en az bir kez bulunur

Bölmede aynı genellemeler kullanılamaz. 18 ÷ 2 = 9 tek, 16 ÷ 2 = 8 çift, 15 ÷ 2 = 7,5 ise tam sayı olmadığı için tek ya da çift değildir. Çarpma ile kontroller sırasıyla 9 · 2 = 18, 8 · 2 = 16 ve 7,5 · 2 = 15'tir. Dolayısıyla çift bir sayının başka bir çift sayıya bölünmesi her zaman çift sonuç vermediği gibi bölümün tam sayı olacağını da garanti etmez.

4. Ardışık sayılarda tek-çift düzeni

Ardışık tam sayılar arasında 1 fark bulunur. Bir çift tam sayıdan sonraki tam sayı tek, bir tek tam sayıdan sonraki tam sayı çifttir. Buna karşılık ardışık tek sayılar ya da ardışık çift sayılar arasında 2 fark vardır: −5, −3, −1 ardışık tek; −4, −2, 0 ardışık çift sayı örnekleridir.

Ardışık iki tam sayının çarpımı her zaman çifttir. Bunun nedeni, iki sayıdan birinin mutlaka çift olmasıdır. 19 · 20 = 380, (−3) · (−2) = 6 örneklerinde iki sonuç da çifttir. Genel denetimde n çiftse n = 2k, n tekse n + 1 = 2(k + 1) olur; her iki durumda da n(n + 1) çarpımında 2 vardır. Ardışık üç tam sayının toplamı ortadaki tam sayının üç katıdır; örneğin 6 + 7 + 8 = 21 = 3 · 7. Bu bilgiler ilerideki sayı problemlerinde kullanılacaktır.

$$n(n + 1) = 2k \text{ (uygun bir } k \text{ tam sayısı için)}$$

Anlamı: Ardışık iki tam sayının çarpımı daima çifttir.

Koşullar: $n \in \mathbb{Z}$; $k = n(n + 1)/2$ bir tam sayıdır.

5. Pozitiflik, negatiflik ve sıfırın özel durumu

Gerçek sayılar arasında sıfırdan büyük olanlar pozitif, sıfırdan küçük olanlar negatiftir. Sıfır iki gruptan birine girmez. “Negatif olmayan” ifadesi pozitif sayılarla birlikte sıfırı da; “pozitif olmayan” ifadesi negatif sayılarla birlikte sıfırı da içerir. Bu ayrım bir eşitsizlikte olası değerlerin değerlendirilmesini değiştirir. Örneğin $x \geq 0$ koşulunu $x = 0$ da sağlar, $x > 0$ koşulunu ise sağlamaz.

$$x > 0 \text{ pozitif; } x < 0 \text{ negatif; } x \geq 0 \text{ negatif olmayan; } x \leq 0 \text{ pozitif olmayan}$$

Anlamı: Sıfır zayıf eşitsizliklerin kapsamındadır; ne pozitif ne negatiftir.

Koşullar: $x \in \mathbb{R}$. Teklik-çiftlik ise yalnız tam sayılar için kullanılır.

Sayı doğrusunda sağdaki sayı soldakinden büyüktür: −4 < −1 < 0 < 2. Burada −1, −4'ten büyüktür ancak her ikisi de negatiftir. Bir sayının işareti ile büyüklüğü aynı şey değildir. Özellikle −100, −2'den küçük olmakla birlikte sıfıra uzaklığı daha fazladır. Önceki bölümlerde tanımlanan işaretli işlem kuralları, bu sınıflandırmaya dayanır. Tanımsız işlemlerin ise pozitif ya da negatif bir sonucu olduğu söylenemez.

İşaret terimlerinin sıfırla ilişkisi

Tanım	Matematiksel koşul	Sıfır dâhil mi?
Pozitif	$x > 0$	Hayır
Negatif	$x < 0$	Hayır
Negatif olmayan	$x \geq 0$	Evet
Pozitif olmayan	$x \leq 0$	Evet

6. İşaret ile kuvvet arasındaki ilişki

Sıfırdan farklı bir gerçek sayının karesi pozitiftir; çünkü iki aynı işaretli sayının çarpımı pozitiftir. Bütün gerçek sayılar için $x^2 \geq 0$ geçerlidir; $x^2 = 0$ olması yalnız $x = 0$ durumunda mümkündür. Bununla birlikte $x^2 > 0$ eşitsizliğinden $x > 0$ sonucu çıkarılamaz: $(-5)^2 = 25$ ve $5^2 = 25$'tir. Kare pozitif olduğunda taban pozitif ya da negatif olabilir.

Sıfırdan farklı bir gerçek sayının tek pozitif tam sayı kuvveti işaretini korur; çift pozitif tam sayı kuvveti pozitiftir. $(-2)^3 = -8$ ve $(-2)^4 = 16$ bunu gösterir. Bir kontrol olarak ilk ifadede üç, ikinci ifadede dört negatif çarpan bulunur. Sıfırın bütün pozitif tam sayı kuvvetleri ise 0'dır; bu nedenle çift kuvvetin her koşulda pozitif olduğu iddiası yanlıştır.

> **Farklı sınıflandırmalar** Sıfır çift olmasına rağmen ne pozitif ne negatiftir. Negatif tam sayılar tek veya çift olabilir. Asal sayı kavramı bu kitapta 1'den büyük doğal sayılar için tanımlanır. Çift kuvvetin sonucu sıfır tabanında sıfırdır.

7. Asal ve bileşik doğal sayılar

Asal sayı, 1'den büyük olan ve tam olarak iki pozitif böleni bulunan doğal sayıdır. Bu bölenler 1 ile sayının kendisidir. Örneğin 13'ün pozitif bölenleri yalnız 1 ve 13 olduğu için 13 asaldır. 15'in ise 1 ve 15 yanında 3 ve 5 pozitif bölenleri de vardır; bu nedenle 15 asal değildir. 1'den büyük olup asal olmayan doğal sayılara bileşik sayı denir. Bileşik sayılar, 1'den büyük iki doğal sayının çarpımı olarak yazılabilir.

1'in tek pozitif böleni 1 olduğundan ne asal ne bileşiktir. 0, asal sayı tanımındaki 1'den büyük olma koşulunu sağlamaz ve bileşik de değildir. Negatif tam sayılar da bu tanım gereği asal veya bileşik doğal sayı sayılmaz. En küçük asal sayı 2'dir; aynı zamanda tek çift asal sayıdır. Çünkü 2'den büyük her çift sayı 2 ile kendisinden farklı bir pozitif bölen elde eder. Bundan dolayı 2'den büyük asal sayılar tek olmak zorundadır; ancak her tek sayı asal değildir: 9 tek olduğu hâlde $3 \cdot 3$ biçiminde yazılır.

Sayıların asal ve bileşik olarak sınıflandırılması

Sayı	Bölen bilgisi	Sınıflandırma
0	1'den büyük doğal sayı değildir	Ne asal ne bileşik
1	Bir pozitif böleni vardır	Ne asal ne bileşik
2	Pozitif bölenler 1 ve 2	Asal; tek çift asal
9	Pozitif bölenler 1, 3, 9	Bileşik
17	Pozitif bölenler 1 ve 17	Asal
21	3 ve 7 ile de bölünebilir	Bileşik
29	Pozitif bölenler 1 ve 29	Asal

Asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... biçiminde devam eder. Ardışık asal sayılar arasında sabit bir fark yoktur. Farkı 1 olan tek asal sayı çifti 2 ve 3'tür; diğer asal sayılar tek olduğundan aralarındaki fark daima çifttir. Asal sayılar sonsuz sayıdadır. Varsayımsal sonlu bir asal listesinde bulunan bütün asallar çarpılıp sonuca 1 eklendiğinde elde edilen sayı listedeki hiçbir asala bölünemez. Yeni sayı asal olabilir veya listede olmayan bir asal böleni bulunur. Her iki olasılık da listenin bütün asalları içerdiği varsayımına aykırıdır.

8. Asal sayı denetiminde karekök sınırı

Bir doğal sayının tek olması onun asal olduğunu göstermez; 1 ve kendisi dışında pozitif böleni olmadığının belirlenmesi gerekir. Bileşik n sayısı, 1'den büyük a ve b tam sayılarının çarpımıdır. Eğer a ile b'nin ikisi de √n'den büyük olsaydı çarpımları n'den büyük olurdu. Bu çelişki nedeniyle bileşik bir sayının mutlaka √n'yi aşmayan, 1'den büyük bir böleni vardır. Asal denetiminde √n'ye kadar olan asal bölen adaylarını kontrol etmek yeterlidir.

97 sayısında $9^2 = 81 < 97 < 100 = 10^2$ olduğundan √97, 9 ile 10 arasındadır. Bu sınırın altındaki asal sayılar 2, 3, 5 ve 7'dir. 97 tek olduğu için 2'ye bölünmez. Rakamları toplamı 16 olduğu için 3'e, son rakamı 0 ya da 5 olmadığı için 5'e bölünmez. $7 \cdot 13 = 91$ ve $7 \cdot 14 = 98$ olduğundan 7'ye de tam bölünmez. Bütün gerekli adaylar elendiği için 97 asaldır. Sonucun denetimi yalnız yaklaşık bir tahmin değil, olası küçük asal bölenlerin eksiksiz kontrolüdür.

91 ise asal değildir: $7 \cdot 13 = 91$ eşitliği, 1 ve kendisi dışındaki bir bölenin varlığını kanıtlar; ters işlem $91 \div 7 = 13$'tür. Bir sayının bileşik olduğunu göstermek için tek bir uygun bölen yeterlidir. Asal olduğunu göstermek içinse karekök sınırına kadar gerekli bütün asal adayların dışlanması gerekir. Bu yöntemin sistematik asal çarpanlara ayırma uygulamaları GY-01.06'da, bölünebilme kuralları GY-01.05'te açıklanacaktır.

$$n = a \cdot b,\ a > 1 \text{ ve } b > 1 \Rightarrow \min(a, b) \leq \sqrt{n}$$

Anlamı: Bileşik n sayısının 1'den büyük bir böleni karekök sınırını aşmaz.

Koşullar: n, a, b pozitif tam sayılardır; n > 1. Asal olup olmadığını anlamak için √n'ye kadarki asal bölen adayları yeterlidir.

9. Aralarında asal kavramının ayrımı

İki pozitif tam sayının ortak pozitif böleni yalnız 1 ise bu sayılar aralarında asaldır. Bu, ayrı ayrı asal olmaktan farklıdır. 8 sayısının pozitif bölenleri 1, 2, 4, 8; 15 sayısının bölenleri 1, 3, 5, 15 olduğundan ortak pozitif bölenleri yalnız 1'dir. Bu nedenle 8 ve 15 aralarında asaldır; oysa ikisi de bileşik sayıdır. Buna karşılık 14 ile 21, 7 ortak bölenine sahip olduğundan aralarında asal değildir.

Ardışık iki pozitif tam sayı daima aralarında asaldır. Çünkü bu iki sayıyı birlikte bölen herhangi bir pozitif sayı, farkları olan 1'i de bölmelidir; dolayısıyla ortak pozitif bölen 1'den başka olamaz. Örneğin 20 ile 21 aralarında asaldır. Bu gerekçe bir örneğe değil, bütün ardışık pozitif tam sayılara uygulanabilir. Aralarında asallığın EBOB ile ayrıntılı ilişkisi GY-01.06'da ele alınacaktır.

Asal sayı ile aralarında asal sayı çiftinin farkı

Sayı veya çift	Özellik	Gerekçe
13	Asal	Pozitif bölenleri 1 ve 13
8 ve 15	Aralarında asal	Ortak pozitif bölenleri yalnız 1
14 ve 21	Aralarında asal değil	7 ortak pozitif bölen
20 ve 21	Aralarında asal	Ardışık pozitif tam sayılar
2 ve 9	Aralarında asal	Biri asal biri bileşik; ortak pozitif bölen 1

10. Sayı özelliklerini birlikte yorumlama

Bir sayının özelliğini değerlendirirken önce hangi kümeye ait olduğu belirlenir. Örneğin −11, negatif ve tek bir tam sayıdır ama bu kitapta tanımlandığı anlamda asal değildir; +11 pozitif, tek ve asaldır. İki tek tam sayının toplamı kesinlikle çift olsa da pozitif olması gerekmez: 3 + (−5) = −2 negatif ve çifttir; 3 + 5 = 8 pozitif ve çifttir. İşaret ile tek-çift sonucu ayrı ayrı gerekçelendirilmelidir.

Bir sayının çift olması 2 çarpanının varlığını, asal olması 1 ile kendisi dışında pozitif bölen bulunmamasını gösterir. Ancak çift sayıların hepsi bileşik değildir; 2 bu genellemenin istisnasıdır. Benzer biçimde 1 ne asal ne bileşiktir. Bu koşullara dikkat etmek, sonraki bölünebilme, asal çarpanlar ve sayı problemleri konularında yanlış genellemeler yapılmasını önler.

KONU 1.4

BASAMAK KAVRAMI VE SAYI ÇÖZÜMLEME

Sayıları yazarken kullanılan rakamların değeri yalnız kendilerine değil, yazıldıkları konuma da bağlıdır. Onluk sayı sisteminde aynı rakam birler basamağındayken bir birimi, yüzler basamağındayken yüz birimi temsil eder. Basamak kavramı; sayıları doğru okumak, çözümlemek, karşılaştırmak ve rakamların değiştirilmesiyle meydana gelen değişimi hesaplamak için gereklidir. Bu bölüm, önceki konularda ele alınan sayı kümeleri ve dört işlem üzerine kuruludur; bölünebilme ve asal çarpanlara ayırma ayrıntıları sonraki konularda incelenecektir.

1. Rakam, sayı, basamak ve onluk sayı sistemi

Onluk sayı sisteminde 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 olmak üzere on rakam kullanılır. Rakam, sayının yazımında kullanılan semboldür; sayı ise bir büyüklüğü veya niceliği ifade eder. Örneğin 7 hem tek rakamlı bir sayı hem de bir rakamdır. Buna karşılık 37 sayısı, 3 ve 7 rakamlarının belirli sırada yan yana gelmesiyle yazılan iki basamaklı bir sayıdır. “37 rakamı” demek doğru değildir; çünkü 37 tek bir rakam değil iki rakamlı bir sayıdır.

Onluk sistemde basamaklar sağdan sola birler, onlar, yüzler, binler, on binler, yüz binler, milyonlar ve daha büyük birimlerle devam eder. Her basamağın değeri hemen sağındaki basamağın on katıdır. Bu kural nedeniyle 425 sayısında 4, dört yüzlüğü; 2, iki onluğu; 5, beş birliği ifade eder. 425 = 400 + 20 + 5 eşitliği, rakamların bulundukları konumla nasıl farklı değer aldığını gösterir. Ters kontrol için 400 + 20 + 5 yeniden toplanır ve 425 bulunur.

Bir doğal sayının basamak sayısı, standart onluk yazımındaki rakam sayısıdır. 8 tek basamaklı; 80 iki basamaklı; 800 üç basamaklıdır. Sıfır da standart gösterimde tek basamaklı doğal sayıdır. Baştaki sıfırlar sayı değerini değiştirmez: 0048 ve 48 aynı sayıdır; ancak 0048, dört basamaklı bir doğal sayının standart yazımı değildir. Bir sayının en soldaki rakamı sıfır olamaz; bu kural özellikle harfle verilen sayı gösterimlerinde önemlidir.

Onluk sistemde yaygın basamaklar ve birim değerleri

Basamak	Birim değer	Üslü gösterim
Birler	1	10^0
Onlar	10	10^1
Yüzler	100	10^2
Binler	1 000	10^3
On binler	10 000	10^4
Yüz binler	100 000	10^5
Milyonlar	1 000 000	10^6

2. Sayı değeri ile basamak değerinin ayrımı

Bir rakamın sayı değeri, rakamın tek başına gösterdiği 0 ile 9 arasındaki değerdir. Basamak değeri ise bu sayı değerinin bulunduğu basamağın birim değeriyle çarpılmasıdır. Örneğin 6 306 sayısında binler basamağındaki 6'nın sayı değeri 6, basamak değeri 6 000'dir; birler basamağındaki 6'nın sayı değeri yine 6, basamak değeri ise 6'dır. Aynı rakamın iki kez yazılması sayı değerinin değiştiği anlamına gelmez. Değişen şey, rakamın yeridir.

6 306 sayısının yüzler basamağındaki 3'ün basamak değeri 300'dür. Onlar basamağındaki 0'ın basamak değeri ise $0 \cdot 10 = 0$'dır. Buna rağmen bu sıfır gereksiz değildir: 6 306'daki 0 kaldırılırsa 636 sayısı elde edilir ve sayı değişir. Sıfırın basamak tutucu rolü, eksik bir onluk değerini belirtmek ve diğer rakamları doğru konumda bırakmaktır.

$$\text{Basamak değeri} = \text{rakamın sayı değeri} \times 10^n$$

Anlamı: Birler basamağı için $n = 0$, onlar için $n = 1$, yüzler için $n = 2$, ... alınır.

Koşullar: Onluk sistemde n sıfır veya pozitif tam sayıdır; rakam 0 ile 9 arasındadır.

6 306 sayısının rakamlarının iki farklı değeri

Basamak	Rakam	Sayı değeri	Basamak değeri
Binler	6	6	6 000
Yüzler	3	3	300
Onlar	0	0	0
Birler	6	6	6

3. Sayı çözümleme ve yeniden oluşturma

Bir doğal sayının rakamlarını basamak değerlerinin toplamı olarak yazmaya sayı çözümleme denir. Örneğin 50 407 = 5 · 10 000 + 0 · 1 000 + 4 · 100 + 0 · 10 + 7 · 1 biçiminde çözümleme yapılır. Sıfır katsayılı terimler kaldırılarak 50 407 = 50 000 + 400 + 7 yazılabilir. Ancak çözümlenmiş değerden sayıyı yeniden oluştururken boş kalan basamakların konumu unutulmamalıdır. 50 000 + 400 + 7 = 50 407'dir; 5 407 değildir.

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Anlamı: Onluk sistemde sayı, rakamlarının basamak birimleriyle çarpımlarının toplamıdır.

Koşullar: N doğal sayı; a_i rakam ($0 \le a_i \le 9$); $N > 0$ için en soldaki rakam sıfır değildir.

Öğretici bir hesapta 8 205 sayısı 8 · 1 000 + 2 · 100 + 0 · 10 + 5 = 8 000 + 200 + 5 biçiminde ayrılır. Sonucun bağımsız kontrolü, binlik sayısının 8, yüzlük sayısının 2, onluk sayısının 0 ve birlik sayısının 5 olduğu tablo üzerinden yeniden okunmasıdır: 8 205. Çözümleme yalnız bir toplama işlemi değil, sayı yazımının neden o değeri verdiğinin açıklamasıdır.

Sayıyı çözümlemeden oluşturmak aynı ilişkinin ters yönüdür. $7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2$ ifadesinde 10^3 terimi olmadığı için binler basamağı 0'dır; toplam 70 000 + 300 + 90 + 2 = 70 392 olur. İkinci kontrolde 70 392'nin rakamları sırayla 7, 0, 3, 9 ve 2 olarak incelenir; yeniden çözümleme verilen terimleri üretir.

Bir sayı çözümlemesinin iki gösterimi

Sayı	Ayrıntılı çözümleme	Sıfır terimleri çıkarılmış biçim
4 018	4·1000 + 0·100 + 1·10 + 8	4 000 + 10 + 8
20 305	2·10 000 + 0·1000 + 3·100 + 0·10 + 5	20 000 + 300 + 5
706	7·100 + 0·10 + 6	700 + 6

4. Basamak sayısı, sınır değerler ve sıfırla başlayan yazımlar

Pozitif bir doğal sayının k basamaklı olması, onun en az $10^{(k-1)}$ ve en fazla $10^k - 1$ değerinde olması anlamına gelir. Örneğin dört basamaklı doğal sayılar 1 000 ile 9 999 arasındadır. En küçük dört basamaklı sayının 1 000 olmasının nedeni binler basamağına sıfır yazılamamasıdır; en büyük sayıda dört basamağın her birinde 9 bulunur. 9 999'a 1 eklenince 10 000 olur ve beşinci basamağa geçilir.

$$10^{(k-1)} \le N \le 10^k - 1$$

Anlamı: Pozitif N doğal sayısının tam k basamaklı olması için alt ve üst sınırlar.

Koşullar: $k \ge 1$ tam sayıdır; N pozitif doğal sayıdır. Sıfır ayrıca tek basamaklıdır.

Bu sınırların kontrolü doğrudan mümkündür: k = 3 seçilince $10^2 = 100$ ve $10^3 - 1 = 999$ elde edilir. Üç basamaklı sayılar tam olarak bu aralıktadır. Rakamların farklı olması gibi ek bir koşul verilmediğinde 100 ve 999 da aralığa dâhildir. Rakamları farklı en büyük üç basamaklı doğal sayı 987'dir; 999 daha büyük olmasına rağmen tekrar eden rakam içerir. Böylece “en büyük üç basamaklı” ile “rakamları birbirinden farklı en büyük üç basamaklı” ifadelerinin neden farklı sonuç verdiği görülür.

5. Harfle gösterilen sayılar ve rakamların koşulları

Sayı problemlerinde rakamlar bazen a, b, c gibi harflerle temsil edilir. Üç basamaklı “abc” sayısı, a yüzler, b onlar ve c birler basamağındaki rakamlar olmak üzere 100a + 10b + c değerindedir. Buradaki “abc” bitişik sayı gösterimidir; a·b·c çarpımı değildir. Ayrıca a sıfırdan farklı bir rakam olmalıdır; b ve c sıfır olabilir. Harflere yalnız rakam değeri verilir; bağıntı kurulurken bu değerlerin basamakla çarpılması gerekir.

> ab sayısı = 10a + b; abc sayısı = 100a + 10b + c; abcd sayısı = 1000a + 100b + 10c + d
>
> **Anlamı:** Bitişik harflerle gösterilen sayılar basamak değerlerinin toplamı olarak açılır.
>
> **Koşullar:** a, b, c, d ∈ {0,1,...,9}; çok basamaklı sayının ilk rakamı a ≠ 0 olmalıdır. “ab” gösterimi a·b çarpımından farklıdır.

Örneğin üç basamaklı a4b sayısının değeri 100a + 40 + b'dir. a = 6, b = 2 seçilirse sayı 642 ve çözümleme 600 + 40 + 2'dir. 100 · 6 + 40 + 2 = 642 sonucunu verir; yeniden oluşturulan sayının orta rakamı 4 olarak kalmıştır. Bir rakamın iki farklı basamakta bulunması durumunda da her bir konum ayrı işlenir: 5a5 sayısı 500 + 10a + 5'tir.

Harfli sayı gösteriminin koşulları

Gösterim	Açılım	Önemli kısıt
ab	10a + b	a ≠ 0
a0b	100a + b	Ortadaki sıfır basamağı korur
aba	101a + 10b	Aynı a rakamı yüzler ve birlerde yer alır
abcd	1000a + 100b + 10c + d	a ≠ 0; diğer rakamlar sıfır olabilir

6. Rakamın yer değiştirmesi ve sayının değerindeki değişim

Bir sayıdaki rakam değiştiğinde sayının ne kadar artıp azaldığı, değişen rakamın hangi basamakta bulunduğuna bağlıdır. Yüzler basamağındaki bir rakamın 1 artırılması, diğer basamaklar değişmiyorsa sayıyı 100 artırır. Onlar basamağındaki rakamın 2 azaltılması ise sayıyı 20 azaltır. Bu hesaplama, sayıyı baştan toplamaya gerek kalmadan basamak ağırlıklarından yararlanmayı sağlar. Ancak değişikliklerin rakam olarak geçerli kalması gerekir: 9 rakamı 1 artırılarak aynı basamakta yeni bir rakam gibi ele alınamaz; elde oluşur ve sonraki basamağa geçilir.

Örneğin 5 284 sayısının binler basamağı 2 artırılıp onlar basamağı 3 azaltıldığında 7 254 elde edilir. Değişim, +2 · 1 000 − 3 · 10 = +1 970'tir. Bağımsız kontrol, yeni sayı ile eski sayının farkıdır: 7 254 − 5 284 = 1 970. Başlangıçtaki onlar basamağı 8 olduğundan 3 azaltmak mümkündür; rakam 5 olur. Böylece basamak değişikliğinin yalnız cebirsel değil, gerçekten uygulanabilir olduğu da kontrol edilmiş olur.

> Sayıdaki değişim = Σ (rakam değişimi × ilgili basamak birimi)
>
> **Anlamı:** Her basamakta değişen rakam ile o basamağın 10 kuvveti çarpılır, artış ve azalışlar toplanır.
>
> **Koşullar:** Bütün yeni rakamlar 0 ile 9 arasında olmalı ve sayının yeni baş rakamı sıfır olmamalıdır; elde gerektiren işlemler ayrı ele alınmalıdır.

İki basamaktaki rakamlar yer değiştirirse toplam fark çoğu zaman tek bir farkın katı olarak yazılabilir. Örneğin iki basamaklı ab sayısı 10a + b, ba sayısı 10b + a'dır. Birinciden ikincisi çıkarıldığında 9(a − b) elde edilir. a = 7 ve b = 2 seçilirse 72 − 27 = 45 ve 9(7 − 2) = 45 aynı sonucu verir. Bu örnekte her iki sayı da iki basamaklıdır;

b = 0 olsaydı “ba” standart iki basamaklı sayı olmazdı, ancak ters sırada yazılan rakamların sayısal değeri yine açıklanabilirdi.

7. Rakamları ters çevirme ve basamak ilişkilerinden sonuç çıkarma

Bir sayının rakamlarının ters sırayla yazılması, genel olarak aynı sayıyı vermez. Üç basamaklı abc sayısı 100a + 10b + c iken ters yazılan cba ifadesi, c sıfırdan farklı olduğunda üç basamaklı bir sayı olup 100c + 10b + a değerindedir. Aralarındaki fark 99(a − c)'dir; çünkü ortadaki 10b terimleri birbirini götürür. Örneğin 742 ile 247 arasındaki fark 495'tir. Aynı sonuç 99(7 − 2) = 495 işleminden çıkar. Böylece onlar basamağının fark hesabını neden etkilemediği anlaşılır.

$$ab - ba = 9(a - b);\ abc - cba = 99(a - c)$$

Anlamı: Rakamları ters yazılan sayıların farkında ortak konumdaki katkılar birbirini götürür.

Koşullar: a, b, c rakamdır; her iki yazımın da aynı basamak sayısında doğal sayı olması için ilk rakamları sıfırdan farklı olmalıdır.

Rakamları ters çevrilmiş bir sayı oluşturulurken sıfırın yeri ayrıca dikkate alınır. 540 sayısının ters yazılışı 045 olarak görünebilir, fakat bu yazım doğal sayı olarak 45'e eşittir ve üç basamaklı değildir. 540 − 45 = 495'tir. Genel cebirsel ifade 540 = 100 · 5 + 10 · 4 + 0, 045 = 100 · 0 + 10 · 4 + 5 olduğundan yine 99(5 − 0) = 495 elde edilir. Formül sayısal değer için geçerlidir; ters yazımın üç basamaklı olacağı sonucu ise sıfırın başta bulunduğu durumda geçerli değildir.

Rakam değişikliklerinin sayısal etkisi

İşlem	İlk değer	Yeni değer	Fark
5 284'ün binler rakamını 2 artırma, onlar rakamını 3 azaltma	5 284	7 254	+1 970
72'nin rakamlarını ters yazma	72	27	−45
742'nin rakamlarını ters yazma	742	247	−495
540'ın rakamlarını ters yazma	540	45	−495

8. Sayıları karşılaştırma ve büyük sayıların okunması

Pozitif iki doğal sayıyı karşılaştırmada önce basamak sayıları değerlendirilir. Basamak sayısı daha fazla olan sayı daha büyüktür. Basamak sayısı aynıysa soldan ilk farklı rakam karşılaştırılır: Bu konumda büyük rakamı taşıyan sayı daha büyüktür. Örneğin 58 709 ile 58 790 beş basamaklıdır. On binler, binler ve yüzler basamakları eşit; onlar basamağında 0 ile 9 farklı olduğu için 58 790 daha büyüktür. Farkın 58 790 − 58 709 = 81 olması, sayısal sıralamayla uyumludur.

Büyük doğal sayılarda basamakların adlandırılması ve okunması için rakamlar sağdan sola üçerli bölüklere ayrılır: birler, binler, milyonlar ve milyarlar bölüğü. Örneğin 4 032 105 sayısı “dört milyon otuz iki bin yüz beş” olarak okunur. Ortadaki 032, binler bölüğünün otuz iki bin değerini temsil eder; başındaki sıfır okunuşta ayrı bir sayı gibi seslendirilmez. Bölük ayrımı okunabilirliği artırır, ancak bir rakamın basamak değerini değiştirmez.

4 032 105 sayısının bölükler ve basamaklar bakımından yorumu

Bölük	Bölükte yazılan rakamlar	Sayıya katkısı
Milyonlar	4	4 000 000
Binler	032	32 000
Birler	105	105

9. Ondalık gösterimde basamağın yerinin genişlemesi

Basamak kavramı yalnız doğal sayılara özgü değildir; ondalık gösterimlerin virgülün sağındaki kesir kısmı da konuma göre değer kazanır. Virgülün hemen sağındaki basamak onda birler, sonraki yüzde birler, ardından binde birler olarak adlandırılır. Bunların birim değerleri sırasıyla 1/10, 1/100 ve 1/1000'dir. Örneğin 24,307 sayısında 3'ün basamak değeri 0,3; 0'ın basamak değeri 0; 7'nin basamak değeri 0,007'dir.

24,307 = 20 + 4 + 0,3 + 0,007 eşitliği, tam kısmın ve kesir kısmının ortak onluk mantıkla çözümlendiğini gösterir. Bağımsız kontrol için 0,3 + 0,007 = 0,307 ve 20 + 4 = 24 bulunur; ikisi birleştirildiğinde 24,307 elde edilir. Ondalık gösterimlerde karşılaştırma ve dört işlem yöntemleri GY-01.07'de ayrıntılı ele alınacağından burada yalnız basamakların anlamı açıklanır.

Virgülün iki yanındaki basamak değerleri

Basamak	Birim değeri	24,307 içindeki rakamın katkısı
Onlar	10	2 × 10 = 20
Birler	1	4 × 1 = 4
Onda birler	0,1	3 × 0,1 = 0,3
Yüzde birler	0,01	0 × 0,01 = 0
Binde birler	0,001	7 × 0,001 = 0,007

10. Basamak bilgisini kullanırken temel koşullar ve denetim

Basamak bilgisiyle işlem yapılırken üç durum birbirinden ayrılmalıdır: rakamın kendisi, rakamın bulunduğu yerin birim değeri ve rakam değiştirildiğinde sayının toplam değeri. Aynı rakam bir sayı içinde birden fazla kez geçebilir; fakat her konumdaki katkısı farklıdır. Sıfır rakamının basamak değerine katkısı sıfır olsa bile diğer rakamları yerinde tutması önemlidir. Bir rakamın çıkarılması, iki rakamın yerinin değiştirilmesi veya yeni bir rakam eklenmesi aynı işlem değildir.

Sayı çözümleme, yazılı sayı ile basamak değerleri toplamı arasında iki yönlü doğrulanabilir ilişki kurar. Örneğin 90 506 sayısı 90 000 + 500 + 6 şeklinde açılır ve tekrar toplandığında 90 506 bulunur. Bu sayının yüzler basamağında 5, binler ve onlar basamağında 0 olduğu çözümlemeden anlaşılır. Sonuç olarak basamak kavramı, sayıların yalnız nasıl yazıldığını değil, bir rakamdaki küçük değişikliğin toplam sayı üzerinde neden farklı büyüklükte bir etki oluşturduğunu da açıklar.

> **Basamak gösteriminde dikkat** Çok basamaklı doğal sayının soldaki ilk rakamı sıfır olamaz. “ab” bitişik rakam gösterimi a × b çarpımı değildir. Sıfırın basamak değeri sıfır olsa da sayıdaki konumu belirleyicidir. Başta bulunan sıfır standart sayı yazımında basamak sayısını artırmaz.

KONU 1.5

BÖLÜNEBİLME KURALLARI VE KALAN

Bölünebilme, bir tam sayının başka bir sıfırdan farklı tam sayının katı olup olmadığını belirler. Kalan ise tam bölünme gerçekleşmediğinde ne kadar fark bulunduğunu gösterir. Onluk basamak sistemi bazı bölenler için sayının tamamına uzun bölme uygulamadan sonuca ulaşmayı sağlar. Bu nedenle bölünebilme kuralları yalnızca ezberlenmiş rakam denetimleri değildir; her biri sayı çözümleme ile çarpım ve toplamın özelliklerine dayanır. Bölme-kalan ilişkisini doğru kurmak, daha sonraki EBOB-EKOK ve sayı problemleri konularında kullanılacak temel yöntemdir.

1. Tam bölünme, bölüm ve kalanın matematiksel anlamı

Bir A tam sayısı ve pozitif bir b tam sayısı için A sayısı, b ile bölündüğünde A = b·q + r biçiminde tek bir eşitlikle ifade edilir. Burada q tam sayı bölüm, r kalan, b bölen ve A bölünendir. Kalanın her zaman 0 ≤ r < b koşulunu sağlaması gerekir. Kalan sıfırsa A sayısı b'nin tam katıdır ve “b, A'yı böler” anlamında b | A yazılır. Kalan sıfır değilse tam bölünmeden söz edilmez. Bölen sıfır olamaz.

$$A = b\cdot q + r;\ 0 \le r < b;\ b \mid A \Leftrightarrow r = 0$$

Anlamı: Bölünen, bölen ile tam sayı bölümün çarpımı ve kalanın toplamıdır; tam bölünmede kalan sıfırdır.

Koşullar: A, q ∈ ℤ; b ∈ ℤ ve b > 0; r ∈ ℤ. Negatif bölen varsa kalan aralığı için |b| kullanılır.

Örneğin 947 sayısı 12'ye bölündüğünde 12·78 = 936 ve 947 − 936 = 11 olur. Böylece 947 = 12·78 + 11 yazılır. 11, 0 ile 11 arasında ve 12'den küçük olduğundan uygun kalandır. Hesap ters yönde 936 + 11 = 947 ile doğrulanır. Buna karşılık “kalan 23” denilseydi 947 = 12·77 + 23 eşitliği sağlansa bile bu standart bir bölme sonucu olmazdı; çünkü 23 ≥ 12'dir. 23 = 12 + 11 olarak yeniden ayrıldığında bölüm 78, kalan 11 olur.

Negatif bölünende de kalan standart olarak negatif seçilmez. −29 sayısının 6 ile bölümünde −29 = 6·(−5) + 1 elde edilir; bölüm −5, kalan 1'dir. −29 = 6·(−4) − 5 eşitliği doğru olsa da −5 geçerli kalan aralığının dışındadır. Bölümü bir azaltıp kalanı 6 artırmak aynı sayıyı korur ve standart gösterime ulaştırır. Bu ayrım, özellikle negatif sayının “kalanı” değerlendirilirken gereklidir.

Bölme algoritmasında doğru bölüm ve kalan örnekleri

Bölünen	Pozitif bölen	Bölüm	Kalan	Kontrol
947	12	78	11	12·78 + 11 = 947
144	9	16	0	9·16 = 144
5	8	0	5	8·0 + 5 = 5
0	7	0	0	7·0 = 0
−29	6	−5	1	6·(−5) + 1 = −29

2. Onluk çözümleme bölünebilme kurallarını nasıl açıklar?

Basamak konusu gereği bir N doğal sayısı son rakamı d olmak üzere N = 10a + d şeklinde yazılabilir; a, birler basamağı çıkarıldığında kalan doğal sayıdır. 10'un katı olan 10a, 2 ve 5'e tam bölünür. Bu nedenle N'nin 2 veya 5'e bölünüp bölünmediğini yalnız d rakamı belirler. Benzer biçimde N = 100a + c gösteriminde c son iki basamağın oluşturduğu 0 ile 99 arasındaki sayıdır. 100, 4'ün ve 25'in katı olduğundan bu iki bölen için son iki basamak yeterlidir.

Bir sayıyı bölenin katı ile kalan toplamı olarak yazmak, sayının tamamını hesaplamak yerine daha küçük bir parçanın kalanını incelemeyi sağlar. Örneğin 63 418 = 100·634 + 18 olduğundan 4 ile bölümünden kalan, 18'in 4 ile bölümünden kalan olan 2'dir. Kontrol amacıyla 63 418 = 4·15 854 + 2 yazılır. Aynı rakam yöntemi bütün bölenler için kendiliğinden geçerli değildir: 3 ve 9 bakımından son rakam değil rakamların toplamı önem taşır.

$$N = 10a + d = 100b + c = 1000e + f$$

Anlamı: d son rakamı, c son iki basamağı, f son üç basamağı temsil eder; diğer parçalar ilgili 10 kuvvetlerinin katıdır.

Koşullar: N, a, b, e doğal sayıdır; $0 \le d \le 9$, $0 \le c < 100$, $0 \le f < 1000$.

3. Son rakamdan yararlanılan 2, 5 ve 10 kuralları

Birler basamağı 0, 2, 4, 6 veya 8 olan tam sayılar 2'ye; birler basamağı 0 veya 5 olan tam sayılar 5'e; birler basamağı 0 olan tam sayılar 10'a tam bölünür. Bunun nedeni 10'un her üç bölenin de katı olması ve son rakamın bölünebilirliği belirlemesidir. Son rakam 10'a bölünmeden elde edilen kalanı doğrudan verir. 2 ve 5 için ise son rakam uygun bölenle yeniden değerlendirilir.

Örneğin 48 735 sayısının birler basamağı 5'tir. Sayı 5'e bölünür; 10'a bölünmez ve 2'ye bölündüğünde 1 kalanını verir. Doğrudan hesapla 48 735 = 5·9 747, 48 735 = 10·4 873 + 5 ve 48 735 = 2·24 367 + 1 elde edilir. Böylece aynı son rakamdan üç farklı sonucun nasıl çıkarıldığı açıklanmış olur. Sayı negatif olsa da son rakamın çiftliği tam bölünme bakımından geçerlidir; kalan hesaplanırken ise standart $0 \le r < b$ aralığı korunur.

2, 5 ve 10 ile bölünebilme koşulları

Bölen	Tam bölünme koşulu	Kalanı belirleyen bilgi
2	Son rakam 0, 2, 4, 6, 8	Son rakamın 2 ile bölümünden kalan
5	Son rakam 0 veya 5	Son rakamın 5 ile bölümünden kalan
10	Son rakam 0	Son rakamın kendisi

4. Son iki veya üç basamağa bağlı 4, 8, 25 ve 125 kuralları

100 sayısı 4'e ve 25'e tam bölündüğü için son iki basamağın oluşturduğu sayı 4 veya 25'in katıysa bütün sayı da aynı bölenle tam bölünür. Bu kuralda son iki basamağın 00 olması da uygun bir kat durumudur: 00, sayı olarak 0'dır ve 0 her sıfırdan farklı tam sayıya bölünebilir. Benzer gerekçeyle 1000, 8 ve 125'in katıdır; bu iki bölen için son üç basamak incelenir. Daha kısa sayılarda sayı, eksik basamaklarına soldan sıfır eklenmiş gibi değerlendirilebilir; bu, sayının değerini değiştirmez.

Örneğin 62 736 sayısının son iki basamağı 36'dır ve 36 = 4·9 olduğundan sayı 4'e bölünür. Son üç basamağı 736'dır; 736 = 8·92 olduğundan 8'e de bölünür. Doğrudan kontrol 62 736 = 4·15 684 = 8·7 842 biçimindedir. Buna karşılık 92 154 sayısının son iki basamağı 54 olduğu için 4 ile bölümünden kalan 2, son üç basamağı 154 olduğu için 8 ile bölümünden kalan 2'dir. 92 154 = 4·23 038 + 2 = 8·11 519 + 2 işlemleri kalanı ayrı yoldan doğrular.

Onun kuvvetlerinin katı olan bölenler

Bölen	İncelenen son basamaklar	Gerekçe
4	Son iki basamak	100, 4'ün katıdır
25	Son iki basamak	100, 25'in katıdır
8	Son üç basamak	1000, 8'in katıdır
125	Son üç basamak	1000, 125'in katıdır
100	Son iki basamak	Son iki rakam 00 olmalıdır

Örneğin 15 625 sayısı 25'e tam bölünür; çünkü son iki basamağı 25'tir. Aynı sayı 125'e de tam bölünür; çünkü son üç basamağı 625 = 125·5'tir. Ters kontrolde 15 625 ÷ 25 = 625 ve 15 625 ÷ 125 = 125 bulunur. Son basamaklara bakma yöntemi, bölenin uygun bir 10 kuvvetini tam bölmesine dayanır; böyle bir ilişki bulunmadığında aynı kısayol uygulanamaz.

5. Rakamları toplamıyla 3 ve 9'a bölünebilme

10 sayısı 3 ile de 9 ile de bölündüğünde 1 kalanı verir. Bu nedenle 10'un bütün pozitif tam sayı kuvvetleri de 3'e ve 9'a göre 1 ile aynı kalanı verir. Bir doğal sayı rakamlarının 10 kuvvetleriyle çarpımlarının toplamı olduğundan, 3 ve 9 ile bölümünden kalan rakamları toplamının aynı bölenle bölümünden kalana eşittir. Böylece sayının bütün rakamlarının toplamı 3'ün katıysa sayı 3'e; 9'un katıysa 9'a tam bölünür.

73 524 sayısının rakamları toplamı 7 + 3 + 5 + 2 + 4 = 21'dir. 21, 3'e tam bölünür fakat 9 ile bölümünden kalan 3'tür. Dolayısıyla 73 524 sayısı 3'e bölünür, 9'a bölünmez ve 9 ile bölümünden kalan 3'tür. Ters hesap 73 524 = 3·24 508 ve 73 524 = 9·8 169 + 3 eşitlikleriyle doğrulanır. Rakamları toplamının kendisi, kalanın yerine otomatik yazılamaz: 21 sayı olarak 9'dan büyük olduğu için geçerli 9 kalanı değildir.

$$N \equiv (\text{rakamların toplamı}) \pmod 3;\ N \equiv (\text{rakamların toplamı}) \pmod 9$$

Anlamı: N sayısı ve rakamları toplamı 3'e veya 9'a bölündüğünde aynı kalanı verir; ≡ işareti ilgili bölene göre kalan eşitliğini anlatır.

Koşullar: N doğal sayıdır. Geçerli kalan 0 ile bölenin bir eksiği arasındadır.

Rakam toplamı kurallarının farklı sonuçları

Sayı	Rakam toplamı	3'e bölümden kalan	9'a bölümden kalan
73 524	21	0	3
5 418	18	0	0
2 467	19	1	1
999 999	54	0	0

6. 11 ile bölünebilme ve dönüşümlü rakam toplamı

11 ile bölünebilme kuralı, 10'un 11 ile bölümünden kalan açısından −1'e denk olmasına dayanır. Bu nedenle 10'un kuvvetleri, 11'e göre sırayla +1 ve −1 ile aynı kalanı verir. Bir doğal sayının birler basamağından başlayarak rakamlara sırayla +, −, +, − işaretleri uygulanır; bulunan işaretli toplam 11'in katıysa sayı 11'e bölünür. İşaretli toplamın kendisi negatif veya 11'den büyük olabilir. Böyle bir durumda kalan, 11'in uygun katı eklenip çıkarılarak 0 ile 10 arasında belirlenir.

Örneğin 7 352 sayısında sağdan sola rakamlar 2, 5, 3 ve 7'dir. Dönüşümlü toplam 2 − 5 + 3 − 7 = −7 olur. −7 + 11 = 4 olduğundan sayının 11 ile bölümünden kalan 4'tür. Bağımsız kontrol 7 352 = 11·668 + 4 eşitliğidir. Buna karşılık 4 752 için işaretli toplam 2 − 5 + 7 − 4 = 0 olur; 4 752 = 11·432 olduğundan bu sayı 11'e tam bölünür.

$$N = \ldots abcd \Rightarrow N \equiv d - c + b - a + \ldots \pmod{11}$$

Anlamı: Sağdan başlayarak rakamların dönüşümlü işaretli toplamı, 11 ile aynı kalanı verir.

Koşullar: Rakamların konumu korunur. Negatif toplamlar $0 \le r < 11$ koşuluna getirilir.

11 ile bölümde işaretli toplamın yorumlanması

Sayı	Sağdan dönüşümlü toplam	11'e bölümden kalan
7 352	2 − 5 + 3 − 7 = −7	4
4 752	2 − 5 + 7 − 4 = 0	0
121	1 − 2 + 1 = 0	0
1 234	4 − 3 + 2 − 1 = 2	2

7. Birden fazla bölünebilme kuralını birlikte kullanma

Bir sayının 6'ya tam bölünebilmesi için hem 2'ye hem 3'e tam bölünmesi yeterli ve gereklidir. Benzer biçimde 12 için 3 ve 4; 15 için 3 ve 5; 18 için 2 ve 9; 24 için 3 ve 8; 36 için 4 ve 9 koşulları birlikte kullanılabilir. Bu birleşimlerde seçilen iki bölenin aralarında asal olması önemlidir. Çünkü aralarında asal iki pozitif tam sayının her ikisine bölünebilen sayı, bu sayıların çarpımına da bölünebilir. Bu ilişkinin asal çarpanlar ve EKOK üzerinden genel açıklaması GY-01.06'da yapılacaktır.

Örneğin 468 sayısı çifttir ve rakamları toplamı 4 + 6 + 8 = 18'dir; dolayısıyla 6 ile bölünür. Son iki basamağı 68, 4'ün katı ve rakamları toplamı 3'ün katı olduğundan 12 ile de bölünür. Ayrıca 68, 4'ün katı ve rakamları toplamı 9'un katı olduğu için 36 ile de bölünür. Bağımsız doğrulama 468 = 6·78 = 12·39 = 36·13 eşitlikleridir. Aynı sayı 24'e ise tam bölünmez; çünkü son üç basamağın kendisi olan 468, 8 ile bölümünden 4 kalanını verir.

İki bölen aralarında asal değilse yalnız her ikisine bölünme bilgisinden çarpımlarına bölünme sonucu çıkarılamaz. Örneğin 12 sayısı hem 4'e hem 6'ya bölünür, fakat 4·6 = 24'e bölünmez. Bunun nedeni 4 ve 6'nın ortak 2 çarpanını paylaşmasıdır. Bu nedenle “iki sayıya ayrı ayrı bölünüyorsa çarpımlarına da bölünür” ifadesi koşulsuz doğru değildir.

Birleşik bölünebilme denetimleri

Hedef bölen	Birlikte aranan koşullar	Ayırt edici nokta
6	2 ve 3	Son rakam çift; rakam toplamı 3'ün katı
12	3 ve 4	Rakam toplamı 3'ün; son iki basamak 4'ün katı
15	3 ve 5	Rakam toplamı 3'ün katı; son rakam 0 veya 5
18	2 ve 9	Son rakam çift; rakam toplamı 9'un katı
24	3 ve 8	Rakam toplamı 3'ün; son üç basamak 8'in katı
36	4 ve 9	Son iki basamak 4'ün; rakam toplamı 9'un katı

8. 7 ile bölünebilme için son rakamı kullanma

7 ile bölünebilme, son bir veya iki basamağa ilişkin önceki kurallarla aynı biçimde belirlenmez. Bir doğal sayı N = 10a + b şeklinde yazıldığında a son rakamı çıkarılmış sayı, b birler basamağıdır. Bu sayının 7'ye tam bölünebilmesi ile a − 2b sayısının 7'ye tam bölünebilmesi birbirine denktir. Çünkü 10(a − 2b) = (10a + b) − 21b olur. Sağ tarafta N sayısı ile 7'nin katı olan 21b'nin farkı yer alır. Ayrıca 10 ve 7 aralarında asal olduğundan 7'nin 10(a − 2b)'yi bölmesi, a − 2b'yi bölmesiyle aynı koşulu verir.

Örneğin 329 sayısı için a = 32 ve b = 9 seçilir. a − 2b = 32 − 18 = 14 bulunur; 14 sayısı 7'nin katı olduğundan 329 da 7'ye tam bölünür. Kontrol 329 = 7·47'dir. 203 sayısında 20 − 2·3 = 14 olduğundan yine 7'ye tam bölünme görülür; 203 = 7·29 bunu doğrular. Yöntem gerektiğinde indirgenen yeni sayıya yeniden uygulanabilir.

$$7 \mid (10a + b) \Leftrightarrow 7 \mid (a - 2b)$$

Anlamı: Son rakamın iki katını, son rakamı çıkarılmış sayıdan çıkarmak 7'ye tam bölünme durumunu korur.

Koşullar: a doğal sayı, 0 ≤ b ≤ 9. Bu eşdeğerlik tam bölünme içindir; indirgenen ifadenin 7 ile bölümünden kalan, ilk sayının kalanı olmak zorunda değildir.

7 ile kalan konusunda önemli ayrım 7 için a − 2b dönüşümü yalnız tam bölünmeyi doğrudan korur. Örneğin 543 sayısı için 54 − 2·3 = 48 ve 48'in 7 ile bölümünden kalan 6'dır; oysa 543 = 7·77 + 4 olduğundan 543'ün kalanı 4'tür. Bu iki kalanı eşitlemek yanlıştır.

9. Toplama, çıkarma, çarpma ve kuvvetlerde kalan hesabı

Aynı pozitif b sayısıyla bölündüğünde iki tam sayının kalanları biliniyorsa toplam, fark ve çarpımlarının kalanı doğrudan bu kalanlardan bulunabilir. A = bq + r ve B = bt + s eşitlikleri toplandığında A + B = b(q + t) + (r + s) çıkar. Böylece toplamın b ile bölümünden kalan, r + s toplamının b'ye bölümünden kalandır. Çıkarma ve çarpmada da aynı ilke uygulanır. Bulunan ara değer negatif veya b'ye eşit ya da büyükse, 0 ≤ kalan < b olacak şekilde düzenlenir.

Örneğin A'nın 7 ile bölümünden kalan 5, B'nin 7 ile bölümünden kalan 6 olsun. Bu durumda A + B için 5 + 6 = 11 ve 11'in 7 ile bölümünden kalan 4 olduğundan sonuç 4'tür. A − B için 5 − 6 = −1 elde edilir; −1 + 7 = 6 geçerli kalandır. A·B için 5·6 = 30 bulunur; 30'un 7 ile bölümünden kalan 2'dir. Bağımsız sayısal kontrol olarak

A = 26 ve B = 34 seçilirse 26 + 34 = 60 = 7·8 + 4, 26 − 34 = −8 = 7·(−2) + 6 ve 26·34 = 884 = 7·126 + 2 sonuçları elde edilir.

$$A \equiv r \pmod b,\ B \equiv s \pmod b \Rightarrow A + B \equiv r+s;\ A - B \equiv r-s;\ A \cdot B \equiv r \cdot s \pmod b$$

Anlamı: Aynı pozitif bölen için aritmetik işlemlerde sayılar yerlerine kalanlarıyla temsil edilebilir.

Koşullar: A, B, r, s tam sayılar; b pozitif tam sayıdır. Son kalan 0 ≤ kalan < b biçiminde düzenlenir. Bölme işlemine bu kural koşulsuz uygulanamaz.

Kuvvet için de benzer durum vardır: A'nın b ile bölümünden kalan r ise A'nın pozitif tam sayı kuvveti ile r'nin aynı kuvveti b'ye göre eşit kalanlıdır. Örneğin 13 sayısı 5'e bölündüğünde 3 kalanını verir. 13^2 sayısının kalanı, 3^2 = 9'un 5 ile bölümünden kalan 4'tür. Ters kontrol 13^2 = 169 = 5·33 + 4 eşitliğidir. Kalanları kullanmak büyük üsleri doğrudan hesaplamadan sonuç bulmayı sağlayabilir; ancak kalan kuralı, bölenin sıfırdan farklı olması zorunluluğunu ortadan kaldırmaz.

7 ile bölümden kalanları 5 ve 6 olan sayıların işlemleri

İşlem	Kalanlar üzerinden ara değer	Geçerli kalan	Kontrol örneği
Toplama	5+6=11	4	26+34=60=7·8+4
Çıkarma	5−6=−1	6	26−34=−8=7·(−2)+6
Çarpma	5·6=30	2	26·34=884=7·126+2

10. Bilinmeyen rakam içeren sayılarda koşulların birlikte değerlendirilmesi

Bazı sayı gösterimlerinde rakamlar a ve b gibi harflerle verilir. Bu harflerin 0 ile 9 arasındaki tam sayı değerleri ifade ettiği ve sayının ilk rakamının sıfır olamayacağı unutulmamalıdır. Birden fazla bölünebilme koşulu verildiğinde önce olası rakam değerlerini en çok sınırlayan koşul incelenir. Son rakama bağlı 2, 5 ve 10 kuralları çoğu zaman ilk uygun adımdır; ardından 3 veya 9 için rakam toplamı, 4 veya 8 için son basamaklar kullanılır. Elde edilen bütün adaylar başlangıçtaki koşulların tamamına yeniden uygulanmalıdır.

Örneğin 5a3b dört basamaklı doğal sayısı hem 5'e hem 9'a tam bölünsün. 5'e bölünme için b = 0 veya b = 5 olmalıdır. Rakamlar toplamı 5+a+3+b = 8+a+b'dir. b = 0 iken 8+a'nın 9'un katı olması a = 1 değerini verir; sayı 5130 olur. b = 5 iken 13+a'nın 9'un katı olması a = 5 değerini verir; sayı 5535 olur. İki sayının da son rakamı 0 veya 5'tir ve rakam toplamları sırasıyla 9 ile 18'dir. Ayrıca 5130 = 45·114, 5535 = 45·123 olduğundan her iki sayının hem 5 hem 9 ile bölündüğü bağımsız işlemle de görülür. Bu örnekte bütün olası rakam çiftleri değerlendirilmiştir.

Başka bir örnekte 6a4 sayısının 12'ye tam bölünmesi için 3'e ve 4'e bölünmesi gerekir. Son iki basamak a4'ün 4'e tam bölünmesi için a çift rakam olmalıdır: 0, 2, 4, 6 veya 8. Rakamlar toplamı 6+a+4 = 10+a'nın 3'ün katı olması gerektiğinden bu adaylar arasından yalnız a = 2 ve a = 8 kalır. Elde edilen 624 = 12·52 ve 684 = 12·57 eşitlikleri hesapları doğrular. Her iki koşulu birden taşımayan rakamlar elenir; yalnız bir koşula uymak yeterli değildir.

Rakam koşullarından elde edilen özgün öğretici örnekler

Sayı gösterimi	İstenen tam bölünme	Geçerli rakamlar	Oluşan sayılar
5a3b	5 ve 9	(a,b) = (1,0), (5,5)	5130, 5535
6a4	12	a = 2, 8	624, 684

11. Birden fazla kalanın birlikte verildiği durumlar

Bir tam sayının iki farklı pozitif bölenle bölünmesinden kalanlar biliniyorsa her koşul ayrı bir eşitlikle ifade edilir. Örneğin N sayısının 3 ile bölümünden kalan 2, 4 ile bölümünden kalan 1 olsun. Bu durumda N = 3a + 2 ve N = 4b + 1 biçimleri geçerlidir; a ve b tam sayıdır. Koşullar aynı sayıyı tanımladığı için birlikte sağlanmalıdır. 4 ile bölündüğünde 1 kalanını veren sayılar 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, ... şeklinde incelenebilir. Bunlardan 3 ile bölümünden kalan 2 olanlar 5, 17, 29, ... biçimindedir; aralarındaki fark 12'dir.

Bu dizinin bütün tam sayı çözümleri N = 12k + 5 biçiminde gösterilebilir. N'nin pozitif olması ayrıca istenirse k değerleri buna göre sınırlandırılır. Kontrol için k = 2 seçildiğinde N = 29 elde edilir ve 29 = 3·9 + 2 = 4·7 + 1 eşitlikleri bulunur. Ayrıca 12k + 5 sayısı 3'e bölündüğünde 12k tam bölündüğü için 2, 4'e bölündüğünde 12k + 4 tam bölündüğü için 1 kalanını verir. Bu ikinci çözüm, tek tek örneklerle yetinmeyip bütün sayıların koşulları sağladığını gösterir.

$$N = 12k + 5 \Rightarrow N \equiv 2 \pmod 3,\ N \equiv 1 \pmod 4$$

Anlamı: Aynı sayının farklı bölenlere göre kalan koşulları ortak bir tam sayı ifadesinde karşılanabilir.

Koşullar: $k \in \mathbb{Z}$. N doğal sayı istenirse $N \geq 0$ koşulu ayrıca değerlendirilir.

Bu yöntemi uygularken kalanların her biri kendi böleninden küçük olmalıdır. Örneğin “4 ile bölümünden kalan 5” ifadesi standart bölme algoritmasına aykırıdır. Aynı şekilde iki kalan koşulunun her zaman birbirinden bağımsız olduğu da varsayılamaz; örneğin bir sayı 4'e tam bölünüyorsa 2 ile bölümünden kalan kesinlikle 0'dır. Kalanlarla kurulan sayısal ifadelerin anlamı, belirtilen bölenlere göre kontrol edilerek korunur.

12. Özel durumlar, yanlış genellemeler ve sonuç denetimi

Sıfır, her sıfırdan farklı tam sayının katıdır: 0 = b·0 olduğundan b ≠ 0 için 0, b'ye tam bölünür. Bununla birlikte sıfıra bölme tanımsızdır; “0 bütün sayılara bölünür” ifadesi, bölen 0 olamayacağı belirtilmeden kullanılmamalıdır. Bir de her tam sayının 1'e tam bölündüğü görülür; çünkü A = 1·A'dır. Negatif sayıların tam bölünebilme özellikleri işaretin değişmesiyle kaybolmaz: −48, 6'ya tam bölünür; −48 = 6·(−8) eşitliği bunu gösterir.

Bölünebilme kurallarında tam bölünme ile kalan bulma birbirinden ayrılmalıdır. Birler basamağının 5 olması, sayının 5 ile bölümünden kalanının 5 olduğu anlamına gelmez; 5 ile bölümünden kalan zaten 0'dır. Rakamları toplamının 21 olması, 9 ile bölümünden kalanın 21 olduğu anlamına gelmez; kalan 3'tür. 7 için son rakam dönüştürme yöntemi tam bölünmeyi korur ancak kalanın sayısal değerini korumak zorunda değildir. 11 kuralında işaretli rakam toplamı negatif çıkarsa geçerli aralığa getirilir. Birleşik kurallarda ortak bölen içeren sayılar için çarpım sonucu kendiliğinden çıkarılamaz.

Bir sonucu denetlemenin en güvenilir yolu, bölünen = bölen·bölüm + kalan eşitliğinin yeniden sağlanması ve kalanın doğru aralıkta bulunmasıdır. Örneğin 1 249 sayısının 8 ile bölümünden kalan, son üç basamağı 249'un 8 ile bölümünden kalan olan 1'dir. Doğrudan 1 249 = 8·156 + 1 hesabı aynı sonucu verir; 1, 8'den küçüktür. Böylece basamak kuralıyla bulunan sonuç, bölme algoritmasıyla ayrıca doğrulanmış olur. Bölünebilme ve kalan kuralları, bir sayıyı herhangi bir tam sayıya bölmenin yerine geçen evrensel bir ezber listesi değil, onluk yazımın özelliklerinden yararlanan gerekçeli matematiksel araçlardır. Sonraki bölümde asal çarpanlar, EBOB ve EKOK kullanılarak bu ilişkiler daha genel bir yapı içinde ele alınacaktır.

Bölme ve kalan için temel koşullar Bölen sıfır olamaz; standart kalan negatif değildir ve pozitif bölenin kendisinden küçüktür. Kalan sıfırsa tam bölünme vardır. Aynı bölen için kalanlar toplama, çıkarma ve çarpmada kullanılabilir ancak kalanların doğrudan bölünmesine ilişkin genel bir kural yoktur.

KONU 1.6

ASAL ÇARPANLARA AYIRMA, EBOB VE EKOK

Bir doğal sayının hangi asal sayılardan oluştuğunu belirlemek, yalnızca çarpma işleminin tersini yapmak değildir. Asal çarpanlara ayırma, bir sayının bölen yapısını görünür kılar ve sayıların ortak bölenleriyle ortak katlarını düzenli biçimde incelemeyi sağlar. En büyük ortak bölen (EBOB), birden fazla miktarı eşit büyüklükte ve artıksız parçalara ayırmanın; en küçük ortak kat (EKOK) ise farklı tam sayı katlarını ilk kez aynı değerde buluşturmanın matematiksel temelidir. Önceki bölümde öğrenilen bölünebilme kuralları bu hesapların araçlarıdır; burada amaç her adımın hangi koşulda doğru olduğunu anlayarak sonucun güvenilirliğini denetlemektir.

1. Asal çarpan ve asal çarpanlara ayırma

Bir pozitif tam sayıyı kalansız bölen asal sayılar o sayının asal çarpanlarıdır. Örneğin 42 = 2·3·7 olduğundan 42'nin asal çarpanları 2, 3 ve 7'dir. 6 sayısı 42'yi bölebilir; fakat 6 asal olmadığı için “asal çarpan” olarak listelenmez. Bir sayının birbirinden farklı asal çarpanlarını belirtmek ile asal sayıların tekrarlı çarpımını yazmak da ayrı şeylerdir: 72 sayısının farklı asal çarpanları yalnız 2 ve 3'tür, ancak 72 = 2·2·2·3·3 şeklinde toplam beş asal çarpan kullanılarak yazılır.

1'den büyük her doğal sayı, asal sayıların çarpımı olarak yazılabilir. Asal çarpanların çarpımdaki sırası dışında bu gösterim tektir. Buna aritmetiğin temel teoremi denir. Örneğin 60 sayısı 2·2·3·5 veya 5·3·2·2 biçiminde yazılabilir; çarpanların sırası değişse bile asal sayıların hangileri olduğu ve kaç kez bulundukları değişmez. Bu teklik, EBOB ve EKOK hesaplarının rastlantısal değil, her sayı için tutarlı olmasının dayanağıdır.

1 sayısı asal olmadığı ve 1'den büyük herhangi bir asal çarpanı bulunmadığı için asal çarpanlara ayırmada özel bir sınır durumudur; boş çarpımın değeri 1 kabul edilir. 0'ın ise 1'den büyük doğal sayılar gibi sonlu ve tek bir asal çarpanlara ayrılışı yoktur. Negatif tam sayılar için işaret ayrı tutulur: −84 = −1·2²·3·7. EBOB ve EKOK hesaplarında esas alınan asal çarpanlar pozitif sayıların çarpanlarıdır.

$$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$$

Anlamı: 1'den büyük bir doğal sayı, birbirinden farklı asal sayıların pozitif tam sayı kuvvetlerinin çarpımı olarak tek biçimde yazılır.

Koşullar: $N > 1$; $p_1,\ldots,p_k$ farklı asal sayılardır; $a_1,\ldots,a_k$ pozitif tam sayıdır. Sıra değişebilir ancak üsler ve asal çarpanlar değişmez.

Asal çarpanların iki ayrı anlamı

Sayı	Asal sayıların çarpımı	Üslü gösterim	Farklı asal çarpanlar
42	2·3·7	2·3·7	2, 3, 7
72	2·2·2·3·3	$2^3 \cdot 3^2$	2, 3
150	2·3·5·5	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	2, 3, 5
121	11·11	11^2	Yalnız 11

2. Bölme yöntemiyle asal çarpanlara ayırma

Bölme yönteminde sayı, onu tam bölen en küçük uygun asal sayılardan başlayarak art arda bölünür. Her adımda yeni bölüm elde edilir; bölüm 1 olduğunda durulur. Sağ tarafta kullanılan asal bölenlerin çarpımı başlangıçtaki sayıya eşit olmalıdır. Bir asal böleni atlamak sonucu mutlaka bozmaz, fakat küçükten büyüğe sıralama işlem denetimini kolaylaştırır. Önceki bölümdeki bölünebilme kuralları hangi asalla bölmeye başlanacağını belirler.

Örneğin 756, çift olduğu için 2'ye bölünür: 756 ÷ 2 = 378, ardından 378 ÷ 2 = 189. Artık tek olan 189'un rakamları toplamı 1+8+9 = 18 olduğundan 3'e bölünür; 189 ÷ 3 = 63, 63 ÷ 3 = 21 ve 21 ÷ 3 = 7 olur. 7 asal sayı olduğu için 7 ÷ 7 = 1 ile işlem biter. Kullanılan bölenler 2, 2, 3, 3, 3, 7'dir; sonuç 756 = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ biçimindedir. Bağımsız kontrol 4·27·7 = 108·7 = 756 hesabıdır.

756 sayısının adım adım asal çarpanlara ayrılması

Bölünen	Kullanılan asal bölen	Elde edilen bölüm
756	2	378
378	2	189
189	3	63
63	3	21
21	3	7
7	7	1

Bölme işleminde çıkan sayı henüz asal olmayabilir. Örneğin 84 = 4·21 yazılması doğru bir çarpanlara ayırmadır; ancak 4 ve 21 bileşik olduğu için asal çarpanlara ayırma tamamlanmış değildir. 4 = 2^2 ve 21 = 3·7 yazıldığında 84 = $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ elde edilir. Ters çarpım 4·3·7 = 84'tür. Çarpan ağacı yöntemi de aynı ilkeyle çalışır: Her bileşik çarpan asal sayılara ayrılana kadar süreç sürdürülür.

3. Üslü asal çarpan gösterimi ve pozitif bölenler

Üslü asal çarpan gösterimi, bir sayının bütün pozitif bölenlerini sistematik olarak belirlemeyi sağlar. Bir pozitif bölen, başlangıç sayısının asal çarpanlarından herhangi birini başlangıçtaki üst sınırı aşmadan kullanabilir. Örneğin 180 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$'tir. 180'in bir böleni 2'yi sıfır, bir veya iki kez; 3'ü sıfır, bir veya iki kez; 5'i sıfır veya bir kez içerebilir. Bu seçimlerin her birleşimi 180'in pozitif bölenlerinden tam birini üretir.

180'in pozitif bölen sayısı (2+1)(2+1)(1+1) = 3·3·2 = 18'dir. Bu sayı, bütün bölenlerin tek tek listelenmesine gerek kalmadan elde edilir. Ayrı denetim için bölenler 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90 ve 180 olarak sıralanabilir; gerçekten 18 farklı değer vardır. Her biri 180'i tam böler. Burada “farklı asal çarpan sayısı” 3 iken “pozitif bölen sayısı” 18'dir; bu iki ölçü karıştırılmamalıdır.

$$N = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \Rightarrow \text{pozitif bölen sayısı} = (a_1+1)\dots(a_k+1)$$

Anlamı: Her asal sayının bölen içinde bulunma üssü 0'dan N'deki en yüksek üsse kadar bağımsız seçilir.

Koşullar: $N > 1$; p_i farklı asal sayılar, a_i pozitif tam sayılardır. $N = 1$ için tek pozitif bölen 1'dir.

Bölen sayısı ve 1'in durumu Asal çarpanlara ayırmada aynı asal sayının tekrar etmesi, farklı asal çarpan sayısını artırmaz; pozitif bölen sayısını etkiler. 1'in tek pozitif böleni 1'dir. Sıfırın pozitif bölenlerinin sayısı sonlu değildir; bu formül sıfır için kullanılmaz.

4. En büyük ortak bölenin tanımı ve bölenleri karşılaştırma

İki veya daha fazla tam sayıdan en az biri sıfırdan farklıysa bu sayıların pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne en büyük ortak bölen, kısaca EBOB denir. Pozitif doğal sayılarda bir sayının pozitif bölenleri, onu kalansız bölen pozitif tam sayılardır. EBOB(a,b) gösterimindeki a ve b, ortak böleni aranan sayıları belirtir. EBOB sonuç olarak pozitif tam sayıdır; iki sayının birbirine yakın veya birbirinden uzak olması tek başına EBOB'u belirlemez.

Örneğin 54'ün pozitif bölenleri 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54; 90'ın pozitif bölenleri 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90'dır. Ortak bölenler 1, 2, 3, 6, 9 ve 18'dir; en büyüğü 18'dir. Dolayısıyla EBOB(54,90) = 18'dir. İkinci bir kontrol, 54 = 18·3 ve 90 = 18·5 yazılmasıdır. 3 ve 5 aralarında asal olduğundan 18'den daha büyük ortak pozitif bölen bulunamaz.

54 ve 90 sayılarının ortak bölenleri

Sayı	Pozitif bölenlerden seçilmiş örnekler	Ortaklık ve sonuç
54	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54	1, 2, 3, 6, 9, 18 ortaktır
90	1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90	1, 2, 3, 6, 9, 18 ortaktır
EBOB(54,90)	18	İki sayının en büyük ortak pozitif böleni

5. Asal çarpanların küçük üsleriyle EBOB bulma

Bütün bölenleri tek tek sıralamak büyük sayılarda verimsizleşir. Asal çarpanlara ayrılışta ise bir bölenin bütün sayıları tam bölmesi için her asal çarpanı, sayılardan hiçbirinde bulunan üsten daha yüksek bir üsse çıkarılmamalıdır. Bu nedenle EBOB oluşturulurken yalnız bütün sayılarda ortak olan asal sayılar alınır ve her birinin en küçük üssü seçilir. Ortak olmayan asal sayılar EBOB'a girmez.

Örneğin $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ ve $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ olarak ayrılır. İki sayıda ortak asallar 2, 3 ve 7'dir. 2 için üsler 2 ve 1 olduğundan küçük olan 1; 3 için 1 ve 2 olduğundan küçük olan 1; 7 için iki tarafta da 1 seçilir. Böylece EBOB(84,126) = 2·3·7 = 42 elde edilir. Kontrol 84 = 42·2 ve 126 = 42·3 hesabıdır; 2 ve 3 aralarında asaldır, dolayısıyla 42 daha büyük bir ortak bölenle değiştirilemez.

$$\text{EBOB}(a,b) = \prod p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}$$

Anlamı: Asal p'nin a ve b sayılarındaki üslerinden küçük olanı EBOB'a alınır.

Koşullar: a,b pozitif tam sayılardır; bir sayıda bulunmayan asalın üssü 0 kabul edilir. Çarpım bütün ilgili asallar üzerinde yapılır.

84 ve 126 için asal üslerin karşılaştırılması

Asal	84'teki üs	126'daki üs	EBOB'daki küçük üs
2	2	1	1
3	1	2	1
7	1	1	1
Sonuç	84	126	42

6. En küçük ortak katın tanımı ve büyük üslerle hesaplama

İki veya daha fazla pozitif tam sayının her birine tam bölünebilen pozitif sayıların en küçüğüne en küçük ortak kat, kısaca EKOK denir. Ortak katlar sonsuz sayıda olabilir; EKOK bunların en küçüğünü seçer. Örneğin 12'nin pozitif katları 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...; 18'inkiler 18, 36, 54, 72, ... biçimindedir. Her iki dizide ilk ortak değer 36 olduğundan EKOK(12,18) = 36'dır. Bunun denetimi 36 ÷ 12 = 3 ve 36 ÷ 18 = 2 işlemleridir; daha küçük bir pozitif ortak kat bulunmadığı dizilerden de görülür.

Bir ortak katın, verilen her sayının bütün asal kuvvetlerini içermesi gerekir. Bu nedenle asal çarpanlar karşılaştırıldığında bu kez ortak asalların büyük üssü ve yalnız bir sayıda bulunan asalların tamamı seçilir. 84 = $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ ve 126 = $2 \cdot 3^2 \cdot 7$ olduğundan EKOK(84,126) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ = 4·9·7 = 252'dir. 252 = 84·3 = 126·2 eşitlikleri ortak kat olduğunu kanıtlar. Bu üslerden herhangi biri küçültülse 84 veya 126'dan en az birini bölen bir kat elde edilemez; bu nedenle 252 en küçük ortak kattır.

$$\text{EKOK}(a,b) = \prod p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

Anlamı: Asal p'nin verilen sayılardaki üslerinden büyük olanı EKOK'a alınır; yalnız birinde bulunan asallar da dahil edilir.

Koşullar: a,b pozitif tam sayılardır; bulunmayan asalın üssü 0 sayılır.

Aynı asal üslere göre EBOB ve EKOK ayrımı

Asal	84	126	EBOB için	EKOK için
2	2^2	2^1	2^1	2^2
3	3^1	3^2	3^1	3^2
7	7^1	7^1	7^1	7^1
Sonuç	84	126	42	252

7. Birden fazla sayının eş zamanlı asal bölünmesi

Sayılar yan yana yazılıp asal sayılarla aşamalı bölünerek EBOB ve EKOK birlikte hesaplanabilir. Bir asal bölen, sayılardan en az birini tam bölüyorsa ilgili sayılar bölünür; tam bölünmeyenler o aşamada değişmeden kalır. İşlem bütün sayılar 1 olana dek sürdürülür. Kullanılan asal bölenlerin tamamının çarpımı EKOK'u verir. EBOB ise yalnız bütün sayıların aynı aşamada bölündüğü asal bölenler çarpılarak bulunur. Bu ayrım, hangi asal bölenin tek bir sayıya, hangisinin tüm sayılara ait olduğunu görünür kılar.

Örneğin 72 ve 120 için iki sayı da başlangıçta 2'ye bölünür: 36 ve 60 olur. İkinci 2 ile 18 ve 30; üçüncü 2 ile 9 ve 15 elde edilir. Ardından ikisi de 3'e bölünerek 3 ve 5 bulunur. Sonraki 3 yalnız birinci sayıyı 1'e indirir; 5 ise yalnız ikinci sayıyı 1'e indirir. Her iki sayıyı birlikte bölen 2, 2, 2 ve 3'ün çarpımı EBOB(72,120) = 24'tür. Kullanılan bütün asal bölenlerin çarpımı 2·2·2·3·3·5 = 360 olduğundan EKOK(72,120) = 360'tır. Kontroller 72 ÷ 24 = 3, 120 ÷ 24 = 5; 360 ÷ 72 = 5 ve 360 ÷ 120 = 3'tür.

72 ve 120'nin eş zamanlı asal bölünmesi

İlk sayı	İkinci sayı	Kullanılan asal bölen	Her iki sayı da bölündü mü?
72	120	2	Evet; yeni sayılar 36, 60
36	60	2	Evet; yeni sayılar 18, 30
18	30	2	Evet; yeni sayılar 9, 15
9	15	3	Evet; yeni sayılar 3, 5
3	5	3	Hayır; yeni sayılar 1, 5
1	5	5	Hayır; yeni sayılar 1, 1

Bu yöntemde “aynı satırda görünen asal böleni iki sayı da taşıyor” varsayımı yapılmamalıdır. Bölme işleminin hangi sayılara uygulandığı ayrı kaydedilir. Aynı sayılar önce asal çarpanlara ayrıldığında $72 = 2^3 \cdot 3^2$ ve $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ olur. Küçük üsler $2^3 \cdot 3 = 24$; büyük üsler $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ sonucunu verir. İki bağımsız yöntem aynı sayıya ulaştığından işlem sırasının doğru olduğu desteklenir.

8. Öklid algoritmasıyla EBOB hesaplama

Asal çarpanlara ayırma, çok büyük sayılar için zaman alabilir. Öklid algoritması, ortak bölenlerin bölme işleminden kalanla aynı kaldığı ilkesini kullanır. A = bq + r eşitliğinde A ve b'nin her ikisini bölen her sayı, r = A − bq farkını da böler. Tersine b ile r'yi birlikte bölen sayı, A = bq + r toplamını da böler. Bu nedenle A ile b'nin pozitif ortak bölenleri, b ile r'nin pozitif ortak bölenleriyle aynıdır. Dolayısıyla EBOB(A,b) = EBOB(b,r) olur.

Örneğin 252 ve 198 sayılarından başlanır: 252 = 198·1 + 54, dolayısıyla EBOB(252,198) = EBOB(198,54) olur. Ardından 198 = 54·3 + 36; 54 = 36·1 + 18; 36 = 18·2 + 0 bulunur. Sıfır olmayan son kalan 18 olduğundan EBOB(252,198) = 18'dir. Bağımsız kontrol 252 = 18·14 ve 198 = 18·11 biçimindedir. 14 ve 11 aralarında asal olduğundan 18 daha büyük ortak bölenle değiştirilemez.

$$A = bq + r \Rightarrow \text{EBOB}(A,b) = \text{EBOB}(b,r)$$

Anlamı: Bölme işleminde kalan, iki sayının ortak bölenlerini değiştirmez; sıfır olmayan son kalan EBOB'dur.

Koşullar: A ve b tam sayıdır; $b > 0$, $0 \le r < b$. İşlem sıfır kalanına varana kadar yinelenir.

252 ile 198 sayılarının Öklid algoritması

Bölünen	Bölen	Bölüm	Kalan
252	198	1	54
198	54	3	36
54	36	1	18
36	18	2	0
EBOB	18	Son sıfır olmayan kalan	18

9. İki sayı için EBOB ile EKOK arasındaki çarpım bağıntısı

İki pozitif tam sayı için EBOB ile EKOK'un çarpımı, o iki sayının çarpımına eşittir. Bu özellik asal çarpanların üslerinden anlaşılır: Bir asalın iki sayıdaki üsleri α ve β ise EBOB'a min(α,β), EKOK'a max(α,β) üssü girer. Bu iki üssün toplamı α+β'dir; dolayısıyla EBOB·EKOK çarpımında asalın toplam üssü, sayıların çarpımındaki toplam üssüne eşit olur. Bütün asallar için aynı durum geçerlidir.

84 ve 126 için EBOB = 42, EKOK = 252 bulunmuştu. EBOB·EKOK = 42·252 = 10 584 ve sayıların çarpımı 84·126 = 10 584'tür. Bu eşitlik, 252 sayısının gerçekten EKOK olarak seçildiğini ikinci yöntemle denetler. Öklid algoritmasından EBOB(252,198) = 18 bulunduğuna göre EKOK(252,198) = (252·198)/18 = 14·198 = 2 772 olur. Ters kontrolde 2 772/252 = 11, 2 772/198 = 14 ve 18·2 772 = 49 896 = 252·198 hesapları doğrulanır.

$$\text{EBOB}(a,b) \cdot \text{EKOK}(a,b) = a \cdot b$$

Anlamı: İki pozitif tam sayının çarpımı, en büyük ortak bölenleriyle en küçük ortak katlarının çarpımına eşittir.

Koşullar: a,b pozitif tam sayılardır. Üç veya daha fazla sayı için aynı iki terimli çarpım bağıntısı genel olarak doğru değildir.

Özellikle üç sayı söz konusu olduğunda bütün sayıların çarpımını EBOB ile EKOK'un çarpımına eşitlemek hatalıdır. Örneğin 4, 6 ve 8 sayıları için EBOB = 2, EKOK = 24'tür; bunların çarpımı 48 olurken sayıların çarpımı 4·6·8 = 192'dir. İki sayılı formül burada uygulanamaz. Böyle durumlarda asal üsler yöntemi veya sayıların ikili EBOB/EKOK işlemlerinin art arda kullanılması gerekir.

10. Aralarında asal olma, kat ilişkisi ve ortak bölenle sadeleştirme

İki pozitif tam sayının EBOB'u 1 ise bu sayılar aralarında asaldır. Ayrı ayrı asal olmaları şart değildir. Örneğin 16 ile 35 bileşik sayılar olsa da $16 = 2^4$ ve 35 = 5·7 olduğundan ortak asal çarpanları yoktur; EBOB(16,35) = 1'dir. İki sayılı çarpım bağıntısı gereği EKOK(16,35) = 16·35 = 560 olur. Bu, aralarında asal sayılarda EKOK'un çarpıma eşit olmasının nedenidir.

Sayıların biri diğerinin pozitif tam katıysa küçük sayı bütün ortak bölenlerin en büyüğü, büyük sayı bütün ortak katların en küçüğüdür. Örneğin 18 ile 90 için EBOB = 18, EKOK = 90'dır; çünkü 90 = 18·5'tir. Aynı sayı iki kez alınırsa EBOB(a,a) = EKOK(a,a) = a olur. Ayrıca EBOB(a,1) = 1 ve EKOK(a,1) = a'dır. Bu özel durumlar doğrudan tanımlardan çıkar; genel algoritma uygulanmadan da denetlenebilir.

EBOB(a,b) = d bulunduğunda a = dm ve b = dn biçiminde yazılabilir; burada m ve n pozitif tam sayılardır. m ve n'nin aralarında asal olması gerekir. Eğer m ve n ortak bir k > 1 bölenine sahip olsaydı dk sayısı da a ve b'nin ortak böleni olur ve d'nin en büyük ortak bölen olmasıyla çelişirdi. Bu nedenle a ile b'nin ortak bölenini ayırmak, geriye kalan oranı sadeleştirilmiş hâliyle yazmak anlamına gelir.

Örneğin EBOB(168,264) = 24 olsun. 168 = 24·7 ve 264 = 24·11'dir; 7 ile 11 aralarında asal olduğu için d = 24 doğrudur. EKOK(168,264) = 24·7·11 = 1 848 olur. Ters denetimde 1 848/168 = 11 ve 1 848/264 = 7 bulunur; ayrıca 168·264/24 = 1 848 eşitliği sağlanır.

$$a = dm,\ b = dn,\ \text{EBOB}(m,n) = 1 \Rightarrow \text{EBOB}(a,b) = d;\ \text{EKOK}(a,b) = dmn$$

Anlamı: Ortak bölen çıkarıldığında kalan iki çarpan aralarında asalsa ortak bölenin en büyüğü d'dir.

Koşullar: d,m,n pozitif tam sayılardır. EBOB(m,n) = 1 koşulu gereklidir.

İki sayı için temel EBOB ve EKOK özel durumları

Sayıların durumu	EBOB	EKOK	Gerekçe
Aralarında asal a ve b	1	a·b	Ortak asal çarpan bulunmaz
a, b'nin tam böleni (a ≤ b)	a	b	Bir sayı diğerinin katıdır
Aynı pozitif sayı a ve a	a	a	Bölen ve kat kümeleri aynıdır
1 ile pozitif a	1	a	1 her pozitif sayıyı böler

11. Üç veya daha fazla sayıda EBOB ve EKOK

Üç veya daha fazla pozitif tam sayı için EBOB, bütün sayıları ortak bölen en büyük pozitif tam sayıdır. EKOK ise bütün sayıların pozitif ortak katlarının en küçüğüdür. Asal çarpan yöntemi değişmez: EBOB için her sayıda bulunan ortak asalın en küçük üssü; EKOK için bütün sayılarda görülen asalların en yüksek üssü alınır. Bir asal, sayılardan birinde hiç bulunmuyorsa o sayının üssü sıfırdır ve EBOB'dan çıkar; EKOK'da ise bulunduğu en yüksek üs korunur.

Örneğin $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ olduğundan üç sayıda da ortak bulunan asal çarpanlar 2 ve 3'tür. Küçük üsler 2^1 ve 3^1 seçilerek EBOB(36,60,90) = 6 bulunur. EKOK için en yüksek üsler 2^2, 3^2 ve 5^1 olduğundan EKOK(36,60,90) = 4·9·5 = 180'dir. Bağımsız denetimde 36/6 = 6, 60/6 = 10 ve 90/6 = 15; 180/36 = 5, 180/60 = 3 ve 180/90 = 2 elde edilir. EBOB gerçekten ortak bölen, EKOK gerçekten ortak kattır; üs sınırları bunların en büyük ve en küçük olmasını sağlar.

Bu işlemler ikişer sayı üzerinden de yürütülebilir. Önce EBOB(36,60) = 12, sonra EBOB(12,90) = 6 bulunur. EKOK için önce EKOK(36,60) = 180, sonra EKOK(180,90) = 180 olur. Bu yöntem özellikle verilen sayılardan bazılarının birbirinin katı olduğu durumlarda işlemleri kısaltır. Ancak iki sayıya ait EBOB·EKOK = çarpım bağıntısının üç sayıya aynen taşınamayacağı önceki başlıkta açıklanmıştır.

Üç sayının asal üslerle ortak bölen ve kat hesabı

Asal	36'daki üs	60'taki üs	90'daki üs	EBOB üssü	EKOK üssü
2	2	2	1	1	2
3	2	1	2	1	2
5	0	1	1	0	1
Sonuç	36	60	90	6	180

12. Sıfır, negatif sayılar ve geçerlilik sınırları

EBOB kavramı, en az biri sıfırdan farklı olan tam sayılar için pozitif ortak bölenlerin en büyüğü olarak tanımlanabilir. Bir tam sayı negatif olsa da pozitif bölenleri, aynı mutlak değerdeki pozitif sayının pozitif bölenleriyle aynıdır. Bu nedenle EBOB(−48,18) = EBOB(48,18) = 6 olur. Gerçek kontrol −48 = 6·(−8), 18 = 6·3'tür. İşaretin kendisi EBOB'un pozitif değerini değiştirmez.

Sıfır, sıfırdan farklı her tam sayının katı olduğu için pozitif bir a sayısı açısından EBOB(0,a) = a'dır: 0 ve a'nın ortak pozitif bölenleri tam olarak a'nın pozitif bölenleridir. Buna karşılık 0 ile 0'ın her pozitif tam sayı ortak böleni olabileceği için en büyük ortak pozitif bölen yoktur; bu kitapta EBOB(0,0) tanımlanmaz. EKOK ise pozitif ortak katların en küçüğü olarak tanımlandığında en az biri sıfır olan sayılar için pozitif ortak kat

bulunmadığından tanımlanmaz. Bazı matematiksel bağlamlarda EKOK(0,a) = 0 biçiminde ayrı bir uzlaşım benimsenebilir; bu, burada kullanılan pozitif ortak kat tanımıyla aynı şey değildir.

> **Sıfır ve işaret kısıtı** Pozitif sayılar için EBOB ve EKOK doğrudan hesaplanır. Negatif tam sayılar için mutlak değerlerle çalışılır. EBOB(0,a) = |a|, a ≠ 0 iken EBOB(0,0) tanımsız kabul edilir. Pozitif ortak kat tanımında sıfır içeren sayı kümelerinin EKOK'u bulunmaz; farklı kaynaklar sıfır için ayrıca EKOK = 0 uzlaşımı kullanabilir.

13. Eşit parçalara ayırma ve eş zamanlı tekrar durumları

EBOB ile EKOK'un kullanıldığı sözel durumlar birbirine benzese de aranan büyüklük farklıdır. Her biri kendi içinde artıksız bölünmesi gereken miktarlar varsa ve birim parça olabildiğince büyük seçilecekse EBOB uygundur. Farklı aralıklarla yinelenen olaylar yeniden aynı anda gerçekleşecekse veya bir sayı verilen aralıkların her birinin tam katı olacaksa EKOK aranır. Yalnız bir metinde “en büyük” ya da “en küçük” sözcüğünün bulunması yeterli değildir; verilen niceliğin ortak bölen mi ortak kat mı olması gerektiği belirlenmelidir.

Bir depoda 156 ve 204 adetlik iki farklı ürün grubunun birbirine karıştırılmadan, her kutuda eşit sayıda ve hiç ürün artmayacak biçimde paketlendiğini düşünelim. En az kutu kullanmak için kutu başına ürün sayısı mümkün olduğunca büyük olmalıdır. Bu sayı hem 156'yı hem 204'ü tam bölmelidir: EBOB(156,204) = 12 bulunur. Çünkü 156 = 12·13 ve 204 = 12·17'dir; 13 ile 17 aralarında asal olduğundan 12 en büyük ortak bölen olur. İlk gruptan 156/12 = 13, ikinci gruptan 204/12 = 17 kutu elde edilir; toplam 30 kutudur. Kontrol 30·12 = 360 = 156+204 hesabıdır. Kutulara farklı ürün türleri birlikte konulmadığı hâlde her kutuda 12 ürün bulunmaktadır.

İki sistemin ilki 18 dakikada, ikincisi 24 dakikada bir düzenli uyarı versin ve her ikisi saat 09.00'da aynı anda uyarı vermiş olsun. Sonraki ortak uyarı aralığı 18 ve 24'ün pozitif ortak katı olmalıdır. $18 = 2\cdot3^2$ ve $24 = 2^3\cdot3$ olduğundan EKOK(18,24) = $2^3\cdot3^2$ = 72 dakikadır. 72/18 = 4 ve 72/24 = 3 olduğu için birinci sistem dört, ikinci sistem üç döngü sonunda yeniden birleşir. İlk ortak uyarı saat 10.12'de gerçekleşir; 09.00 üzerine 1 saat 12 dakika eklenmesi zaman hesabını bağımsız doğrular. Bir uyarının başlangıçta gerçekleştiği bilgisi atlanırsa sonuç yanlış yorumlanabilir.

Ortak bölen ve ortak kat gerektiren durumların ayrımı

Verilen durum	Aranan nicelik	Matematiksel araç	Öğretici sonuç
156 ve 204 ürünün artıksız eşit kutulara ayrılması	En büyük kutu içeriği	EBOB(156,204)	12 ürün; toplam 30 kutu
18 ve 24 dakikalık döngülerin yeniden çakışması	En küçük ortak süre	EKOK(18,24)	72 dakika
84 ve 126 sayılarının ortak böleni	En büyük ortak pozitif bölen	EBOB(84,126)	42
84 ve 126'nın ortak katı	En küçük pozitif ortak kat	EKOK(84,126)	252

14. Ölçekleme özelliği ve sonuçların tutarlılık denetimi

İki pozitif tam sayı aynı pozitif tam sayı katsayısıyla çarpılırsa EBOB ve EKOK da aynı katsayıyla çarpılır. Çünkü sayıların ortak asal çarpan yapısı, bu ortak katsayının asal çarpanlarının her iki sayıya birlikte eklenmesiyle değişir. Örneğin EBOB(45,75) = 15, EKOK(45,75) = 225'tir. Her sayı 4 ile çarpılırsa 180 ve 300 elde edilir. EBOB(180,300) = 60 = 4·15; EKOK(180,300) = 900 = 4·225'tir. Kontrol 60·900 = 54 000 ve 180·300 = 54 000 eşitliklerini verir. İki değer ayrı ayrı ölçeklense bu basit ortak katsayı bağıntısı kendiliğinden uygulanamaz.

$$\text{EBOB}(ka,kb) = k\cdot\text{EBOB}(a,b);\ \text{EKOK}(ka,kb) = k\cdot\text{EKOK}(a,b)$$

Anlamı: İki pozitif sayı ortak bir pozitif tam sayı çarpanıyla ölçeklendiğinde her iki ortaklık ölçüsü aynı oranda ölçeklenir.

Koşullar: a,b,k pozitif tam sayılardır. İki sayının farklı katsayılarla çarpılması için genel olarak bu formül kullanılmaz.

Pozitif iki tam sayıda EBOB, her iki sayıdan da büyük olamaz; EKOK ise her ikisinden de küçük olamaz. 18 ve 90 için EBOB = 18, EKOK = 90 bu sınırları sağlar. Buna karşılık 20 ve 27 aralarında asal olduğu için EBOB = 1, EKOK = 540'tır; 20·27 = 540 ve 1·540 = 540 aynı sonucu verir. EBOB'un 1 çıkması bir hata değil, ortak asal bölen bulunmadığını gösterir. EKOK'un iki sayının çarpımına eşit olması da yalnız aralarında asal durumun doğal sonucudur.

Son denetimde sayıların pozitiflik koşulu, asal çarpanlara ayrılışın eksiksizliği, EBOB'da küçük üs ve EKOK'da büyük üs seçimi, iki sayılı çarpım bağıntısının kapsamı ve sözel durumda aranan niceliğin ortak bölen mi ortak kat mı olduğu birlikte değerlendirilmelidir. Bütün çarpanlar orijinal sayıyı yeniden oluşturmalı; EBOB her sayıyı bölmeli, EKOK ise her sayının katı olmalıdır. Böylece asal çarpanlara ayırma, işlemi hızlandıran bir teknik olmanın ötesinde hesaplamanın doğruluğunu açıklayan bir yöntem hâline gelir. GY-01'in son konusu olan GY-01.07'de kesirler, ondalık gösterimler ve sayı karşılaştırmaları ele alınacaktır.

KONU 1.7

KESİRLER, ONDALIK SAYILAR VE SAYI KARŞILAŞTIRMALARI

Bir tam sayının her zaman bir ölçüyü yeterli duyarlılıkla anlatması mümkün değildir. Bir yolun tamamlanmış kısmı, bir malzemenin kilogram cinsinden miktarı veya bir bütünden alınan pay, kesir ve ondalık gösterimlerle ifade edilebilir. Bu gösterimler ayrı sayı türleri oluşturmaz; aynı rasyonel sayı farklı biçimlerde yazılabilir. Örneğin 3/4, 6/8 ve 0,75 aynı değeri belirtir. Bu konunun amacı, gösterim değiştirirken değeri korumayı, işlemleri geçerlilik koşullarıyla yürütmeyi ve özellikle birbirine yakın sayıları güvenilir biçimde karşılaştırmayı açıklamaktır.

1. Kesrin anlamı, pay ve paydanın görevleri

Kesir, bir bütünün eşit parçalara ayrılması düşüncesiyle açıklanabilir. 5/8 kesrinde payda olan 8, bütünün kaç eşit birime bölündüğünü; pay olan 5 ise bu birimlerden kaç tanesinin alındığını gösterir. Aynı gösterim 5'in 8'e bölünmesi anlamına da gelir. Birim kesir 1/8'dir ve 5/8, bu birimden beş tane içerir. Ancak payın paydadan küçük olması zorunlu değildir: 11/8, bir bütünden daha büyük bir miktardır.

Genel olarak a/b gösteriminde a ve b tam sayı, b ≠ 0 ise sayı rasyoneldir. Paydadaki sıfır bir bölme sonucu tanımlamadığı için 5/0 bir sayı değildir; 0/8 ise 0'dır. Negatif işaret payda yerine paya veya kesrin önüne taşınabilir: 5/(−8) = −5/8 = (−5)/8. Hem payın hem paydanın negatif olması işareti pozitife döndürür: (−5)/(−8) = 5/8. Karşılaştırma ve sadeleştirme sırasında paydanın pozitif seçilmesi anlatımı kolaylaştırır.

$$a/b = (a\cdot k)/(b\cdot k),\ k \neq 0$$

Anlamı: Pay ile payda aynı sıfırdan farklı katsayıyla çarpıldığında kesrin değeri değişmez.

Koşullar: a,b,k tam sayıdır; b ≠ 0 ve k ≠ 0. Sadeleştirme için bölünebilirlik şartı ayrıca aranır.

Kesir gösteriminde temel anlamlar

Gösterim	Açıklama	Değer bakımından sonuç
5/8	Sekiz eşit parçadan beşi	0 ile 1 arasındadır
8/8	Sekiz eşit parçanın tamamı	1'e eşittir
11/8	Bir bütünü aşan pay	1'den büyüktür
−5/8	Negatif rasyonel değer	0'dan küçüktür
0/8	Pay sıfır, payda sıfır değil	0'a eşittir
5/0	Payda sıfır	Tanımsızdır

2. Denk kesir, genişletme ve sadeleştirme

Bir kesrin payını ve paydasını aynı sıfırdan farklı sayıyla çarpmak genişletme, aynı ortak bölenle bölmek sadeleştirmedir. İşlemde önemli nokta, pay ve paydaya aynı dönüşümün uygulanmasıdır. 18/30 kesrinin iki terimi de 6'ya bölündüğünde 3/5 bulunur. 3/5 kesri 4 ile genişletilirse 12/20 elde edilir. Üç yazım birbirine eşittir: 18/30 = 3/5 = 12/20. Ters denetim 3·30 = 5·18 = 90 eşitliğidir; bu, iki kesrin neden aynı değeri gösterdiğini doğrular.

Sadeleşmiş biçim, pay ile paydanın pozitif ortak böleninin 1 olmasıdır. İşaret dışarıda tutularak −42/56 = −3/4 bulunur; burada 42 ve 56'nın EBOB'u 14'tür. Kesrin yalnız payını ya da yalnız paydasını değiştirmek, sıfır gibi özel bir durum bulunmadıkça değeri değiştirir. Payla paydanın ikisine aynı sayı eklenmesi de denk kesir oluşturmanın genel bir yolu değildir: 2/3 ile 3/4 eşit değildir.

$$a/b = c/d \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$$

Anlamı: İki tanımlı kesrin eşitliği çapraz çarpımların eşitliğiyle denetlenebilir.

Koşullar: a,b,c,d tam sayıdır; b ≠ 0 ve d ≠ 0. Bu eşitlik yalnız kesirlerin değer eşitliği içindir; işaretli sayıları karşılaştırırken payda işaretlerine dikkat edilir.

3. Basit, bileşik ve tam sayılı kesirler

Payı ile paydası pozitif olan kesirlerde pay paydadan küçükse basit, büyük veya eşitse bileşik kesir denir. İşaretli rasyonel sayılarda aynı ayrım mutlak pay ve mutlak payda büyüklükleri üzerinden ele alınabilir. Örneğin 7/9 ve −2/7 birim büyüklüğünden küçük; 13/5 ve −9/4 ise mutlak değerce 1'den büyük kesir gösterimleridir. Sınıflandırma, işlemin kendisini değiştirmez; hangi gösterimin daha okunur olduğunu belirler.

Tam sayılı kesir, tam kısım ile kesirli kısmı birlikte gösterir. Pozitif 3 tam 2/5, 3 + 2/5 = (3·5 + 2)/5 = 17/5 anlamına gelir. Tersine 23/6 = 3 + 5/6'dır; çünkü 23 = 6·3 + 5 ve kalan 0 ile 6 arasındadır. Negatif tam sayılı yazımda −(3 + 2/5) = −17/5 olduğu açıkça belirtilmelidir. −3 + 2/5 ise −13/5 olup farklı bir sayıdır. Özellikle satır arası dizgide parantez, işaretin hangi büyüklüğe uygulandığını görünür kılar.

Farklı kesir gösterimlerinin eşdeğerliği

İlk gösterim	Eşdeğer yazım	Kontrol
3 tam 2/5	17/5	3·5+2=17
23/6	3 tam 5/6	3·6+5=23
−(2 tam 3/8)	−19/8	−(2·8+3)=−19
−42/56	−3/4	Pay ve payda 14'e bölünür

4. Ortak payda ve kesirlerin aynı birim üzerinden okunması

Paydalar farklı olduğunda kesirler farklı büyüklükte birim parçalarla ifade edilir. Bu birimleri doğrudan toplayıp çıkarmak anlamlı değildir. Örneğin 1/6 ile 1/4'ü birleştirmek için altıda bir ve dörtte bir birimlerini on ikide birlere dönüştürmek gerekir: 1/6 = 2/12 ve 1/4 = 3/12. Ortak payda olarak 12 seçilmesi, 6 ile 4'ün EKOK'unun 12 olmasındandır. Paydaların çarpımı olan 24 de kullanılabilir, fakat daha fazla sadeleştirme gerekebilir.

Ortak payda seçmek yalnız işlemlerde değil karşılaştırmada da yararlıdır. Örneğin 7/12 ile 5/8 sayıları 24 paydasında 14/24 ve 15/24 olur; aynı birim parçadan 15 tane içeren ikinci kesir daha büyüktür. İşlem, eski kesirlerin pay ve paydalarını değiştirse de temsil ettikleri niceliği değiştirmez. Payda eşitleme adımında işaretli kesirlerde de pozitif ortak payda kullanılması güvenli bir tercihtir.

$$a/b \pm c/d = (a\cdot d \pm b\cdot c)/(b\cdot d)$$

Anlamı: Kesirlerde toplama ve çıkarma, eşdeğer kesirlerle ortak payda kurulup payların birleştirilmesiyle gerçekleştirilir.

Koşullar: a,b,c,d tam sayıdır; b ≠ 0 ve d ≠ 0. b·d her zaman ortak paydadır, zorunlu olarak en küçük ortak payda değildir.

5. Kesirlerle toplama ve çıkarma

Paydalar eşitse birim parçanın büyüklüğü aynıdır; yalnız parça sayıları birleştirilir. Bu yüzden 5/11 + 3/11 = 8/11 olur. Farklı paydalı iki kesirde önce ortak birim bulunur. Özgün bir hesapta 7/10 − 1/4 işlemi 14/20 − 5/20 = 9/20 verir. Kontrol 9/20 = 0,45 ve 7/10 − 1/4 = 0,70 − 0,25 = 0,45 eşitliğidir.

Negatif değerlerle işlemde, kesir içindeki işaret ile çıkarma işaretinin görevleri karıştırılmamalıdır. −3/8 + 5/12 için ortak payda 24'tür: −9/24 + 10/24 = 1/24. Bağımsız denetim, 5/12'nin 10/24 ve 3/8'in 9/24 olduğunu görmektir; pozitif nicelik bir yirmi dörtte bir kadar fazladır. 2/9 − (−1/6) işlemi ise 2/9 + 1/6 = 4/18 + 3/18 = 7/18 olur. Negatif bir sayıyı çıkarmak o sayının ters işaretlisini eklemektir.

Payda toplama yanılgısı 1/3 + 1/4 işleminin sonucu 2/7 değildir. Üçte bir ve dörtte bir parçaları farklı büyüklüktedir; doğru toplam 4/12 + 3/12 = 7/12'dir. Payda, payların toplandığı ayrı bir terim değildir.

Toplama ve çıkarmada ortak payda denetimi

İşlem	Ortak paydalı gösterim	Sade sonuç
1/6 + 1/4	2/12 + 3/12	5/12
7/10 − 1/4	14/20 − 5/20	9/20
−3/8 + 5/12	−9/24 + 10/24	1/24
2/9 − (−1/6)	4/18 + 3/18	7/18

6. Kesirlerle çarpma, sadeleştirerek hesaplama ve bölme

İki kesri çarpmak, bir kesrin başka bir kesir kadarını almak olarak yorumlanabilir. Paylar kendi aralarında, paydalar kendi aralarında çarpılır: (3/5)·(10/21) = 30/105 = 2/7. Hesap daha başta sadeleştirilebilir: 10 ile 5, 3 ile 21 karşılıklı sadeleştirilince (1·2)/(1·7) = 2/7 kalır. Bu işlem, pay ile paydayı oluşturan çarpanların birlikte bölünmesidir; toplama veya çıkarma ifadelerinde gelişigüzel çapraz sadeleştirme yapılamaz.

Bölme, sıfırdan farklı ikinci kesrin çarpma işlemine göre tersiyle çarpmaktır. (5/6) ÷ (−10/9) = (5/6)·(−9/10) = −45/60 = −3/4. Ters denetim (−3/4)·(−10/9) = 30/36 = 5/6 işlemidir: bölüm ile bölenin çarpımı bölünene geri döner. İkinci kesir sıfırsa tersi yoktur ve bölüm tanımsızdır. Örneğin 3/7 ÷ 0 işlemi yapılamaz.

$$(a/b)\cdot(c/d) = (a\cdot c)/(b\cdot d);\ (a/b) \div (c/d) = (a\cdot d)/(b\cdot c)$$

Anlamı: Çarpmada pay ve paydalar çarpılır; bölmede ikinci kesrin çarpma işlemine göre tersi alınır.

Koşullar: a,b,c,d tam sayıdır; b ≠ 0, d ≠ 0. Bölme formülünde ayrıca c ≠ 0 gereklidir; ikinci kesir sıfır olamaz.

Çarpma ve bölmede sonuç ve ters kontrol

İşlem	Sonuç	Ayrı kontrol
(3/5)·(10/21)	2/7	(30/105)=2/7
(5/6) ÷ (−10/9)	−3/4	(−3/4)·(−10/9)=5/6
(−7/12)·(6/35)	−1/10	−42/420=−1/10
(4/15) ÷ (2/9)	6/5	(6/5)·(2/9)=4/15

7. Bir miktarın kesri ve birbiri ardına alınan paylar

Bir miktarın belirli kesrini bulmak, miktarla kesri çarpmak anlamına gelir. 240 sayfalık bir belgenin 5/8'i, 240·5/8 = 30·5 = 150 sayfadır; çünkü 240 önce 8 eşit gruba ayrıldığında her grup 30 sayfa olur. Bağımsız kontrolde 150/240 = 5/8 elde edilir. Bu örnekte başlangıç bütünü 240 sayfadır; hangi niceliğin bütün sayıldığı belirtilmeden kesir doğru yorumlanamaz.

Bir kesrin başka kesri alındığında oranlar çarpılır. Bir hacmin önce 3/5'i, sonra elde edilen kısmın 2/3'ü seçilirse seçilen son miktar başlangıcın (3/5)·(2/3) = 2/5'idir. Örneğin 75 litrenin önce 3/5'i 45 litre, bunun 2/3'ü 30 litredir; doğrudan 75·2/5 = 30 litre de aynı sonucu verir. “Kalanın 2/3'ü” ifadesi farklıdır: 75 litrenin 3/5'i kullanılmışsa kalan 30 litrenin 2/3'ü 20 litredir. Payın hangi bütüne göre alındığı, kesir problemlerinde işlemin yönünü belirler.

$$\text{Bir miktarın } a/b \text{ kadarı} = M \cdot a/b$$

Anlamı: M toplam miktarın b eşit kısmından a tanesinin büyüklüğüdür.

Koşullar: M aynı tür ve birimle ölçülmüş miktardır; $b \neq 0$. Fiziksel 'bütünün parçası' yorumunda genellikle $0 \leq a/b \leq 1$ ve $M \geq 0$ alınır.

8. Ondalık gösterimin basamak değeri ve kesirle ilişkisi

Ondalık gösterim, onluk basamak değerinin virgülden sonraya genişletilmesidir. Türkçede virgül tam kısım ile kesirli kısmı ayırır. 18,407 sayısı 18 + 4/10 + 0/100 + 7/1000 biçimindedir; yani 18 + 407/1000'dir. Virgülden sonraki ilk basamak onda bir, ikincisi yüzde bir, üçüncüsü binde birdir. 0,07 ile 0,7 aynı sayı değildir: ilki yedi yüzde bir, ikincisi yedi onda birdir ve aralarında on kat fark vardır.

Virgülden sonra en sağa eklenen sıfırlar değeri değiştirmez: 2,5 = 2,50 = 2,500. Bunun nedeni 25/10 = 250/100 = 2500/1000 denk kesirleridir. Sayının ortasındaki veya baştaki anlamlı sıfırları atmak ise değerini değiştirebilir: 0,205 ve 0,25 eşit değildir. Negatif ondalıklarda işaret bütün sayıya aittir; −1,25, −1 ile −2 arasındadır.

$$p,abcd = p + a/10 + b/100 + c/1000 + d/10000$$

Anlamı: Ondalık basamaklar, on sayısının negatif kuvvetlerine karşılık gelen kesir birimleridir.

Koşullar: p negatif olmayan tam kısım, a,b,c,d ondalık rakamlardır; negatif sayıda tüm değerin önüne eksi işareti alınır. Gösterim dört ondalık basamak örneğidir.

Ondalık basamakların sayısal katkısı

Gösterim	Açılım	Kesir biçimi
0,6	6/10	3/5
0,08	8/100	2/25
1,375	1+3/10+7/100+5/1000	11/8
18,407	18+4/10+7/1000	18407/1000
−0,125	−125/1000	−1/8

9. Kesri ondalığa dönüştürme ve sonlu açılım koşulu

Bir rasyonel sayının ondalık gösterimini elde etmek için pay, sıfırdan farklı paydaya bölünür. 7/16 örneğinde 7 ÷ 16 = 0,4375 bulunur. Kontrol $0{,}4375 \cdot 16 = 7$'dir. Alternatif olarak $16 \cdot 625 = 10000$ olduğundan 7/16 = 4375/10000 = 0,4375 elde edilir. 13/20 ise 65/100 = 0,65 olur. Paydada 10'un kuvvetini oluşturmak uygun olduğunda genişletme, uzun bölme işleminden daha kısa olabilir.

Sadeleştirilmiş bir kesrin paydasında asal çarpan olarak yalnız 2 ve/veya 5 varsa ondalık açılımı sonludur. Bunun nedeni $10 = 2 \cdot 5$ olduğundan uygun bir 10 kuvvetinin bu paydaya bölünebilmesidir. Örneğin 3/40'ın paydası $2^3 \cdot 5$ olduğundan 3/40 = 75/1000 = 0,075'tir. Buna karşılık 1/6'nın sade paydasında 3 bulunduğu için sonlu ondalık açılımı yoktur: 1/6 = 0,1666... olur. Bir kesri sadeleştirmeden yalnız görünen paydaya bakmak yanıltabilir: 6/15 = 2/5 = 0,4 sonludur; başlangıç paydasında 3 bulunması sonucu değiştirmez, çünkü sadeleştirmeyle ortadan kalkar.

Sadeleştirilmiş a/b kesrinin ondalık açılımı sonludur ⇔ b = 2^m·5^n

Anlamı: Payda yalnız 2 ve 5 asal çarpanlarından oluşursa kesir 10'un bir kuvveti paydasına dönüştürülebilir.

Koşullar: a ve b aralarında asal tam sayılardır; b > 0; m,n sıfır veya pozitif tam sayıdır. b = 1 için tam sayı da sonlu ondalık gösterime sahiptir.

Sade payda yapısı ile ondalık açılım ilişkisi

Kesir	Sade payda	Ondalık gösterim	Tür
7/16	2^4	0,4375	Sonlu
13/20	$2^2 \cdot 5$	0,65	Sonlu
3/40	$2^3 \cdot 5$	0,075	Sonlu
6/15 = 2/5	5	0,4	Sonlu
1/6	2·3	0,1666...	Sonsuz, devirli
5/11	11	0,454545...	Sonsuz, devirli

10. Devirli ondalık gösterim ve neden tekrar oluşur?

Bölme sırasında kalan sıfır olursa sonlu ondalık gösterim elde edilir. Kalan sıfır olmuyorsa ve payda pozitif b ise yalnız 1, 2, ... , b−1 kalanları mümkündür. Bölme sürdürülürken daha önce görülen bir kalan yeniden ortaya çıkar; bu andan itibaren aynı bölüm rakamları aynı sırayla tekrarlanır. Böylece her rasyonel sayının ondalık gösterimi ya sonlu ya da sonunda bir rakam grubunun yinelendiği devirli bir gösterimdir. Buna karşılık sonsuza uzanan ve hiçbir dönemle tekrar etmeyen ondalık gösterimler rasyonel değildir.

Örneğin 2/7 = 0,285714285714... olup devreden rakam grubu 285714'tür. 7 ile çarpıldığında 1,999999... elde edilmesi, 2/7'nin yaklaşık değil tam değerini taşıdığını gösterir; 0,999... = 1 eşitliği nedeniyle 1,999... = 2'dir. 1/12 = 0,083333... gösteriminde önce 08 gelir, ardından 3 sürekli tekrar eder; tüm ondalık basamakların aynı anda devretmesi gerekmez. TXT ortamında devreden bölümü belirsiz bırakmamak için 0,08(3) ve 0,(285714) yazılabilir: parantez içindeki rakam grubu sonsuza kadar tekrar eder, parantez dışındaki ilk basamaklar tekrarlanmaz. PDF dizgisinde bu parantezler devreden rakamların üzerinde çizgiye dönüştürülebilir.

Sonsuz gösterim ve kesin eşitlik 0,999... matematiksel olarak tam 1'e eşittir; 1'den biraz küçük ayrı bir sayı değildir. Sonlu ondalık sayıların sıfırlarla devam eden gösterimleri yanında, son rakamı 1 azaltıp sürekli 9'larla devam eden eşdeğer bir yazımı da vardır. Bu eşitlik yuvarlama ile karıştırılmamalıdır.

0,(27) = 27/99 = 3/11

Anlamı: İki rakamlı dönemin sürekli tekrarından oluşan ondalık gösterim tam bir rasyonel değerdir.

Koşullar: Parantez devreden rakam grubunu belirtir; 0,(27) = 0,272727... olarak okunur.

11. Sonlu ve devirli ondalığı kesre dönüştürme

Sonlu ondalık gösterimde virgülden sonra n basamak varsa sayı 10^n paydasıyla kesre dönüştürülür; işaret korunur ve mümkünse sadeleştirilir. Örneğin 2,375 = 2375/1000 = 19/8'dir. Kontrol 19 ÷ 8 = 2,375 hesabıdır. Negatif gösterimde −0,48 = −48/100 = −12/25 olur; 12/25 = 0,48 olduğundan işaret dışında değer eşitliği sağlanır.

Devirli ondalıkta tekrarı ortadan kaldırmak için aynı sayının uygun 10 kuvvetleriyle çarpılmış eşitlikleri çıkarılır. x = 0,(36) = 0,363636... olsun. 100x = 36,363636... olduğundan 100x − x = 36 ve 99x = 36 elde edilir. Böylece x = 36/99 = 4/11'dir. Ters denetim 4 ÷ 11 = 0,363636... bölmesidir.

Devir başlamadan önce basamaklar varsa her iki uygun kaydırma kullanılır. x = 0,1(6) = 0,16666... için 10x = 1,6666... ve 100x = 16,6666... yazılır. Çıkarınca 90x = 15 ve x = 1/6 bulunur. Buradaki 90 paydası bir devreden rakam için 9, ondan önce gelen bir devretmeyen ondalık basamak için 0 içermesinin sonucudur. İşlemde yazılan devretmeyen kısım ile tam kısım doğru ayrılmalıdır; doğruluk, çıkan kesri yeniden bölerek kontrol edilir.

$$x = 0{,}u(v) \Rightarrow x = (uv - u)/(10^r \cdot (10^s - 1))$$

Anlamı: u, devretmeyen r basamaklı ondalık blok; v, sürekli tekrar eden s basamaklı bloktur. uv, bu blokların art arda yazılarak oluşturduğu tam sayıyı belirtir.

Koşullar: $0 \le x < 1$, $r \ge 0$, $s \ge 1$; u ve v rakam dizileridir, baştaki sıfırlar basamak sayısına dahil edilir. Tam kısmı olan sayılarda önce tam kısım ayrılır; negatif işaret en son uygulanır.

Ondalık gösterimi kesre dönüştürme

Ondalık gösterim	Kesre dönüştürme	En sade değer
2,375	2375/1000	19/8
−0,48	−48/100	−12/25
0,(36)	36/99	4/11
0,1(6)	(16−1)/90	1/6
0,2(45)	(245−2)/990	27/110
0,(9)	9/9	1

12. Ondalık gösterimlerle dört işlem ve işlem kontrolü

Ondalık toplama ve çıkarmada aynı basamak değerleri alt alta getirilir. 3,75 + 0,086 işleminde 3,750 + 0,086 = 3,836 bulunur. Çıkarma örneği 5,2 − 0,875 = 5,200 − 0,875 = 4,325'tir. Ondalık sayının sonuna sıfır eklemek değeri değiştirmediği için basamak eşitlemek geçerlidir. Kontroller 3,836 − 0,086 = 3,75 ve 4,325 + 0,875 = 5,2 işlemleridir.

Çarpmada ondalık gösterimler önce tam sayı çarpımı gibi işlenebilir; sonra iki çarpanın toplam ondalık basamağı kadar basamak ayrılır. 1,25·0,24 için 125·24 = 3000 ve toplam dört ondalık basamak bulunduğundan sonuç 0,3000 = 0,3 olur. Kesirle kontrol (125/100)·(24/100) = 3000/10000 = 3/10'dur. Virgül kaydırarak bölmede hem bölünen hem bölen aynı 10 kuvvetiyle çarpılır. Örneğin 4,68 ÷ 0,12 = 468 ÷ 12 = 39'dur; kontrol 39·0,12 = 4,68 işlemini verir. Bölen sıfırsa hiçbir virgül kaydırması bölmeyi tanımlı hâle getirmez.

$$A \div B = (10^n \cdot A) \div (10^n \cdot B)$$

Anlamı: Bölünen ve böleni aynı sıfırdan farklı katsayıyla çarpmak bölümü değiştirmez; uygun n seçimi böleni tam sayıya dönüştürür.

Koşullar: B ≠ 0 ve n sıfır veya pozitif tam sayıdır. Çarpma iki tarafa da uygulanır.

Ondalık işlemlerde iki yoldan denetim

İşlem	Hesaplanan değer	Geriye dönük kontrol
3,75 + 0,086	3,836	3,836−0,086=3,75
5,2 − 0,875	4,325	4,325+0,875=5,2
1,25·0,24	0,3	0,3÷0,24=1,25
4,68 ÷ 0,12	39	39·0,12=4,68

13. Kesirlerde ve ondalıklarda karşılaştırma ve sıralama

Sayı doğrusu üzerinde sağda kalan sayı daha büyüktür. İşaretler farklıysa pozitif sayı negatif sayıdan büyük, sıfır da bütün negatif sayılardan büyüktür. Aynı pozitif paydalı iki kesirde payı büyük olan daha büyüktür: 7/13 > 5/13. Aynı pozitif paya sahip pozitif kesirlerde payda küçüldükçe eşit parçalardan her biri büyüdüğü için 5/7 > 5/9 olur. Ancak bu ikinci kural işaretli kesirlere koşulsuz taşınamaz; −5/7 < −5/9'dur, çünkü birincisi sıfırın daha solundadır.

Pay ve paydalar farklıysa paydaları pozitif olacak şekilde eşitlemek veya pozitif paydalar için çapraz çarpımları kıyaslamak güvenlidir. 11/15 ile 7/10'u karşılaştıralım: 11·10 = 110 ve 7·15 = 105 olduğundan 11/15 > 7/10'dur. Ters denetimde ortak payda 30 alınır ve 22/30 > 21/30 görülür. Negatif örnek olarak −5/6 ile −7/9 kesirlerinde çapraz çarpımlar −45 ve −42'dir; −45 < −42 olduğundan −5/6 < −7/9 olur. Ortak payda 18 ile −15/18 < −14/18 aynı sıralamayı doğrular.

Ondalık karşılaştırmasında önce tam kısım ve işaret, sonra onda birler, yüzde birler ve sonraki basamaklar karşılaştırılır. 0,507 ve 0,57 sayıları 0,507 ve 0,570 olarak hizalandığında yüzde birler basamağında 0 ile 7 farklıdır; bu nedenle 0,507 < 0,57'dir. Yakın sayılardan 2,406 ve 2,4059 kıyaslandığında 2,4060 > 2,4059 sonucu çıkar. Negatif sayılarda sıfıra daha yakın olan daha büyüktür: −0,48 > −0,5; çünkü −0,48 > −0,50'dir. Devirli gösterimlerde karşılaştırma, tekrar eden rakamlar açılarak veya kesre dönüştürülerek kesin yapılabilir; yalnız görünen ilk birkaç basamağa göre yuvarlama yapmak eşitlik izlenimi oluşturabilir.

$$a/b < c/d \Leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$$

Anlamı: Paydaları pozitif iki kesir, çapraz çarpımların sırası korunarak karşılaştırılabilir.

Koşullar: a,b,c,d tam sayıdır; b > 0 ve d > 0. Paydalardan biri negatifse önce işaret paya taşınmalıdır; aksi hâlde eşitsizliğin yönü doğrudan korunmayabilir.

Kesir ve ondalık karşılaştırmalarının gerekçeleri

Karşılaştırma	Sonuç	Denetim dayanağı
11/15 ile 7/10	11/15 > 7/10	110 > 105
−5/6 ile −7/9	−5/6 < −7/9	−15/18 < −14/18
0,507 ile 0,57	0,507 < 0,57	507/1000 < 570/1000
−0,48 ile −0,5	−0,48 > −0,5	−48/100 > −50/100
2,406 ile 2,4059	2,406 > 2,4059	24060/10000 > 24059/10000

14. Ara değer, sıralama zinciri, yaklaşık değer ve yuvarlama

Farklı gösterimdeki sayıları birlikte sıralarken hepsini ortak bir gösterime dönüştürmek güvenilir yoldur. Örneğin −3/4, −0,7, 2/3, 0,68 ve 5/8 sayıları için sırasıyla −0,75, −0,7, 0,666..., 0,68 ve 0,625 karşılıkları yazılır. Küçükten büyüğe doğru sıra −3/4 < −0,7 < 5/8 < 2/3 < 0,68 olur. Ters denetimde pozitif kesirler karşılaştırılır: 5/8 = 0,625 < 2/3; 2/3 = 0,666... < 0,68 = 17/25, çünkü 2·25 = 50 < 51 = 3·17. Negatiflerde −0,75, −0,7'den küçüktür.

İki farklı rasyonel sayı arasında başka rasyonel sayılar bulunur. a < b iken (a+b)/2 aradadır; çünkü a ile b'nin toplamının yarısı ikisine de eşit uzaklıktadır. Örneğin 3/7 ile 4/7 arasında (3/7+4/7)/2 = 1/2 vardır. Kontrol, 3/7 = 6/14 < 7/14 = 1/2 < 8/14 = 4/7 sıralamasıdır. Bu aralıkta yalnız tek bir sayı bulunmaz; yeni aralıkların orta noktaları tekrar alınabilir.

Kesin değer ile yaklaşık değer arasındaki fark korunmalıdır. 2/3 = 0,666... tam eşitliktir; iki ondalık basamağa yuvarlanmış 0,67 ise yaklaşık değerdir. En yakın yüzde birliğe yuvarlamada binde birler basamağına bakılır; örneğin 4,376 sayısı 4,38 olur. Tam ortadaki 4,375 sayısını iki ondalık basamağa '5 ve üzeri yukarı' kuralıyla yuvarlarsak 4,38 bulunur. Ancak farklı yazılım ve istatistik sistemleri tam ortalarda farklı yuvarlama kuralları kullanabilir; bu nedenle özellikle para ve ölçüm bağlamlarında kural önceden belirlenmelidir. Yuvarlanmış iki sayının eşit görünmesi başlangıçtaki kesin değerlerin eşit olduğunu kanıtlamaz.

$$a < b \Rightarrow a < (a+b)/2 < b$$

Anlamı: Farklı iki rasyonel sayının aritmetik ortalaması ikisinin arasında yer alır.

Koşullar: a ve b rasyonel sayıdır ve a < b'dir. Bölme işlemi sıfırdan farklı 2 sayısıyla yapılır.

Sıralama, aradaki sayı ve yaklaşık değerin ayrılması

İşlem veya gösterim	Kesin değerlendirme	Açıklama
3/7, 1/2, 4/7	3/7 < 1/2 < 4/7	Ortak payda 14
5/8, 2/3, 0,68	5/8 < 2/3 < 0,68	0,625 < 0,666... < 0,680
2/3	0,(6)	Tam eşitlik
2/3 ≈ 0,67	Yaklaşık eşitlik	İki ondalık basamakta yuvarlama
4,376 → 4,38	Yaklaşık değer	Yüzde birliğe yuvarlama

Gösterim, hesap ve sıralama denetimi Kesirlerde payda hiçbir aşamada sıfır olamaz; eşitsizlikte çapraz çarpımın yönü yalnız pozitif paydalarla doğrudan korunur. Devirli ondalık tam değeri, sonlu yazılmış yaklaşık değerle karıştırılmamalıdır. Önceki konulardaki EBOB/EKOK, bölünebilme ve işlem önceliği bilgileri bu bölümün hesap araçlarıdır; kesir işlemlerinde bütünün ne olduğu ayrıca belirtilmelidir.

Bu bölümde kesrin eşdeğer gösterimleriyle değerinin değişmezliği, farklı paydalı işlemlerin ortak birim üzerinden yürütülmesi, çarpma ve bölmenin ters ilişkiyle denetlenmesi ve ondalık açılımın sonlu ya da devirli oluşu bir bütün olarak ele alındı. Bir sayı kesir veya ondalık biçimde yazıldığında yalnız gösterimi değişir; büyüklüğü, sayı doğrusu üzerindeki yeri ve başka sayılarla sıralama ilişkisi değişmez. Temel Matematik ve Sayılar modülü bu konuyla tamamlanmıştır. Sonraki modülde sayılar arasındaki ilişkiler denklemler, oran-orantı ve cebirsel ifadeler üzerinden genişletilecektir.

BÖLÜM 02

CEBİR, ORAN VE SAYISAL İLİŞKİLER

KONU 2.1

BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

Bir miktarın tam değeri bilinmese bile o miktarla ilgili ilişkiler biliniyor olabilir. Örneğin başlangıçta kaç birim bulunduğu bilinmeyen bir kayda sabit bir miktar eklendiğinde sonuç biliniyorsa, başlangıç değerini bu ilişkiden hareketle bulmak mümkündür. Cebir, bilinmeyen değerleri harflerle göstererek aralarındaki eşitlikleri inceler. Denklem çözmek, verilen eşitliği doğru yapan değerleri belirleme işlemidir. Önceki modülde ele alınan dört işlem, işaret, kesir ve ondalık sayı bilgileri bu kez bilinmeyenli eşitlikleri çözmek için birlikte kullanılacaktır.

Bu bölümün konusu birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir. Amaç yalnız bir harfi eşitliğin bir yanında bırakmak değil, kullanılan her dönüşümün hangi koşulda aynı çözüm kümesini koruduğunu anlamaktır. Denklemin hiçbir çözümünün bulunmaması veya her gerçek sayı için doğru olması da çözüm sürecinin anlamlı sonuçlarıdır. Uzun sözel problem türleri sonraki Matematik Problemleri modülünde ayrıca ele alınacak; burada kısa, özgün durumlar matematiksel ifadeye dönüştürmeyi göstermek için kullanılacaktır.

1. Eşitlik, cebirsel ifade ve denklem arasındaki fark

Bir cebirsel ifade, sayıların ve değişkenlerin işlemlerle birleştirilmesidir. Örneğin 3x + 5 ifadesinde x değişken, 3 onun katsayısı, 5 ise sabit terimdir. Değişkene bir sayı verildiğinde ifadenin değeri bulunabilir. Ancak eşittir işareti bulunmayan 3x + 5 tek başına denklem değildir. 3x + 5 = 26 yazıldığında iki ifadenin eşit olduğu öne sürülür ve x'in hangi değerinde bu ilişkinin gerçekleştiği incelenir.

Eşitlik, sol ve sağ tarafın aynı değeri göstermesi anlamındadır. Denklem, en az bir bilinmeyen barındıran ve bazı değerler için doğruluğu araştırılan eşitliktir. 6 + 4 = 10, değişken içermeyen doğru bir sayısal eşitliktir. 6 + 4 = 11 ise yanlış sayısal eşitliktir; her ikisi de bu bağlamda bilinmeyenli denklem değildir. 3x + 5 = 26 için x = 7 seçildiğinde sol taraf 3·7 + 5 = 26 olur ve sağ tarafla eşitlenir. x = 6 seçilirse sol taraf 23 olur; bu değer denklemi sağlamaz. Böylece bir denklemin doğru olup olmaması, değişkene atanan değere bağlı olabilir.

Cebirsel ifade, sayısal eşitlik ve denklem

Gösterim	Tür	Açıklama
4y − 2	Cebirsel ifade	Eşittir işareti yoktur
12 − 5 = 7	Doğru sayısal eşitlik	Bilinmeyen bulunmaz
12 − 5 = 8	Yanlış sayısal eşitlik	Bilinmeyen bulunmaz
4y − 2 = 18	Denklem	y değerine bağlıdır
2(x + 1) = 2x + 2	Her x için doğru eşitlik	Özdeşlik durumuna örnektir

2. Birinci dereceden denklemin yapısı, bilinmeyen ve çözüm kümesi

Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem, işlemler ve sadeleştirme sonunda a·x + b = 0 biçimine getirilebilen ve a katsayısı sıfırdan farklı olan denklemdir. Burada x bilinmeyen veya değişken, a değişkenin katsayısı, b sabit terimdir. Bu bölümde ayrıca bir koşul belirtilmedikçe a, b ve x gerçek sayıdır. Birinci derece ifadesi, sadeleştirilmiş denklemde bilinmeyenin birinci kuvvetle bulunmasını anlatır. Bir denklemin iki tarafında x bulunması veya parantez kullanılması, kendi başına denklemin derecesini artırmaz.

Denklemi doğru yapan x değerine kök ya da çözüm denir. Bütün köklerden oluşan kümeye çözüm kümesi denir ve Ç ile gösterilebilir. Örneğin 7x + 21 = 0 denkleminde 7x = −21, dolayısıyla x = −3 bulunur. Geri kontrol 7·(−3) + 21 = −21 + 21 = 0'dır; çözüm kümesi Ç = {−3} olur. x'in tek bir değerde bulunması ile bütün gerçek sayılar için eşitliğin sağlanması birbirine karıştırılmamalıdır.

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -b/a$$

Anlamı: Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin tek gerçek kökü sabit terimin ters işaretlisi ile değişken katsayısının bölümüdür.

Koşullar: a, b ∈ ℝ; a ≠ 0. Çözüm kümesi ℝ üzerinde Ç = {−b/a} olur.

Birinci dereceden denklemin temel öğeleri

Öğenin adı	7x + 21 = 0 örneğindeki karşılığı	Anlamı
Bilinmeyen	x	Değeri araştırılan gerçek sayı
x'in katsayısı	7	Bilinmeyeni çarpan sayı
Sabit terim	21	Bilinmeyenden bağımsız terim
Kök	−3	Eşitliği sağlayan değer
Çözüm kümesi	{−3}	Uygun bütün köklerin kümesi

3. Eşdeğer denklemler ve eşitliğin iki tarafına uygulanan işlemler

İki denklem aynı çözüm kümesine sahipse eşdeğerdir. Denklem çözerken yapılan dönüşümlerin amacı, başlangıç denklemini ona eşdeğer ve daha yalın bir denkleme çevirmektir. Eşitliğin iki tarafına aynı gerçek sayıyı veya aynı tanımlı ifadeyi eklemek ve iki taraftan çıkarmak, eşitliği sağlayan değerleri değiştirmez. Eşitliğin iki tarafını aynı sıfırdan farklı sabit sayıyla çarpmak veya bölmek de çözüm kümesini korur. Bu nedenle günlük dilde kullanılan “karşı tarafa geçince işaret değiştirir” kısaltmasının dayanağı, gerçekte iki tarafa da aynı işlemin uygulanmasıdır.

Örneğin x − 9 = −15 denkleminde her iki tarafa 9 eklenirse x = −6 çıkar. Kontrol: −6 − 9 = −15. Bu sonuç, −15 + 9 = −6 ters işlemiyle de doğrulanır. Benzer biçimde −4x = 28 denkleminde iki taraf −4'e bölündüğünde x = −7 bulunur. Kontrol: (−4)·(−7) = 28. Buradaki bölen −4, sıfır olmadığı için bölme geçerlidir.

İki tarafı sıfırla çarpmak çözüm kümesini korumaz: x = 5 denklemi yalnız 5 ile sağlanırken 0·x = 0 eşitliği her gerçek x için doğrudur. Benzer biçimde içinde bilinmeyen olan bir ifadeye bölme yapılırken bu ifadenin sıfır olma olasılığı önceden incelenmelidir. Sıfıra bölme hiçbir koşulda geçerli değildir; iki tarafa farklı işlemler uygulamak ise genel olarak eşitliği bozacaktır.

$$A = B \Leftrightarrow A + c = B + c;\ A = B \Leftrightarrow cA = cB\ (c \neq 0)$$

Anlamı: İki tarafa aynı sayı eklemek veya aynı sıfırdan farklı sabitle çarpmak çözüm kümesini değiştirmez; çıkarma ve uygun bölme bu işlemlerin tersidir.

Koşullar: İfadeler tanımlı olmalıdır; c gerçek sayı, çarpma/bölmeyle eşdeğerlik için $c \neq 0$ olmalıdır. Bilinmeyene bağlı sıfır olabilen çarpanlar ayrıca değerlendirilir.

Eşdeğerlik ve sıfıra bölme "Terimi karşı tarafa geçirmek" tek başına yeni bir kural değildir; iki tarafa aynı işlemi uygulamanın kısa anlatımıdır. İki tarafı sıfıra bölmek tanımsızdır; iki tarafı sıfırla çarpmak ise önceki çözümleri ayırt etme bilgisini yok eder.

4. Tek adımlı ve iki adımlı doğrusal denklemler

Doğrudan x + c = d biçimindeki bir denklemde bilinmeyen, iki taraftan c çıkarılarak yalnız bırakılır. cx = d biçimindeki denklemde ise c sıfırdan farklıysa her iki taraf c'ye bölünür. İki işlem içeren doğrusal denklemlerde çoğu zaman önce sabit terim kaldırılır, ardından değişkenin katsayısına bölünür. İşlemlerin sırasını düzenli tutmak ara adımlarda işaret hatalarını azaltır.

Örneğin 5x − 14 = 11 denkleminde iki tarafa 14 eklenir: 5x = 25. İki taraf 5'e bölünür ve x = 5 bulunur. Başlangıçtaki sol taraf 5·5 − 14 = 25 − 14 = 11 olduğundan sonuç sağlanır. Ters yönden bakıldığında x = 5 değeri önce 5 ile çarpılır, sonra 14 çıkarılır; başlangıçta verilen 11'e ulaşılması işlemi bağımsız denetler.

Tek ve iki adımlı denklemlerde ters işlem

Denklem	İzin verilen dönüşüm	Çözüm	Yerine koyma kontrolü
x + 8 = 3	Her iki taraftan 8 çıkar	x = −5	−5 + 8 = 3
x − 9 = −15	Her iki tarafa 9 ekle	x = −6	−6 − 9 = −15
−4x = 28	İki tarafı −4'e böl	x = −7	(−4)·(−7) = 28
5x − 14 = 11	14 ekle, 5'e böl	x = 5	25 − 14 = 11

5. Bilinmeyenin iki tarafta bulunduğu denklemler

Bilinmeyen aynı eşitliğin hem solunda hem sağında bulunabilir. Böyle bir durumda değişkenli terimler eşitliğin bir tarafında, sabit terimler diğer tarafında toplanacak şekilde iki tarafa aynı işlemler uygulanır. Elde edilen değişken katsayısı sıfırdan farklıysa tek kök bulunur. Burada terimlerin yalnız aynı tür olanları birleştirilir: 8x ile 3x toplanabilir, ancak 8x ile 3 doğrudan 11x hâline getirilemez.

Örneğin 8x − 5 = 3x + 20 denkleminde iki taraftan 3x çıkarılırsa 5x − 5 = 20 kalır. Her iki tarafa 5 eklenerek 5x = 25 elde edilir ve x = 5 bulunur. Bağımsız yerine koyma kontrolünde sol taraf 8·5 − 5 = 35, sağ taraf 3·5 + 20 = 35'tir. İki taraftaki değerler gerçekten eşittir.

Genel biçimde ax + b = cx + d denkleminden (a − c)x = d − b elde edilir. Eğer a − c sıfırdan farklıysa x = (d − b)/(a − c) bulunur. a = c durumunda ise değişkenli terimler tamamen yok olur; sabitlerin eşit olup olmadığı ayrıca araştırılmalıdır. Dolayısıyla görünüşte her iki tarafında x bulunan bütün denklemlerin tek kökü vardır denilemez.

$$ax + b = cx + d \Rightarrow (a - c)x = d - b \Rightarrow x = (d - b)/(a - c)$$

Anlamı: Bilinmeyenleri aynı tarafta toplamak, birinci dereceden denklemi tek katsayılı biçime dönüştürür.

Koşullar: a, b, c, d gerçek sayıdır; son bölme yalnız $a - c \neq 0$ iken yapılabilir. $a = c$ özel olarak incelenir.

Değişkenli ve sabit terimleri ayırma

Başlangıç	Düzenlenmiş eşitlik	Sonuç	Kontrol
$8x - 5 = 3x + 20$	$5x = 25$	$x = 5$	$35 = 35$
$9x + 2 = 4x - 18$	$5x = -20$	$x = -4$	$-34 = -34$
$7x - 3 = 7x + 1$	$-3 = 1$	Ç = ∅	Yanlış sabit eşitlik
$4x + 9 = 2x + 2x + 9$	$9 = 9$	Ç = $\mathbb{R}$	Her değer için doğru

6. Parantezli denklemlerde dağılma ve işaret düzeni

Parantez bulunan bir denklemin çözümünde önce çarpmanın toplama veya çıkarma üzerine dağılma özelliği uygulanabilir. Parantezden önce eksi işareti varsa parantezin tümü −1 ile çarpılır; yalnız ilk terimin işaretini değiştirmek yeterli değildir. Ardından benzer terimler toplanarak denklem yalınlaştırılır. Bu dönüşümler önceki modülde açıklanan dört işlem ilkeleriyle uyumludur.

Örneğin $3(2x - 5) - 2(x + 4) = 13$ denkleminde parantezler açılınca $6x - 15 - 2x - 8 = 13$ elde edilir. Benzer terimler birleştiğinde $4x - 23 = 13$, buradan $4x = 36$ ve $x = 9$ olur. Sonuç, ilk ifadeye konularak bağımsız kontrol edilir: $3(18 - 5) - 2(9 + 4) = 3\cdot13 - 2\cdot13 = 39 - 26 = 13$. İşlemler ters yönde takip edildiğinde de $4\cdot9 - 23 = 13$ sağlanır.

İç içe parantezli $-[2x - (3 - x)] = 9$ eşitliğinde önce iç grup çıkarılır: $2x - (3 - x) = 2x - 3 + x = 3x - 3$ olur. Dıştaki eksi uygulandığında $-3x + 3 = 9$; ardından $-3x = 6$ ve $x = -2$ bulunur. Başlangıca doğrudan yerleştirme: $2\cdot(-2) - [3 - (-2)] = -4 - 5 = -9$ ve bunun dışarıdan negatifi 9'dur. Sonuç doğrulanmıştır. Bu denetim, negatif işaretin tüm iç ifadeye uygulandığını da gösterir.

Parantez açılırken işaret ve katsayı dağılımı

Parantezli gösterim	Eşdeğer açık gösterim	Açıklama
$3(2x - 5)$	$6x - 15$	Her terim 3 ile çarpılır
$-2(x + 4)$	$-2x - 8$	İki terime de −2 uygulanır
$-(3 - x)$	$-3 + x$	Bütün parantezin işareti değişir
$2(x - 1) - (x + 5)$	$x - 7$	$2x - 2 - x - 5$ birleştirilir

7. Sabit paydalı kesirli denklemler

Kesirli katsayı veya sabit içeren birinci dereceden denklemlerde, paydaların sıfır olmadığı biliniyorsa eşitliğin iki tarafı bütün paydaların ortak pozitif katıyla çarpılarak kesirler kaldırılabilir. Buradaki amaç sayının değerini değiştirmek değil, eşitliğin iki tarafını aynı sıfırdan farklı sayıyla çarparak eşdeğer bir denklem elde etmektir. Payda içeren bir terimin payındaki parantez bütünüyle korunmalıdır. Paydası bilinmeyenli ifadeler ise burada incelenen sabit paydalı doğrusal denklem sınıfından farklı kısıtlar gerektirebilir.

Örneğin (2x − 1)/3 − (x + 2)/4 = 5/6 denkleminin paydaları 3, 4 ve 6'dır. En küçük ortak pozitif kat 12 olduğundan iki taraf 12 ile çarpılır. Böylece 4(2x − 1) − 3(x + 2) = 10 elde edilir. Açılıp sadeleştirilince 8x − 4 − 3x − 6 = 10, yani 5x − 10 = 10 bulunur. 5x = 20 eşitliği x = 4 sonucunu verir. İlk denklemde kontrol: (8 − 1)/3 − (4 + 2)/4 = 7/3 − 6/4 = 14/6 − 9/6 = 5/6. Sonucu ortak payda yöntemiyle ikinci kez hesaplamak da eşitliğin korunduğunu gösterir.

İkinci bir örnek olarak (3x + 2)/5 = (x − 1)/2 + 1 ele alınsın. İki tarafın 10 ile çarpılması 2(3x + 2) = 5(x − 1) + 10 verir. 6x + 4 = 5x + 5 olduğundan x = 1 bulunur. Başlangıçta sol taraf (3 + 2)/5 = 1, sağ taraf (1 − 1)/2 + 1 = 1'dir. Bir kesirli denklemde 12 ya da 10 gibi ortak katla çarpma, yalnız bütün paydalar sabit ve sıfırdan farklı olduğu için güvenlidir.

$$A(x)/p + B(x)/q = C(x)/r \Rightarrow L\cdot A(x)/p + L\cdot B(x)/q = L\cdot C(x)/r$$

Anlamı: Bütün paydaların ortak sıfırdan farklı katı L ile çarpılarak kesirli katsayılar ortadan kaldırılabilir.

Koşullar: p, q, r sıfırdan farklı sabit tam sayıdır; L ≠ 0 bunların ortak katıdır. A(x), B(x), C(x) doğrusal veya sabit ifadelerdir.

Sabit paydalı denklemlerde eşdeğerlik adımları

Denklem	Ortak kat	Kesirsiz biçim	Bulunan kök
(2x − 1)/3 − (x + 2)/4 = 5/6	12	4(2x − 1) − 3(x + 2) = 10	4
(3x + 2)/5 = (x − 1)/2 + 1	10	2(3x + 2) = 5(x − 1) + 10	1
x/6 + 1/2 = 5/3	6	x + 3 = 10	7

Son satırın kontrolü x = 7 için 7/6 + 1/2 = 7/6 + 3/6 = 10/6 = 5/3 biçimindedir. Dolayısıyla tabloda verilen sonuç yalnız cebirsel dönüşümden değil, başlangıç eşitliğinden de doğrulanmaktadır.

8. Ondalık katsayılar ve işlemlerin kesinliği

Ondalık yazımlı bir denklemde katsayıları uygun bir 10 kuvvetiyle çarparak tam sayı biçimine getirmek çoğu zaman işlemi kolaylaştırır. Bu dönüşümde eşitliğin her iki tarafı aynı sayı ile çarpılmalıdır. Alternatif olarak bütün sonlu ondalık sayılar kesre çevrilebilir. Her iki yöntem tam hesap verir; ara adımlarda gereksiz yuvarlama yapmak son kökü değiştirebileceğinden kaçınılmalıdır.

Örneğin 0,4x + 1,25 = 3,65 denkleminde önce her iki taraftan 1,25 çıkarılır ve 0,4x = 2,40 elde edilir. İki taraf 0,4'e bölünürse x = 6 olur. Aynı sonuç, başlangıç denkleminin iki tarafını 100 ile çarparak 40x + 125 = 365 biçimine getirince bulunur: 40x = 240, x = 6. Bağımsız denetim: 0,4·6 + 1,25 = 2,4 + 1,25 = 3,65.

Ondalık katsayıları kesre veya tam sayıya dönüştürme

Gösterim	Eşdeğer kesirli biçim	100 ile çarpıldığında
0,4	2/5	40
1,25	5/4	125
3,65	73/20	365
0,4x + 1,25 = 3,65	(2/5)x + 5/4 = 73/20	40x + 125 = 365

9. Tek kök, çözümsüzlük ve sonsuz çözüm durumları

Denklemin sadeleştirilmiş ax + b = 0 biçiminde a katsayısı sıfırdan farklıysa bir gerçek kök bulunur. Eğer a = 0 ise ifade birinci dereceden denklem olmaktan çıkar; bu durumda 0x + b = 0 eşitliği kalır. b = 0 olduğunda eşitlik bütün gerçek sayılarda doğrudur ve çözüm kümesi ℝ'dir. b sıfırdan farklı olduğunda ise 0 = −b türünden yanlış bir eşitlik elde edilir; hiçbir gerçek sayı çözüm olamaz ve çözüm kümesi boş küme, yani ∅ olur.

Örneğin 2(x + 3) − 4 = 2x + 2 eşitliğinin sol tarafı 2x + 2 olduğundan iki taraf özdeştir. x = 0 için 2 = 2, x = −5 için −8 = −8 bulunur. Bu iki kontrol her değere ilişkin genel sonucu tek başına kanıtlamaz; asıl kanıt, her gerçek x için iki tarafın aynı 2x + 2 ifadesi olmasıdır. Bu nedenle çözüm kümesi ℝ'dir. Buna karşılık 5(x − 1) = 5x + 3 denkleminde 5x − 5 = 5x + 3, ardından −5 = 3 çıkar. Değişken tümüyle silinmiş fakat yanlış eşitlik kaldığından çözüm kümesi ∅'dir.

> $ax + b = 0$ için $a \neq 0 \Rightarrow Ç = \{-b/a\}$; $a = 0$ ve $b = 0 \Rightarrow Ç = \mathbb{R}$; $a = 0$ ve $b \neq 0 \Rightarrow Ç = \emptyset$
>
> **Anlamı:** Denklem sadeleştiğinde değişken katsayısı ve sabit terime göre çözümün varlığı belirlenir.
>
> **Koşullar:** x için tanım kümesi ℝ'dir. a = 0 olduğunda elde edilen eşitlik birinci dereceden denklem değildir; başlangıçtaki görünüm ne olursa olsun özel durum ayrıca incelenir.

Sadeleştirme sonucuna göre çözüm kümesi

Son eşitlik	Matematiksel durum	Çözüm kümesi
6x = 24	Katsayı sıfırdan farklı	{4}
0x = 0	Her gerçek değer sağlar	ℝ
0x = 5	Hiçbir değer sağlamaz	∅
5x − 5 = 5x + 3	−5 = 3 yanlışlığına dönüşür	∅
2(x + 3) − 4 = 2x + 2	Her iki taraf aynı ifadedir	ℝ

10. Katsayının bir parametreye bağlı olması

Bir denklemde değişken dışında başka bir harf daha varsa hangi harfin bilinmeyen, hangisinin verilen ancak değeri değişebilen katsayı olduğu açıklanmalıdır. Parametre denen katsayıya farklı değerler verildiğinde denklem tek köklü, çözümsüz veya bütün gerçek sayılar için doğru hâle gelebilir. Bu nedenle parametreli denklemlerde, bilinmeyeni içeren katsayıya bölmeden önce katsayının sıfır olduğu durum mutlaka ayrılır.

Örneğin (k − 2)x = 6 denkleminde x bilinmeyen, k gerçek parametredir. k ≠ 2 iken katsayı sıfırdan farklıdır; her iki taraf k − 2'ye bölünerek x = 6/(k − 2) bulunur. k = 5 seçilirse x = 6/3 = 2 olur ve (5 − 2)·2 = 6 denklemi sağlanır. Fakat k = 2 olduğunda denklem 0·x = 6'ya dönüşür; hiçbir x için doğru değildir. Bu özel durumda “x = 6/0” yazılamaz; çözüm yoktur.

Başka bir parametreli ilişki (m − 4)x = m − 4 olsun. m ≠ 4 iken iki taraf sıfırdan farklı ortak katsayıya bölünür ve x = 1 bulunur; geri yerine koyma (m − 4)·1 = m − 4 eşitliğini doğrular. m = 4 ise 0·x = 0 elde edilir; bütün gerçek x değerleri denklemi sağlar. Aynı başlangıç gösteriminin farklı parametrelerde farklı çözüm kümesine sahip olması, katsayıyı sıfır olabileceği hâlde iptal etmenin neden sakıncalı olduğunu ortaya koyar.

$$(k-2)x = 6 \Rightarrow k \neq 2 \text{ için } x = 6/(k-2);\ k = 2 \text{ için Ç} = \varnothing$$

Anlamı: Parametreli denklemlerde bilinmeyenin katsayısı sıfır olursa bölme yapılmaz; oluşan sabit eşitlik değerlendirilir.

Koşullar: k, x ∈ ℝ. x = 6/(k − 2) gösterimi yalnız k ≠ 2 iken tanımlıdır.

Parametreye göre çözüm kümesinin değişmesi

Denklem	Parametre koşulu	Sonuç	Gerekçe
(k − 2)x = 6	k ≠ 2	Ç = {6/(k − 2)}	Katsayı sıfır değildir
(k − 2)x = 6	k = 2	Ç = ∅	0x = 6 yanlışlığı
(m − 4)x = m − 4	m ≠ 4	Ç = {1}	İki taraf sıfırdan farklı katsayıya bölünebilir
(m − 4)x = m − 4	m = 4	Ç = ℝ	0x = 0 özdeşliği

11. Kısa sözel ilişkileri denklem olarak ifade etme

Denklem kurmada ilk adım, bilinmeyenin hangi niceliği temsil ettiğini ve ölçü birimini belirtmektir. Ardından verilen ilişkinin her parçası cebirsel olarak yazılır. İki tarafa yerleştirilen niceliklerin aynı türden ve aynı birimde olması gerekir. Sonuç bulunduğunda yalnız yerine koyma değil, gerçek durumun koyduğu sınırlar da değerlendirilir. Bir miktarın adet olması ile uzunluk veya ücret olması, denklem aynı biçimde kurulsa bile kabul edilebilir sonuçları farklılaştırabilir.

Temsili bir işlem ücretinde sabit başlangıç bedeli 35 TL ve her bir birim hizmet için 8 TL alınsın. Toplam ödeme 83 TL ise birim sayısı x olsun. Burada x adet cinsinden ve negatif olmayan tam sayı olmalıdır; toplam ücret 35 + 8x TL'dir. 35 + 8x = 83 denklemi 8x = 48 ve x = 6 sonucunu verir. İlk bilgilere dönüşte 35 TL + 8 TL/birim · 6 birim = 83 TL'dir. Sonuç hem eşitliği sağlar hem de birim sayısı bakımından geçerli doğal sayıdır. Bu örnek, gerçek bir tarife verisi değil, öğretim amacıyla oluşturulmuş temsili bir ilişkidir.

Benzer biçimde uzunluğu 41 metre olan bir şeritten 5 metre ayrılmış, kalan uzunluk üç eşit parçaya bölünmüş olsun. Bir parçanın uzunluğu t metre ise 3t + 5 = 41 denklemi elde edilir. Buradan 3t = 36, t = 12 metredir. Ters kontrol üç parçanın toplamının 3·12 = 36 metre, ayrılan kısımla bütünün 36 + 5 = 41 metre olmasıdır. t'nin pozitif uzunluk olması koşulu da sağlanır. İlerideki problem modülünde daha çok aşamalı durumlar işlenecektir; burada amaç, metinsel ilişkinin iki eşit ifadeye doğru çevrilmesidir.

Kısa sözel ilişkilerde nicelik, birim ve denklem

Nicelik	Bilinmeyenin tanımı	Kurulan denklem	Çözümün anlamı
Temsili hizmet ücreti	x = hizmet birimi adedi	35 + 8x = 83 (TL)	x = 6 birim
Eşit parçalı şerit	t = bir parçanın metre uzunluğu	3t + 5 = 41 (metre)	t = 12 metre
Bir sayının dört katına yedi eklenmesi	n = aranan gerçek sayı	4n + 7 = 31	n = 6

Son satırın kontrolü 4·6 + 7 = 31 eşitliğidir. Bir denklemin kurulması, uygun harf seçimiyle başlar; ancak doğru birimler, eşitlik koşulu ve geri kontrol olmadan model tamamlanmış sayılmaz.

12. Tanım kümesi ile kabul edilebilir sonuçların ayrılması

Bir denklemin hangi sayı kümesinde çözüleceği bazen açıkça belirtilir. x gerçek sayı olduğunda x = 5/2 denkleminin çözümü vardır; x tam sayı olarak sınırlandırıldığında ise aynı eşitliğin kabul edilebilir tam sayı çözümü yoktur. Örneğin 2x = 5 denkleminde gerçek sayılar üzerindeki tek kök x = 5/2 = 2,5'tir; yerine koyma 2·2,5 = 5'i sağlar. Ancak x ∈ ℤ koşulunda 2,5 tam sayı olmadığından çözüm kümesi ∅ olur. Bu, cebirsel işlemin yanlış olduğu anlamına gelmez; verilen tanım kümesine göre sonuç değerlendirilir.

Sözel bir durumda "kişi sayısı" veya "tam paket adedi" gibi nicelikler uygun biçimde tam sayı ve negatif olmayan olmalıdır. Uzunluk, süre ve ücret ise bağlama göre kesirli değerler alabilir. Bu ayrım, denklemin tek kökü hesaplandıktan sonra değil, değişken ilk tanımlandığında bilinmelidir. Bir denklemin birimlerini eşitliğin iki yanında aynı tür olarak kullanmak da tanım koşulunun önemli parçasıdır.

> **Sayı kümesi ve sonuç anlamı** Bir kökün denklemi cebirsel olarak sağlaması, her uygulama için kabul edilebilir olduğu anlamına gelmez. 2x = 5 denklemi ℝ üzerinde x = 2,5 köküne sahiptir; x'in tam sayı olması ayrıca istenirse uygun çözüm bulunmaz. Değişkenin sayı kümesi ve ölçü birimi önceden belirlenmelidir.

13. Bilinmeyenin paydada bulunduğu ifadeler ve geçersiz dönüşüm riski

Bilinmeyenin paydada bulunduğu gösterimler, burada ele alınan sabit katsayılı ax + b = 0 denkleminden farklı tanım koşulları taşıyabilir. Böyle bir ifadeyi düzenleyerek doğrusal bir eşitlik elde etmek, başlangıçtaki tanım yasağını ortadan kaldırmaz. Örneğin $(x^2 - 4)/(x - 2) = 5$ ifadesi ancak x ≠ 2 iken tanımlıdır. Pay (x − 2)(x + 2) biçiminde ayrıldığında x ≠ 2 için eşitlik x + 2 = 5'e sadeleşir ve x = 3 bulunur. Başlangıç denetimi (9 − 4)/(3 − 2) = 5/1 = 5'tir. Bu örnek başlangıçta birinci dereceden denklem değildir; yalnız tanım kümesi korunduğunda doğrusal bir eşitliğe sadeleşebilen bir ifadeyi göstermektedir.

Paydası x − 2 olan başka bir ifadede iki taraf bu payda ile çarpılırken x = 2 sayısı zaten tanım dışıdır. Paydanın sıfır olabileceği değerleri atlamak, gerçekte bulunmayan çözüm ekleme tehlikesi yaratır. Aynı şekilde bir denklemin iki tarafında ortak görünen x çarpanını doğrudan bölerek sadeleştirmek, x = 0 olasılığını fark edilmeden silebilir. Bu tür adımlar daha ileri cebirsel denklemlerde ayrıntılandırılacaktır. Birinci dereceden denklemler çözülürken de değişken katsayısı sıfır olabileceği zaman bölmenin neden ayrıca değerlendirilmesi gerektiği aynı ilkeye dayanır.

14. Çözümü yerine koyarak doğrulama ve işlemlerin bütünlüğü

Denklemin çözümü, elde edilen sayıyı başlangıçtaki eşitliğin iki tarafına ayrı ayrı yerleştirerek tamamlanır. Ara adımlardan yalnız sonuncusunu kontrol etmek bazı hataları gizleyebilir; özellikle parantez açma, eksi işareti, kesirli terimler ve parametreye bölme bulunan denklemlerde doğrudan başlangıca dönmek daha güvenlidir. Elde edilen sol ve sağ değerlerin eşit olması, bulunan adayın kök olduğunu gösterir. Tek kök iddiası için ayrıca yapılan dönüşümlerin eşdeğerliği ve sıfırdan farklı katsayı koşulu da doğrulanmış olmalıdır.

Örneğin 9x + 2 = 4x − 18 denkleminin dönüşümü 5x = −20, dolayısıyla x = −4'tür. İlk denklemde sol taraf 9·(−4) + 2 = −36 + 2 = −34, sağ taraf 4·(−4) − 18 = −16 − 18 = −34 olarak hesaplanır. İkinci bir yöntem, başlangıç denkleminden 4x ve 2 terimlerini iki taraftan çıkararak 5x = −20'ye ulaşmak ve −4 ile çarparak eşitliği denetlemektir. Hem yerine koyma hem eşdeğer dönüşüm aynı kökü verir.

Birinci dereceden denklem çözümünde işlem ve sonuç denetimi

Kontrol aşaması	Aranan özellik	Hatalı uygulama riski
Değişkeni belirleme	x'in sayı kümesi ve gerekiyorsa birimi açık	Denklem dışı değer kabul etmek
Terimleri düzenleme	İki tarafa aynı işlem uygulanmış	İşareti yalnız görünüşe göre değiştirmek
Parantezleri açma	Katsayı bütün terimlere uygulanmış	Eksi işaretini eksik dağıtmak
Bölme	Bölünen katsayı sıfırdan farklı	Sıfıra bölmek veya özel durumu kaybetmek
Sonuç kontrolü	Bulunan kök ilk denklemde iki tarafı eşitler	Yalnız son ara eşitliği denetlemek

Son denetim Doğrusal bir denklemin çözümünde önce değişkenin tanım koşulu, sonra eşdeğer işlemler, en sonunda başlangıç eşitliğinde yerine koyma kontrol edilir. Değişken katsayısı sıfır olursa kök formülü kullanılmaz; kalan sabit eşitlik doğruysa bütün uygun değerler, yanlışsa hiçbir değer çözüm değildir.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözmek, eşitliği bozmayan işlemler yoluyla bilinmeyenin değerini görünür kılmaktır. Tek kök, çözüm yokluğu ve bütün değerlerin çözüm olması ayrımları sadeleştirilmiş eşitliğin koşullarından çıkar. Kesir ve ondalık katsayılar, parantezler, iki taraftaki değişken terimleri ve parametreler yöntemleri değiştirse de temel ölçüt değişmez: Bulunan her sonuç başlangıç eşitliğini ve varsa sayı kümesi ile birim koşullarını sağlamalıdır. Bir sonraki konuda iki nicelik arasındaki oran ve orantı ilişkileri ele alınacaktır.

KONU 2.2

ORAN VE ORANTI

İki miktarın yalnızca farkını bilmek, aralarındaki ilişkinin tamamını açıklamayabilir. Bir stokta bulunan iki malzemenin adetleri arasındaki fark 12 olabilir; ancak bu farkın, miktarları 18 ve 30 olan iki grup için taşıdığı anlam ile miktarları 180 ve 192 olan gruplar için taşıdığı anlam aynı değildir. Oran, bu tür karşılaştırmalarda bir niceliğin diğerine göre kaç kat veya hangi kesirde olduğunu gösterir. Orantı ise farklı iki oran arasında eşitlik kurar. Bu bölümde oranların hangi şartlarda anlamlı olduğu, birim ve yönün niçin önemli olduğu, doğru ve ters orantının nasıl ayırt edildiği açıklanacaktır. Kesir işlemlerinin temel kuralları GY-01.07'de, birinci dereceden denklemler GY-02.01'de ele alındığından bu araçlar burada gerekli yerlerde kullanılır.

1. Oran: İki niceliği çarpımsal bakımdan karşılaştırma

Bir a niceliğinin b niceliğine oranı, b sıfırdan farklı olmak koşuluyla a/b veya a:b biçiminde gösterilir. Bu karşılaştırmada ilk nicelik payda değil, pay veya oranın ilk terimidir. Örneğin bir üretim tablosunda A bölümünde 36, B bölümünde 24 ürün bulunuyorsa A'nın B'ye oranı 36/24 = 3/2'dir. Bunun anlamı, A miktarının B miktarının 1,5 katı olmasıdır. B'nin A'ya oranı ise 24/36 = 2/3'tür. Oranın sırasını değiştirmek çoğu durumda değeri değiştirir; aynı oranı yeniden yazmak için hem miktarların sırası hem de birimleri izlenmelidir.

36 ile 24 arasındaki fark 12'dir. Ancak 3/2 oranı, miktarlardan birinin diğerine göre yüzde elli fazla olduğunu (taban B = 24) ifade eder. Yüzde terimi burada yalnız karşılaştırmanın dilini açıklamak için kullanılmıştır; yüzdelerin sistematik hesaplaması GY-02.03'te yapılacaktır. Bağımsız kontrol 24·(3/2) = 36'dır. Oran 3/2 çıktığı hâlde A = 36 ile B = 24 bilgisi tek başına orandan geri kazanılamaz; 3 ve 2, 60 ve 40 gibi sayılar da aynı orandadır. Oran göreli büyüklüğü bildirir, mutlak miktarı her zaman bildirmez.

$$a'nın\ b'ye\ oranı = a/b = a:b$$

Anlamı: a'nın b'ye göre çarpımsal büyüklüğü; sıra önemlidir.

Koşullar: a ve b karşılaştırılabilen sayısal niceliklerdir ve b ≠ 0'dır. a = 0 olabilir; paydası 0 olan oran tanımsızdır.

Oranın yönü ve farkla ilişkisi

Karşılaştırma	Oran	Kesrin sade biçimi	Yorum
A = 36 ürün, B = 24 ürün; A/B	36/24	3/2	A, B'nin 1,5 katıdır
B = 24 ürün, A = 36 ürün; B/A	24/36	2/3	B, A'nın üçte ikisidir
A ile B'nin farkı	36 − 24	12 ürün	Oran değil, mutlak farktır
60 ürün ve 40 ürün; ilk/ikinci	60/40	3/2	İlk ikiliyle aynı oran, farklı miktarlar

2. Birim dönüşümü, birimli ve birimsiz oranlar

Aynı türden büyüklükler oranlandığında birimler aynı cinse çevrildikten sonra sadeleşir. 1,8 metre uzunluğun 75 santimetreye oranı doğrudan 1,8/75 değildir; önce 1,8 m = 180 cm yazılır. Bundan sonra 180/75 = 12/5 = 2,4 elde edilir. Ters kontrol 75 cm · 2,4 = 180 cm'dir. Farklı birimler ortak cinse çevrilmeden yapılan sayısal bölme, görünüşte geçerli olsa da yanlış bir karşılaştırma üretir.

Farklı türden niceliklerin oranı ise birim taşır ve çoğu zaman birim oran adıyla kullanılır. 210 kilometrelik yolun 3 saatte alınması durumunda yolun zamana oranı 210 km / 3 saat = 70 km/saat olur. Bu sayı, bir saat başına düşen mesafeyi açıklar; burada verilen yolun sabit hızla alındığı varsayılırsa hız olarak da yorumlanabilir. Zamana göre yolun her an aynı hızla arttığı belirtilmemişse toplam yolun toplam süreye oranı ortalama hız değeridir. Bağımsız kontrol 70 km/saat · 3 saat = 210 km'dir.

Birimsiz oran ile birimli oran birbiri yerine kullanılamaz. Örneğin 70 km/saat değerinin “70” biçiminde bırakılması, 70 km/dakika ile karışmasına yol açar. Aynı fiziksel hız 70/60 = 7/6 km/dakika olarak yazılabilir; rakam değişir ama büyüklük değişmez. Oran sonuçlarının yorumunda, payın ve paydanın ölçtüğü nicelikleri belirtmek hesap kadar önemlidir.

Oranlarda birim denetimi

Nicelikler	Ön hazırlık	Doğru oran	Birim durumu
1,8 m ve 75 cm	180 cm ve 75 cm	180/75 = 2,4	Birimsiz uzunluk oranı
210 km ve 3 saat	Farklı tür nicelikler	210/3 = 70 km/saat	Birimli yol/zaman oranı
48 TL ve 6 kg	Farklı tür nicelikler	48/6 = 8 TL/kg	Birimli bedel/miktar oranı
15 kişi ve 25 kişi	Aynı adet birimi	15/25 = 3/5	Birimsiz kişi sayısı oranı

3. Parça-parça ile parça-bütün oranları birbirinden farklıdır

Bir grupta 18 mavi ve 12 beyaz dosya bulunduğunda mavi dosyaların beyaz dosyalara oranı 18/12 = 3/2'dir. Fakat mavilerin bütün dosyalara oranı 18/(18+12) = 18/30 = 3/5 olur. İlk oran iki farklı parçayı, ikincisi bir parçayı bütünle karşılaştırır. Payda değiştiği için sonuç değişir. Bütün dosyalar 30 adet olduğundan mavi payı 3/5 ve beyaz payı 2/5 olup toplamları 1'dir. Bağımsız kontrol 30·3/5 = 18 ve 30·2/5 = 12'dir.

Birinci oran 3:2 olarak verildiğinde grup toplamı doğrudan beş birimlik paylara ayrılır; ancak toplamın kaç dosya olduğu ayrıca bilinmedikçe gerçek adetlere ulaşılamaz. Bu nedenle oranları okurken “neyin neye oranı?” sorusunun yanıtı açıkça belirtilmelidir. Oranların gerçek sayıya dönüştürülmesiyle ilgili paylaşım ilkeleri aynı konunun sonraki başlıklarında incelenir.

Bir grubun iki farklı oranla anlatılması

Karşılaştırma	Matematiksel ifade	Sonuç	Payda neyi gösterir?
Mavi / beyaz	18/12	3/2	Beyaz parça
Mavi / bütün	18/30	3/5	30 dosyalık bütün
Beyaz / bütün	12/30	2/5	30 dosyalık bütün
Parçaların bütündeki payları	3/5 + 2/5	1	Bütünün tamamı

4. Denk oranlar ve sabit çarpanla ölçekleme

Bir oranın payı ve paydası aynı sıfırdan farklı çarpanla çarpılırsa oran değişmez. Örneğin 4/7 = 12/21 = 20/35'tir. Bu gösterimlerin eşitliği yalnız sayısal sonuçlara bakılarak değil, 4·3/7·3 ve 4·5/7·5 işlemlerinde ortak çarpanın sadeleşmesiyle de açıklanır. Ters yönde pay ile payda aynı ortak pozitif tam bölenle bölündüğünde oran sadeleşir. Bu dönüşümler, miktarların aynı ölçekle büyütülmesini veya küçültülmesini temsil eder.

Ancak paya ve paydaya eşit sayının eklenmesi oranı genel olarak korumaz. 4/7 ile (4+3)/(7+3) = 7/10 farklıdır; çünkü 4/7 = 40/70, 7/10 = 49/70'tir. Eşit ekleme bir miktar değişimidir, ortak çarpanla ölçekleme değildir. Ayrıca payın ve paydanın ikisi de sıfırsa 0/0 tanımsızdır; aynı sayı ile çarpılarak sıfır paydası oluşturulamaz.

$$a/b = (ta)/(tb)$$

Anlamı: Pay ile paydanın aynı sıfırdan farklı çarpanla ölçeklenmesi oranı değiştirmez.

Koşullar: b ≠ 0 ve t ≠ 0 olmalıdır. Niceliklerin ölçü birimleri aynı tutularak genişletme yapılır.

5. Orantı: İki denk oranın eşitliği ve çapraz çarpma

İki oranın eşitliğine orantı denir. a/b = c/d eşitliğinde b ve d sıfırdan farklıdır. Orantıda a ile d dış terimler, b ile c iç terimlerdir. Eşitliğin iki tarafı bd ile çarpıldığında ad = bc elde edilir. Bu, çapraz çarpmanın neden doğru olduğunu gösterir. Yöntem, kesirli eşitliği paydaları kaldırarak doğrusal bir denkleme dönüştürür; payda koşullarını ortadan kaldırmaz.

Örneğin 9/15 = x/35 orantısında 15x = 9·35 = 315 olur ve x = 21 bulunur. Başka bir yoldan 9/15 = 3/5 sadeleşir; 35'in beşte üçü 21'dir. Ters kontrol 21/35 = 3/5'tir. Burada x'in birimi oranlanan nicelikle uyumlu olmalıdır; x sıfırdan farklı payda konumunda olsaydı x = 0 olasılığı ayrıca dışlanırdı.

$$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$$

Anlamı: İki kesirli oran, paydalar sıfırdan farklıysa dışların çarpımı içlerin çarpımına eşit olduğunda birbirine eşittir.
Koşullar: a,b,c,d gerçek sayılardır; b ≠ 0 ve d ≠ 0 koşulları her iki yönde de korunur.

Orantı kurarken eşitlik ve kontrol

İfade	Dönüşüm	Sonuç	Bağımsız denetim
9/15 = x/35	15x = 315	x = 21	21/35 = 3/5
12/18 = 20/x	12x = 360	x = 30	20/30 = 2/3
7/8 = 21/24	7·24 = 8·21	Doğru eşitlik	İki oran da 0,875
5/6 = 8/9	5·9 = 45, 6·8 = 48	Eşit değil	45 ≠ 48

6. Orantı sabiti ve birden fazla nicelik arasında ortak ilişki

Aynı k sayısına eşitlenen a/p = b/q = c/r = k oranları, a = pk, b = qk ve c = rk biçiminde yazılabilir. Burada p, q ve r sıfırdan farklıdır; a, b ve c aynı ölçü biriminde düşünüldüğünde p:q:r oranını sağlayan miktarları temsil eder. Bu gösterim, üç ayrı bilinmeyen yerine tek ölçekleme katsayısı kullanılmasını sağlar.

Örneğin üç bölümün arşiv kutuları 2:3:5 oranında ve toplam 90 kutu olsun. Her oran payı k kutuya karşılık gelir: miktarlar 2k, 3k, 5k olur. Toplam 10k = 90 olduğundan k = 9 kutudur. Miktarlar 18, 27 ve 45 kutudur. Kontrol 18 + 27 + 45 = 90 ve 18/2 = 27/3 = 45/5 = 9'dur. Oran payları, birim olarak “kutu” değildir; bunlar dağılım katsayılarıdır. Ölçülen kutu adedi k ile çarpıldıktan sonra oluşur.

$$a/p = b/q = c/r = k \Rightarrow a = pk,\ b = qk,\ c = rk$$

Anlamı: Birden çok doğrudan orantılı miktarın ortak ölçekleme katsayısıyla gösterimi.
Koşullar: p,q,r ≠ 0'dır; miktarlar adet ise sonuçlar sıfırdan küçük olamaz ve gerektiğinde tam sayı olmalıdır.

2:3:5 oranındaki 90 kutunun dağılımı

Bölüm	Oran payı	Miktar	Kontrol
Birinci	2	2·9 = 18 kutu	18/2 = 9
İkinci	3	3·9 = 27 kutu	27/3 = 9
Üçüncü	5	5·9 = 45 kutu	45/5 = 9
Toplam	10	90 kutu	18+27+45 = 90

7. Doğru orantı: Bölümün sabit kalması

İki değişken nicelik için y/x oranı sabit bir k değerini alıyorsa, x ≠ 0 olan değerlerde y = kx eşitliği sağlanır. Buna doğru orantı denir. x iki katına çıktığında y de iki katına, x üçte bire indiğinde y de üçte bire iner. Yalnız iki büyüklüğün birlikte artması doğru orantı için yeterli değildir; artışların çarpımsal katsayısı sabit olmalıdır. Gerçek yaşam örneklerinde bu ilişki ancak diğer etkileyen koşullar değişmiyorsa geçerlidir.

Sabit birim fiyatın kilogram başına 28 TL olduğu bir alışverişte x kilogram ürünün bedeli y = 28x TL olur; k = 28 TL/kg'dır. 1,5 kg için 42 TL, 4 kg için 112 TL bulunur. Bağımsız kontrol 42/1,5 = 28 ve 112/4 = 28 TL/kg'dır. Ürün miktarı sıfırsa bedelin de sıfır olacağı varsayılmaktadır; sabit teslim veya hizmet ücreti eklenirse ilişki artık y = kx biçiminde olmaz.

$$y = kx \Leftrightarrow y/x = k \ (x \neq 0)$$

Anlamı: Doğru orantılı niceliklerde bölüm sabittir; bir miktarın aynı katsayıyla değişmesi diğerine de yansır.

Koşullar: x,y gerçek sayılardır; k sabit olup gerçek yaşam yorumuna göre pozitif olabilir. Bölüm biçiminde x ≠ 0'dır; y = kx biçiminde x = 0 için y = 0 bulunur.

Sabit kilogram fiyatında doğru orantı

Ürün (kg)	Bedel (TL)	Birim bedel (TL/kg)
0	0	0/0 tanımsız; model y = 28x kökeni içerir
1	28	28
1,5	42	28
4	112	28
6	168	28

8. Ters orantı: Çarpımın sabit kalması

Pozitif iki nicelik için xy = k sabitken biri aynı katsayıyla artarsa diğerinin o katsayıya bölünmesi gerekir. Bu ilişki ters orantıdır. k pozitif sabit için y = k/x yazılabilir; x sıfır olamaz. Ters orantıda iki niceliğin farkı veya oranı sabit kalmak zorunda değildir; sabit olan çarpımlarıdır.

Sabit miktarda ürünün eş üretkenlikte çalışan makineler arasında paylaşıldığı ve bir makinenin işin tamamını 24 saatte yaptığı varsayılsın. Makinelerin birbirini engellemeden eş zamanlı çalışabildiği ideal durumda makine sayısı n ile süre t arasında nt = 24 makine·saat bağıntısı vardır. İki makine için t = 12 saat, üç makine için t = 8 saat, altı makine için t = 4 saattir. Bağımsız kontrolde 2·12 = 3·8 = 6·4 = 24'tür. Bu ilişki işe başlama/bitiş zamanlarının eşitliği, aynı üretim hızı ve sabit iş hacmi varsayımlarına dayanır; kurulum gecikmesi veya kapasite kaybı varsa sonuç değişebilir.

$$xy = k \Leftrightarrow y = k/x$$

Anlamı: Ters orantılı niceliklerde çarpım sabittir; bir niceliğin katlanması diğerini ters katsayıyla değiştirir.

Koşullar: x ≠ 0; k sabittir. İş, zaman, personel ve makine sayısı gibi bağlamlarda x>0, y>0 ve k>0 tercih edilir.

Sabit işte makine sayısı ile tamamlanma süresi

Makine sayısı n	Süre t (saat)	n·t (makine·saat)
1	24	24
2	12	24
3	8	24
6	4	24
8	3	24

9. Doğru ve ters orantıyı artış yönünden değil bağıntıdan ayırma

Bir nicelik artarken diğerinin de artması, doğru orantı bulunduğunu tek başına göstermez. Örneğin y = x + 10 bağıntısında x = 2 için y = 12, x = 4 için y = 14 olur; y artmıştır ama y/x oranı sırasıyla 6 ve 3,5'tir. Sabit bir bölüm bulunmadığı için bu ilişki doğru orantı değildir. Benzer biçimde y = 10 − x bağıntısında x arttığında y azalır; ancak x·y çarpımı sabit olmadığından ters orantı yoktur. Yön bakımından aynı davranış gösteren ilişkiler, matematiksel olarak farklı olabilir.

Doğru orantıda iki sıfırdan farklı ölçüm çifti için $y_1/x_1 = y_2/x_2$ sağlanır. Ters orantıda $x_1y_1 = x_2y_2$ gerekir. Birimlerin değişmemesi, bağıntının geçerli aralıkta uygulanması ve ölçümlerin aynı koşullardan alınması denetimin parçasıdır. Örneğin (x,y) = (2,10), (4,20), (6,30) çiftlerinde oran y/x = 5'tir; (2,30), (4,15), (6,10) çiftlerinde çarpım xy = 60'tır. İlk dizinin x'y = y'ye oranı her satırda sabit; ikincisinin çarpımı sabittir.

İlişki türünü belirleyen değişmez büyüklük

Bağıntı	Denenen (x,y) değerleri	Sabit kalan nicelik	Sonuç
y = 5x	(2,10), (4,20), (6,30)	y/x = 5	Doğru orantı
xy = 60	(2,30), (4,15), (6,10)	x·y = 60	Ters orantı
y = x+10	(2,12), (4,14)	Ne y/x ne x·y sabit	Orantı yok
y = 10−x	(2,8), (4,6)	Çarpımlar 16 ve 24	Ters orantı yok

Artış ve azalışın tek başına yeterli olmaması Doğru orantı için y/x; ters orantı için x·y sabitliği gerekir. İki niceliğin birlikte artması veya birinin artarken diğerinin azalması, tek başına matematiksel orantı kanıtı değildir. İlişkinin hangi varsayımlarda geçerli olduğu belirtilmelidir.

10. Oranla paylaştırma ve tam sayı koşulları

Sabit bir toplam, paylar oranında dağıtılıyorsa her miktar payıyla aynı katsayı üzerinden tanımlanır. Örneğin 168 sayfalık bir belgeyi iki editöre 3:4 oranında dağıtmak için paylar 3k ve 4k sayfa yazılır. 7k = 168 olduğundan k = 24 sayfa; birinciye 72, ikinciye 96 sayfa düşer. Toplam kontrolü 72+96 = 168, oran kontrolü 72/96 = 3/4'tür. Burada iş yükünün yalnız sayfa sayısıyla ölçüldüğü varsayılır; sayfaların güçlük derecesi farklıysa işgücü oranı aynı kalmayabilir.

Dağıtılan miktar kişi, dosya veya kutu adedi olduğunda parçaların tam sayı olması gerekebilir. Örneğin 10 nesneyi 2:3 oranında paylaştırmak mümkündür: 4 ve 6 nesne elde edilir. Buna karşılık 11 nesneyi aynı oranda artıksız tam sayılı paylaştırmak mümkün değildir; k = 11/5 olur, paylar 22/5 ve 33/5 tam sayı değildir.

Kesirli dağıtım matematiksel olarak yapılabilse de “bütün nesneler” koşulunu sağlamaz. Böylece yalnız orantı denkleminin çözümü değil, sonucun niceliğe uygunluğu da önem taşır.

$$a:b = m:n \text{ ve } a+b = T \Rightarrow a = Tm/(m+n),\ b = Tn/(m+n)$$

Anlamı: Toplam T, m ile n paylarının toplamı üzerinden orantılı dağıtılır.

Koşullar: m,n pozitif ve m+n ≠ 0'dır; fiziksel adet gerektiren bağlamda a,b'nin tam sayı olması ayrıca denetlenir.

11. Oran, ölçek ve benzer ölçülerle ilişki

Ölçek, bir çizim uzunluğunun gerçekte temsil ettiği uzunluğa oranıdır; her iki uzunluk aynı birime çevrildiğinde ölçek birimsiz olur. Ölçeğin 1:25 000 olması, çizimdeki 1 santimetrenin gerçekte 25 000 santimetre, yani 250 metreyi göstermesi demektir. Çizimde 3,6 cm'lik doğrusal bir mesafe, bu ölçekte 3,6·25 000 = 90 000 cm = 900 m gerçek uzunluğa karşılık gelir. Ters kontrol 900 m = 90 000 cm ve 90 000/25 000 = 3,6 cm'dir.

Ölçekteki oran uzunluklara uygulanır; alan veya hacme doğrudan aynı katsayıyla uygulanamaz. Bir dikdörtgenin iki kenarı da iki katına çıkarsa çevresi iki katına, alanı dört katına çıkar. Benzer üç boyutlu cisimlerde üç doğrusal boyut aynı katsayıyla büyütülürse hacim katsayının küpüyle değişir. Bu ayrıntı GY-08'in geometri konularında ele alınacak; burada oran modellerini yanlış nicelik üzerinde uygulamama ilkesi önemlidir.

$$\text{Ölçek} = \text{çizim uzunluğu} / \text{gerçek uzunluk} = 1/N;\ \text{gerçek uzunluk} = N \cdot \text{çizim uzunluğu}$$

Anlamı: Aynı birimle yazılmış uzunluklar arasında sabit çarpımsal bağ.

Koşullar: N>0'dır; iki uzunluk önce aynı birime çevrilir. Formül yalnız doğrusal uzunluk için doğrudan kullanılır.

1:25 000 ölçeğinin uzunluk karşılıkları

Çizim uzunluğu	Gerçek uzunluk (cm)	Gerçek uzunluk (m)
1 cm	25 000	250
2,4 cm	60 000	600
3,6 cm	90 000	900
5 cm	125 000	1 250

12. Birden fazla orantı ve koşulların birlikte değişmesi

Bir sonuç birden fazla bağımsız büyüklüğe bağlıysa, her değişkenin hangi şartlar altında etkili olduğu ayrı değerlendirilir. Örneğin sabit verimle çalışan makine sayısı n ve çalışma süresi t için üretilen miktar Q = rnt yazılabilir. Burada r tek bir makinenin saatte ürettiği birim sayısıdır; makine sayısı ve süre birbirinden bağımsız kabul edilir. Bu durumda Q, n sabitken t ile doğru orantılı, t sabitken n ile doğru orantılıdır. Q sabit tutulduğunda ise n ve t ters orantılı olur. Aynı sistemde hangi niceliğin sabit seçildiği, ilişki türünü belirler.

Saatte 15 parça üreten eş makinelerden 4 tanesi 6 saat çalıştığında toplam Q = 15·4·6 = 360 parça üretir. Aynı miktarı 3 saatte üretmek için 360 = 15·n·3, dolayısıyla n = 8 makine gerekir. Bağımsız kontrol 15·8·3 = 360'tır. Bu örnek daha sonraki işçi ve iş-zaman problemlerinin tekniğine dönüşmeden, orantının koşullara bağımlılığını göstermek içindir. Makineler farklı verimdeyse tek bir r sabiti kullanılamaz.

$$Q = rnt;\ Q \text{ ve } r \text{ sabit} \Rightarrow nt = Q/r$$

Anlamı: Toplam üretim, verim, çalışan birim sayısı ve süreyle doğru orantılıdır; üretim sabitlenince sayı ve süre ters orantılı olur.

Koşullar: r>0 (parça/(makine·saat)), n>0 (makine), t>0 (saat). Verim aynı ve çalışma kesintisiz kabul edilmiştir.

13. Orantı eşitliklerinden yeni oranlar elde etmenin sınırları

Birden fazla oranın aynı sabit k değerini taşıması, pay ve paydaların birlikte toplanmasını belirli koşullarda mümkün kılar. a/b = c/d = k için a = kb ve c = kd olduğundan a+c = k(b+d) elde edilir. b+d sıfırdan farklıysa (a+c)/(b+d) = k olur. Ancak paylardan birini diğer paydanın yerine eklemek veya farklı çarpanlarla ölçeklenen payları ve paydaları yanlış eşleştirmek aynı özelliği vermez.

Örneğin 6/10 = 9/15 = 3/5'tir. Payları ve paydaları eşleştirerek topladığımızda (6+9)/(10+15) = 15/25 = 3/5 olur. Bağımsız kontrol her iki başlangıç kesrinin sadeleşmesidir. Buna karşılık (6+9)/(10+10) = 15/20 = 3/4 olup aynı orantı sabitini taşımaz. Eşleştirme, yalnız hesap düzeni değil, hangi niceliklerin birlikte ölçeklendiğinin korunmasıdır.

Oranlar çarpıldığında da dönüşüm açık yazılmalıdır: (a/b)(c/d) = ac/(bd) = k^2 olur; bu sonuç k'nın kendisi değildir. Orantıyı çözerken bu tür işlem özellikleri amaç değil, dayanak koşulları bilinen kısa yollardır.

$$a/b = c/d = k \Rightarrow (a+c)/(b+d) = k;\ (ac)/(bd) = k^2$$

Anlamı: Denk oranlarda karşılık gelen pay ve payda toplamı aynı sabiti, oranların çarpımı sabitin karesini verir.

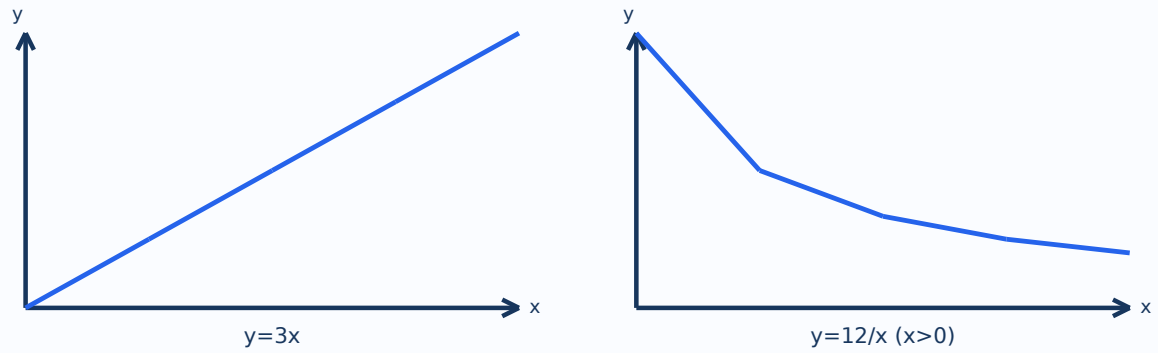
Koşullar: b ≠ 0, d ≠ 0, b+d ≠ 0 ve bd ≠ 0 olmalıdır. İlk bağıntıda eşleşen terimler aynı ağırlıkla birlikte toplanır.

14. Oran tablolarının ve grafiklerin okunması

İki niceliğin karşılıklı değerleri tabloyla verilmişse doğru orantıda sıfırdan farklı her satır için y/x oranı, ters orantıda xy çarpımı denetlenir. x yatay, y dikey eksende gösterilen tam bir doğru orantı grafiği y = kx doğrusudur ve (0,0) noktasından geçer. k pozitif olduğunda doğru artan, k negatif olduğunda azalan yöndedir. Bir oranın k ile sabit olması, x = 0 satırında 0/0 hesabının yapılabileceği anlamına gelmez; köken noktasının doğrusal modele ait oluşu y = kx eşitliğinden çıkar.

Ters orantıda y = k/x grafiği x = 0 doğrusu üzerinde tanımlanmaz. Pozitif x ve k için x büyüdükçe y küçülür; grafik doğru değil eğridir. Bir grafikte eksen birimleri, ölçekleri ve ölçülen değerlerin örnek mi gerçek mi olduğu belirtilmeden oran yorumu kesinleştirilmemelidir. Önceki tablolardaki veriler öğretim amacıyla oluşturulmuş temsili verilerdir; resmî istatistik olarak kullanılmaz. Tablo ve grafiklerin daha geniş yorumlanması GY-05'te ele alınacaktır.

Doğru ve ters orantının grafik karşılaştırması



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

15. Sıfır, işaret, değişken ve gerçek yaşam koşullarının denetlenmesi

Oran a/b ifadesinde pay sıfır olabilir ama payda sıfır olamaz. 0/5 = 0'dır; 5/0 tanımsızdır. Bir orantı eşitliği kurulduğunda iki paydanın da sıfırdan farklı olması gerekir. Örneğin 12/x = 3/4 denkleminde yalnız çapraz çarpmayla x = 16 bulunmakla yetinilmez; x ≠ 0 koşulu ve 12/16 = 3/4 kontrolü de kaydedilir. 0/0, bütün sayıların birbirine oranı anlamına gelmez; tanımsızdır.

Doğru orantı soyut gerçek sayılar için negatif katsayılarla da tanımlanabilir; ancak kişi, ağırlık veya süre gibi niceliklerin gerçek yaşam yorumunda negatif sonuçlar çoğu kez kabul edilemez. Ters orantıda k = 0 seçilirse x ve y'nin ikisinin de pozitif olduğu geleneksel örnekler kurulamaz. Sabit bir hizmet bedeli, miktar sınırı, kademeli fiyat, makinenin kapasite kaybı veya ölçümler arası farklı koşullar, oranların sabit olduğu varsayımını geçersiz kılabilir.

> **Sıfır payda ve modelin sınırları** Oranın paydası, orantıdaki iki payda ve ters orantıda bölünen x sıfır olamaz. Doğru orantıda x=0 için y=0 eşitliği modelin uzantısı olabilir fakat y/x ifadesi o noktada tanımsızdır. Gerçek durumun aynı katsayıyla ölçeklendiği doğrulanmadan orantı uygulanmamalıdır.

Orantının yanlış kullanıldığı durumlar

İfade veya ilişki	Hata riski	Doğru değerlendirme
6/10 = (6+2)/(10+2)	Her iki tarafa aynı miktarı eklemek	3/5 ≠ 2/3
1,8 m / 75 cm = 1,8/75	Birimleri eşitlemeden bölmek	180/75 = 2,4
x artıyor, y artıyor	Doğru orantı varsayımı	y/x sabitliği ayrıca gerekli
x artıyor, y azalıyor	Ters orantı varsayımı	xy sabitliği ayrıca gerekli
y = 5x + 20	Orijinden geçmeyen bağıntıyı doğru orantı saymak	Sabit ek terim varsa y/x sabit değil
0/0 = 1	Sıfıra bölmeyi geçerli saymak	0/0 tanımsız

16. İşlem ve yorum sonuçlarını bağımsız biçimde doğrulama

Oran veya orantıyla bulunan bir sayının doğruluğu, tek bir çapraz çarpım hesabına dayanarak değil, başlangıç nicelikleri üzerinde yeniden denetlenebilir. 12/18 = 20/x eşitliğinden x = 30 bulunur. Önce iki oran sadeleştirilir: 12/18 = 2/3 ve 20/30 = 2/3. Ardından çapraz çarpım kontrolü yapılır: 12·30 = 360 ve 18·20 = 360. Payda x = 30 sıfır olmadığı için ifade tanımlıdır. İki doğrulama birbirinden farklı hesap yollarını kullanır.

Bir işin miktarı, zamanı ya da ürün tutarı gibi birim içeren durumda sonuç ayrıca gerçek durumla sınanmalıdır. 4 kg ürüne 112 TL ödeniyorsa sabit birim fiyat 28 TL/kg'dır. 6 kg'nin tutarının 168 TL olması hem 6·28 = 168 çarpımıyla hem de 112/4 = 168/6 = 28 eşitliğiyle doğrulanır. Ancak ürüne ayrıca 15 TL sabit teslim bedeli eklenirse toplam bedeller arasındaki aynı oran kalmaz; artık miktar ile toplam bedel arasında y = 28x+15 ilişkisi vardır. Bu örnek, bir çözümün matematiksel olarak doğru olmasının başlangıç modelinin koşulsuz doğru olduğunu kanıtlamadığını gösterir.

Oran ve orantı; bölme yoluyla karşılaştırma, denk oranlarla ilişki kurma, değişmez bölüm veya çarpımı belirleme ve sonuçları gerçek birimlerle denetleme temellerine dayanır. Doğru orantının ayırıcı özelliği sabit bölüm, ters orantınınki sabit çarpımdır. Bir sonraki konuda bu karşılaştırmalar, bütüne göre yüzdelik değişimler ve yüzde tabanı bakımından ayrıntılandırılacaktır.

KONU 2.3

YÜZDE HESAPLAMALARI

Yüzde, bir niceliği yüz eşit birim üzerinden ifade etme yöntemidir. Bir bütündeki payı gösterebildiği gibi iki dönem arasındaki artışın veya azalışın büyüklüğünü de karşılaştırmaya yarar. Ancak yüzde hesabının tek başına anlamlı olması için “hangi nicelik yüzde yüz kabul ediliyor?” sorusunun yanıtı açık olmalıdır. Aynı 30 birimlik fark, 120 birimlik başlangıca göre %25, 150 birimlik başlangıca göre %20'dir. Bu yüzden yüzde, yalnız bir sayıdan sonra yazılan işaret değil, seçilmiş bir temele bağlı orandır. Bu bölüm önceki kesirler, ondalık gösterimler ve oran-orantı bilgisini yüzdeye taşır; alışveriş ve diğer uzun problem türleri daha sonraki problem modülünde işlenecektir.

1. Yüzde kavramı, yüzde yüz ve gösterimler

%p ifadesi p/100 sayısını gösterir. Bu kitapta Türkçe kullanım esas alınarak yüzde işareti sayıdan önce yazılır: %18, %2,5 gibi. %18 = 18/100 = 0,18; %2,5 = 2,5/100 = 0,025'tir. Bunlar bir sayının kendisi değil, bir niceliğin belirli bir oranını temsil eden çarpanlar olarak da kullanılabilir. Bir bütünü %100 kabul etmek, o bütüne ilişkin bütün payların birlikte onun tamamını oluşturduğu anlamına gelir.

Yüzde, yalnız 0 ile 100 arasında olmak zorunda değildir. Bir niceliğin başka bir niceliğe oranı %125 olabilir; bu oran, karşılaştırılan niceliğin esas alınan bütünden 1,25 kat büyük olduğunu gösterir. Benzer biçimde işaretli bir değişimin yüzde değeri negatif çıkabilir. Buna karşılık bir bütünün birbirini dışlayan ve onun tamamını oluşturan negatif olmayan parçalarının yüzdeleri toplamı %100'dür. “Bütünün payı” ile “iki değerin oranı” aynı koşullar altında kullanılmadığında yüzde sınırları farklılaşır.

$$\%p = p/100;\ p/100 = 0{,}01p;\ \%100 = 1$$

Anlamı: Yüzde, yüzlük oranı; yüzde yüz bir bütünün tamamını temsil eder.

Koşullar: p bir gerçek sayıdır. Oranın anlamı ve yüzde yüz kabul edilen temel ayrıca belirtilmelidir.

Yüzde, kesir ve ondalık gösterimler

Yüzde	Kesir	Ondalık sayı	Birime göre anlamı
%5	5/100 = 1/20	0,05	Yüzde beş
%12,5	12,5/100 = 1/8	0,125	Sekizde bir
%40	40/100 = 2/5	0,4	Beşte iki
%100	100/100	1	Bütün
%125	125/100 = 5/4	1,25	Bütünün 1,25 katı
%0,8	0,8/100	0,008	Binde sekiz

2. Bir miktarın belirli yüzdesini hesaplama

Bir miktarın %p'sini bulmak, miktarı p/100 ile çarpmaktır. Bütün A, yüzde oranı p olmak üzere sonuç A·p/100 olur. A'nın birimi TL ise elde edilen pay da TL, A'nın birimi kişi ise matematiksel sonuç kişi birimindedir; fakat kişi sayısının gerçek durumda tam sayı olma kısıtı ayrıca dikkate alınır. Her durumda payın, seçilen bütünün hangi kısmı olduğu önce anlaşılmalıdır.

Örneğin 360 sayfalık bir metnin %35'lik kısmı 360·35/100 = 126 sayfadır. İki ayrı yolla denetlenebilir: %30'u 108 ve %5'i 18 sayfadır; toplam 126 sayfa eder. Ayrıca 126/360 = 0,35 olduğu için hesaplanan pay gerçekten %35'e karşılık gelir. Yüzde oranının bir defa değil, her ara işlemde aynı 360 sayfalık bütün için kullanılması zorunludur.

$$\text{Pay} = \text{Bütün} \cdot (p/100)$$

Anlamı: Bir miktarın yüzde p'lik bölümü, bütünün p/100 katıdır.

Koşullar: Bütün ile pay aynı nicelik türünde ve aynı ölçü birimindedir; p oranı seçilen bütüne göre verilmiştir.

Yüzde hesabında %1 ve %10 üzerinden parçalama çoğu zaman zihinden hesaplamayı kolaylaştırır. Örneğin 480'in %17,5'i %10 + %5 + %2,5 biçiminde ayrılabilir: 48 + 24 + 12 = 84. Ayrı bir hesapta 480·0,175 = 84 bulunur. Bu yöntem, verilen yüzdeleri aynı bütünün yüzdeleri olarak toplama ilkesine dayanır; parçalar farklı esas değerlerden alınmışsa bu yolla doğrudan toplanamaz.

Aynı 480 birimin seçilmiş yüzdelik payları

Yüzde	Hesap	Pay
%1	480/100	4,8 birim
%2,5	480/40	12 birim
%5	480/20	24 birim
%10	480/10	48 birim
%17,5	48 + 24 + 12	84 birim
%50	480/2	240 birim

3. Bir parçanın bütünün yüzde kaçı olduğunu bulma

Parça ve bütün biliniyorsa önce parça bütüne bölünür, sonra sonuç 100 ile çarpılır. Bu işlem ancak bütün sıfırdan farklıysa tanımlıdır. Parçanın 0 olması yüzde oranının %0 olmasına engel değildir; asıl yasak sıfır bütüne bölmedir. Parça ve bütün farklı birimlerle verilmişse oran kurulmadan önce birbirine uygun ölçü birimlerine dönüştürülmelidir.

Bir arşivdeki 250 dosyanın 65'i belirli bir gruptaysa bu grubun payı 65/250 ·100 = %26'dır. Bağımsız kontrolde 250'nin %26'sı 250·0,26 = 65 dosya verir. Bir başka örnekte toplam 2,4 metre uzunluğun 60 santimetresi için önce 2,4 m = 240 cm yazılır, ardından 60/240·100 = %25 bulunur. 60 santimetreyi 2,4 metreye doğrudan bölmek aynı birimi kullanmadığı için yanlış sonuç üretir.

$$\text{Yüzde oranı } p = (\text{Parça} / \text{Bütün}) \cdot 100$$

Anlamı: Bir parçanın esas alınan bütünün kaç yüzde birini oluşturduğu bulunur.

Koşullar: Bütün ≠ 0; parça ve bütün karşılaştırılabilir aynı birimlerde ifade edilmiştir.

Pay, bütün ve yüzdeyi doğru eşleştirme

Parça	Bütün	Payın yüzdesi	Kontrol
65 dosya	250 dosya	%26	250·0,26 = 65
18 sayfa	120 sayfa	%15	120·0,15 = 18
60 cm	240 cm	%25	240·0,25 = 60 cm
135 birim	90 birim	%150	90·1,5 = 135

4. Yüzdesi ve parçası verilen bütünü bulma

Bazı durumlarda bütünden bir pay değil, verilen paydan bütüne ulaşmak gerekir. Bütünün %p'si S ise S = B·p/100 bağıntısı kurulur ve p sıfırdan farklı olduğunda B = 100S/p olur. Bu işlem, yüzde oranını 100'e tamamlamak için rastgele bir fark ekleme işlemi değildir; doğrudan çarpma ilişkisinin tersini kullanır.

Örneğin bir toplamın %32'si 96 birimse bütün 96/(32/100) = 300 birimdir. Kontrol 300·0,32 = 96'dır. İkinci yolla %8'lik pay 24 birim olacağından %100, %8'in 12,5 katı olarak 300 birime ulaşır. Yüzde sıfır olursa durum ayrı değerlendirilir: Bir bütünün %0'ı 0'dır; verilen pay 0 olduğunda bütün tek bir değerle belirlenemez, pay sıfırdan farklıysa koşul imkânsızdır.

$$\text{Bütün} = \text{Pay} / (p/100) = 100 \cdot \text{Pay} / p$$

Anlamı: Bütünün yüzde p'lik kısmı bilindiğinde bütün, yüzde çarpanına bölünerek bulunur.

Koşullar: p ≠ 0. Gerçek nicelik uygulamalarında bütünün işareti ve birimi ayrıca uygun olmalıdır.

5. Yüzde artış ve azalış: Başlangıç değerinin rolü

İki ölçüm arasındaki yüzde değişim, yeni değer ile eski değer arasındaki farkın eski değere göre büyüklüğüdür. Başlangıç değerinin yüzde yüz kabul edildiği bu hesapta yeni−eski farkının pozitif olması artışı, negatif olması azalışı gösterir. Çoğu gündelik nicelik için eski değer pozitiftir. Eski değer sıfırsa geleneksel yüzde değişim formülünde bölme tanımsızdır; sıfırdan belirli bir miktara çıkmak için sınırlı bir yüzde artış oranı yazılamaz.

Örneğin 160 birimlik üretim 196 birime yükseldiğinde fark 36 birimdir. Yüzde değişim 36/160·100 = %22,5 artıştır. Kontrol 160·1,225 = 196 sonucudur. Aynı 196 birimden 160'a dönüş ise (160−196)/196·100 = yaklaşık −%18,37'dir; iki yönün yüzdelerinin eşit olmamasının nedeni referans alınan başlangıç değerinin değişmesidir.

$$\text{Değişim yüzdesi} = ((\text{Yeni} - \text{Eski}) / \text{Eski}) \cdot 100$$

Anlamı: Yeni ve eski değer farkı, eski değer temel alınarak yüzdeye dönüştürülür.

Koşullar: Eski ≠ 0. Artış/azalış yönünün standart yorumu için eski değer pozitif seçilir.

Başlangıç değerine göre yüzde değişim

Eski	Yeni	Mutlak fark	Eskiye göre yüzde değişim
160	196	+36	+%22,5
196	160	−36	Yaklaşık −%18,37
80	60	−20	−%25
60	80	+20	+%33,33...
250	250	0	%0

6. Artış ve azalış katsayısı ile yeni değeri bulma

Başlangıç değeri B, artış yüzdesi p ise yeni değer B·(1+p/100); azalış yüzdesi p ise B·(1−p/100) biçimindedir. Böylece önce farkı hesaplayıp sonra eklemek veya çıkarmak yerine aynı sonuç tek bir çarpımla elde edilir. Artış katsayısı 1'den büyük, %0 ile %100 arası bir azalışın katsayısı ise 0 ile 1 arasındadır. %100 azalma sonucu sıfırdır; %100'den büyük azaltma matematiksel olarak negatif sonuç verebilir ama stok ya da ücret gibi negatif olamayan nicelikler için bu model geçersiz olabilir.

Örneğin 1 280 birim %15 artırılırsa yeni değer 1 280·1,15 = 1 472 olur. Ayrı kontrol: 1 280'in %10'u 128, %5'i 64 olduğundan eklenen 192 ve toplam 1 472'dir. Aynı başlangıç %15 azaltılırsa 1 280·0,85 = 1 088 bulunur; ters denetimde 1 280 − 192 = 1 088 elde edilir.

$$\text{Artış sonrası} = B \cdot (1+p/100);\ \text{Azalış sonrası} = B \cdot (1-p/100)$$

Anlamı: Yüzdelik değişim bütünün bir çarpanla ölçeklenmesidir.

Koşullar: B başlangıç değeri, p yüzde büyüklüğüdür; değişimin bu B üzerinden uygulandığı bilinmelidir.

Başlangıç 1 280 birimin değişim katsayıları

İşlem	Katsayı	Yeni değer	Fark
%15 artış	1,15	1 472	+192
%15 azalış	0,85	1 088	−192
%0 değişim	1,00	1 280	0
%100 artış	2,00	2 560	+1 280
%100 azalış	0,00	0	−1 280

7. Son değer ve değişim oranı verildiğinde ilk değeri bulma

Bir değerin %p artmış hâli N olarak veriliyorsa ilk değer N/(1+p/100)'dür. %p azaltılmış hâli N olarak verilmişse ilk değer N/(1−p/100)'dür. Artış veya azalışın gerçekleştiği esas değer bulunmadan, son değer üzerinden doğrudan aynı yüzdeyi çıkarmak veya eklemek genellikle yanlıştır. Özellikle indirim öncesi etiket tutarını bulurken bu fark önemlidir.

Örneğin %20 artırıldıktan sonra 540 olan bir niceliğin başlangıcı 540/1,20 = 450'dir. Kontrol: 450'nin %20'si 90, toplamı 540'tır. %20 azaldıktan sonra 540 olan niceliğin başlangıcı ise 540/0,80 = 675'tir. Kontrol: 675'in %20'si 135 ve 675−135 = 540'tır. Yalnız “son değer 540” bilgisi başlangıcı tek başına belirlemez; artış ve azalış yönü zorunludur.

$$\text{İlk} = \text{Son}/(1+p/100)\ [\text{artış}];\ \text{İlk} = \text{Son}/(1-p/100)\ [\text{azalış}]$$

Anlamı: Başlangıç değerini bulmak için değişim katsayısının çarpmaya göre tersi kullanılır.

Koşullar: Paydadaki katsayı sıfırdan farklıdır. %100 azalışta son değer 0 olduğundan ilk değer tekil olarak geri bulunamaz.

8. Ardışık yüzde değişimleri ve değişen temel

Bir nicelik art arda birkaç yüzde değişimine uğrarsa ikinci değişim ilk değişimden sonraki yeni değer üzerinden hesaplanır. Bu nedenle değişimler yalnız yüzde rakamları toplanarak bulunmaz; her aşamanın çarpanı çarpılır. İlk değişim p, ikinci değişim q yüzde artışıysa toplam katsayı (1+p/100)(1+q/100)'dür. Bir artış ve bir azalışta ikinci katsayı buna göre eksili yazılır. Sabit oranların çarpımı sıra değişse de değişmez; buna karşılık ara dönemdeki TL veya birim farkları farklı temel nedeniyle farklıdır.

Örneğin 400 birim önce %25 artırılıp sonra %20 azaltılsın. Birinci aşama 400·1,25 = 500; ikinci aşama 500·0,80 = 400'dür. Başlangıca dönüş olur. %25 ve −%20 yüzdelerini toplayıp net %5 artış demek yanlıştır. Ayrı yolla katsayıların çarpımı 1,25·0,80 = 1 olduğundan net değişim %0 bulunur.

Örneğin 600 birim önce %10, daha sonra %15 artırıldığında 600·1,10·1,15 = 759 olur. Başlangıçla fark 159 birim, net yüzde 159/600·100 = %26,5'tir. Buradaki %26,5, oranların toplamı %25'ten daha büyüktür; çünkü ikinci artış, ilk artışla birlikte büyümüş 660 birimlik değere uygulanmıştır. Çarpma kontrolü 1,10·1,15 = 1,265'tir.

$$\text{Son} = \text{İlk} \cdot (1+r_1/100) \cdot (1+r_2/100) \cdot \ldots;\ \text{Net değişim \%} = (\text{çarpanların çarpımı} - 1) \cdot 100$$

Anlamı: Ardışık işaretli yüzde değişimleri, başlangıç değerinin ardışık çarpanlarla ölçeklenmesidir.

Koşullar: r_i artış için pozitif, azalış için negatif yüzde değeridir. Her yeni oran bir önceki aşamanın değerine uygulanır.

Ardışık oranların toplama yerine çarpımla birleştirilmesi

Aşamalar	Toplam katsayı	İlk 100 için son	Net değişim
+%25, ardından −%20	1,25·0,80 = 1	100	%0
+%10, ardından +%15	1,10·1,15 = 1,265	126,5	+%26,5
−%10, ardından −%10	0,90·0,90 = 0,81	81	−%19
+%40, ardından −%40	1,40·0,60 = 0,84	84	−%16
−%20, ardından +%25	0,80·1,25 = 1	100	%0

9. Aynı oranla geri dönme yanılgısı ve telafi oranı

Bir fiyat veya miktar %p azaldığında eski düzeyine çıkması için aynı yüzdeyle artması genellikle yetmez. Örneğin 200 birim %30 azaltılırsa 140 olur. 140'ı yeniden 200 yapmak için 60 birimlik artış gerekir. Bu artışın yeni temele oranı 60/140·100 = yaklaşık %42,86'dır. İki yönün aynı 60 birim farkı kullanması, yüzdelerin eşit olması anlamına gelmez.

Genel olarak 0 < p < 100 için %p azalma sonrasında geri dönüş artışı 100p/(100−p) yüzde olur. Çünkü azalma katsayısı (100−p)/100'dür ve geri dönmek için bunun tersiyle çarpmak gerekir. Benzer biçimde %p artıştan eski değere dönmek için gereken azalış oranı 100p/(100+p)'dir. Örneğin %25 artışın tersini sağlayan azalış %20'dir: 100·25/125 = 20. Bu ilişkiler değişimlerin yalnız rakam olarak birbirini götürmeyeceğini açıklar.

> %p düşüşün telafi artışı = 100p/(100−p); %p artışın geri alma azalışı = 100p/(100+p)
>
> **Anlamı:** İlk değere dönüşte yüzde tabanı değiştiğinden ters oran yeni değere göre hesaplanır.
>
> **Koşullar:** İlk formülde 0 < p < 100; ikinci formülde p ≥ 0 alınır. Sıfırlanmış pozitif değerin yüzdeyle geri getirilmesi tanımlı değildir.

10. Yüzde puan ile göreli yüzde değişimin ayrılması

Başlangıç ve son oranlar zaten yüzde olarak belirtilmişse aralarındaki aritmetik fark yüzde puan cinsinden ifade edilir. Örneğin bir grubun payı %24'ten %30'a çıktığında artış 6 yüzde puandır. Bunun göreli yüzde artışı ise (30−24)/24·100 = %25'tir. “6 yüzde puan arttı” ifadesi ile “%6 arttı” ifadesi aynı niceliği bildirmez. İkincisi mevcut yüzde değerini 1,06 ile çarpmayı, yani %24'ü %25,44'e çıkarmayı anlatır.

Örneğin %8 ile %10 oranları arasındaki fark 2 yüzde puandır; %8'e göre göreli artış ise 2/8·100 = %25'tir. Ters yönde %10'dan %8'e inme 2 yüzde puan azalış ama %20 göreli azalıştır. Bu ayrım, eğitim başarı oranı, kullanım oranı, katılım oranı ve istatistiksel tabloların yorumunda gereklidir. Yüzde puan, aynı ölçekle verilen iki yüzdenin çıkarılmasıdır; göreli yüzde değişim, önceki oranı temel alan bölme işlemidir.

Yüzde puan ve göreli değişimin ayrı sonuçları

İlk oran	Son oran	Yüzde puan farkı	İlk orana göre yüzde değişim
%24	%30	+6 yüzde puan	+%25
%8	%10	+2 yüzde puan	+%25
%10	%8	−2 yüzde puan	−%20
%40	%34	−6 yüzde puan	−%15

11. Bir bütünün parçaları, yüzdelerin toplamı ve değişen payda

Bir bütünün birbirini dışlayan parçaları aynı anda sayılıyor ve bütünü eksiksiz oluşturuyorsa parçaların yüzdeleri toplamı %100 olmalıdır. Örneğin 800 kaydın 280'i A, 200'ü B ve 320'si C sınıfındaysa oranlar sırasıyla %35, %25 ve %40'tır; toplam %100'dür. Bağımsız hesapla paylar 280+200+320 = 800 kaydın tamamını oluşturur. Ancak sınıflar çakışıyorsa, örneğin bir kaydın hem A hem B olması mümkünse aynı toplam kuralı doğrudan uygulanamaz.

Bir parçanın sayısının artması, bütün de değiştiğinde yüzdesinin mutlaka artacağı anlamına gelmez. Örneğin 500 kişiden 120'si bir gruptaysa pay %24'tür. Daha sonra aynı grupta 132 kişi bulunsa bile toplam 600 kişiye çıktıysa oran 132/600·100 = %22 olur. Kişi sayısı 12 artmış, fakat bütün daha hızlı büyüdüğünden pay 2 yüzde puan azalmıştır. Biri mutlak miktarı, diğeri oransal ağırlığı ölçer; ikisini ayrı kaydetmek gerekir.

Sayı artarken yüzde payının azalabildiği durum

Dönem	Grup sayısı	Toplam	Grup yüzdesi
İlk	120 kişi	500 kişi	%24
İkinci	132 kişi	600 kişi	%22
Değişim	+12 kişi	+100 kişi	−2 yüzde puan

12. Yüzdenin yüzdeni ve iç içe paylar

Bir bütünün belirli yüzdesinin yine bir yüzdesi alındığında yüzdelik çarpanlar çarpılır. Örneğin 1 000 birimlik toplamın %60'ı 600 birim, bu 600 birimin %25'i 150 birimdir. İlk bütüne göre sonuç 150/1 000·100 = %15'tir. İkinci yolla 0,60·0,25 = 0,15 çarpanı doğrudan aynı sonucu verir. Burada %25, bütün 1 000'in değil ara değer 600'ün yüzdesi olduğu için iki yüzde toplanamaz.

Bu ilişki oranların kapsamını anlamada önemlidir. “A grubunun %40'ı” denildiğinde önce A grubunun büyüklüğü, “toplamın %40'ı” denildiğinde toplam büyüklük esas alınır. Yüzdeyi doğru bulmak, yüzde değerini hangi kümeye uygulayacağını doğru saptamayı gerektirir. Örneğin bir kuruluşta bütün çalışanların %45'i bir birimdeyse ve o birimdekilerin %20'si belirli bir görevi yürütüyorsa bütün çalışanların %9'u o görevdedir; 0,45·0,20 = 0,09'dur. Bu sayılar tamamen öğretim amacıyla seçilmiş temsili değerlerdir.

Bütünün %a'sının %b'si = Bütün · (a/100) · (b/100)

Anlamı: İç içe yüzdeler birbirini izleyen parça seçimleridir ve oranları çarpılır.

Koşullar: İkinci yüzde, ilk yüzdeden elde edilen parça üzerinde hesaplanır; payların kapsadığı gruplar açık olmalıdır.

13. Yüzde ile birim oran, binde ve ondalık sayıların ilişkisi

Yüzde yüzde birlik, binde ise binde birlik karşılaştırma birimidir. %0,5 = 0,005, bu da binde 5'e eşittir. Buna karşılık %5, 0,05'tir ve binde 50 anlamına gelir. Nokta, virgül ve yüzde işaretinin farklı kullanıldığı biçimlere dikkat edilmelidir: Türkçe matematiksel yazımda 0,5 ondalık sayısı %50'ye; %0,5 ise 0,005 sayısına eşittir. 0,5 ile %0,5 aynı sayı değildir.

Bir veri grubunda 1 600 kayıt içindeki 8 kaydın oranı 8/1600 = 0,005 = %0,5 = ‰5'tir. Kontrol, 1 600·0,005 = 8 hesabıyla yapılır. Puanları veya frekansları farklı ölçeklerde sunulan tablolarda her veri önce ortak ölçeğe çevrilmelidir. Binde işareti (‰) günlük kullanımda bazı oranlar için görülse de bu kitabın temel hesabı yüzde üzerinden yürütülür.

Oran yazımlarında yüz ve bin birim ayrımı

Ondalık oran	Yüzde	Binde	Açıklama
0,5	%50	‰500	Yarım
0,05	%5	‰50	Yirmide bir
0,005	%0,5	‰5	Binde beş, yüzde yarım
0,001	%0,1	‰1	Binde bir

14. Tablodaki yüzde verilerinden miktar çıkarma

Yüzdeler bir tablo veya açıklayıcı gösterimde verildiğinde önce bütünün gerçekten belirtilip belirtilmediği, satırların birbirini dışlayıp dışlamadığı ve yüzdelerin aynı döneme ait olup olmadığı anlaşılmalıdır. Örneğin öğretim amacıyla oluşturulan temsili bir dağılımda toplam 1 200 kayıt, A kategorisi %45, B kategorisi %30, C kategorisi %25 olsun. A için 1 200·0,45 = 540; B için 1 200·0,30 = 360; C için 1 200·0,25 = 300 kayıt bulunur. İkinci kontrolde 540+360+300 = 1 200 ve yüzdeler toplamı %100'dür.

Bir grafikte “bir grubun payı %30'dan %36'ya yükseldi” bilgisi, toplamların eşit olduğu söylenmedikçe grubun sayıca kaç kişi arttığını belirlemez. Örneğin ilk toplam 1 000 ve ikinci 1 000 ise grup 300'den 360'a, 60 kişi artmıştır; fakat ikinci toplam 800 olsaydı %36'lık pay 288 kişi olup grup sayısı 12 azalırdı. Bu yüzden yüzde verisinin grafikle sunulmuş olması, payda bilgisinin önemini ortadan kaldırmaz. Tablo ve grafik yorumlama yöntemleri GY-05 modülünde ayrıca genişletilecektir.

Temsili 1 200 kaydın yüzde ve adet dağılımı

Kategori	Bütün içindeki yüzde	Hesaplanan adet	Denetim
A	%45	540	540/1200 = 0,45
B	%30	360	360/1200 = 0,30
C	%25	300	300/1200 = 0,25
Toplam	%100	1 200	Adetler toplamı bütüne eşit

15. Sınır durumları, negatif değerler ve yuvarlama

Bir niceliğin %100'ü onun tamamı, %0'ı sıfırdır. Parça-bütün hesaplarında 0 ile 100 arasındaki yüzdeler genellikle negatif olmayan ve bütünden büyük olmayan bir parçayı anlatır; ancak borç, bakiye farkı veya işaretli hata gibi niceliklerde negatif değerler ayrıca yorumlanabilir. Başlangıç değeri negatifse alışılmış "yüzde artış" dilini yalnız formülün işaretine bakarak kullanmak yanlış yorumlara yol açabilir. Örneğin −100'den −80'e geçiş sayısal olarak artış +20 iken (−80−(−100))/(−100)·100 = −%20 verir. Bu nedenle standart yüzde artış/azalış yorumları pozitif başlangıç miktarı üzerinde yapılmalıdır.

Yüzde değeri de yuvarlanabilir. 17/60 ·100 = %28,333... oranını bir ondalık basamakta %28,3 diye yazmak yaklaşık değer verir; %28,333... ile %28,3 tam olarak aynı sayı değildir. Yuvarlama kuralı ve gerekli basamak sayısı raporlama bağlamına göre belirlenir. Yuvarlanmış satır yüzdelerinin toplamı %99,9 veya %100,1 çıkabilir; tam veriler birbirini dışlayan parçaları temsil ediyor ve tüm bütünü kapsıyorsa doğru kesin toplam yine %100'dür.

> **Temel, işaret ve tanımsız yüzde** "Yüzde kaçı" ve "yüzde değişim" işlemlerinde bölünen temel sıfır olamaz. Yüzde artış/azalışın standart yön yorumu pozitif başlangıçta açıktır. "%30 arttı" ifadesi ile "30 yüzde puan arttı" aynı anlama gelmez. İkinci veya sonraki değişim her seferinde o aşamanın mevcut değerine uygulanır.

16. İşlemleri bağımsız yöntemle doğrulama ve açıklık

Yüzde hesaplamasının denetiminde en güvenilir yol sonucu geriye doğru okuyabilmektir. "Bir bütünün %p'si S" biçimindeki hesapta S/B oranı p/100'e eşit olmalıdır. Değişim hesabında fark, belirlenen başlangıç üzerinden yeniden hesaplanmalıdır; daha sonra son değere ekleme ya da çıkarma işlemiyle aynı sayıya ulaşılıp ulaşılmadığı sınanmalıdır. Örneğin 720 birim %12,5 azaltılırsa sonuç 720·0,875 = 630 olur. Ters denetim 720−630 = 90 ve 90/720·100 = %12,5'tir. Bağımsız bir kısa yol, %12,5'in 1/8 olması ve 720/8 = 90 bulunmasıdır.

İki farklı yüzdeyi karşılaştırırken yalnız sonucun büyüklüğü değil, yüzde yüz olarak alınan temelin de aynı olup olmadığı kontrol edilir. 100'den 120'ye geçiş %20 artıştır; 120'den 100'e geçiş %16,666... azalıştır. Bu iki farklı oranın farkı matematiksel çelişki değil, farklı paydalardır. Metnin hangi değer üzerinden yüzde istediği belirlenmeden formüle sayı yerleştirmek, doğru işlemi yanlış temele uygulama riskini doğurur. Her yüzde hesabı temel, oran, miktar, değişim yönü ve birim birlikte incelendiğinde güvenilir hâle gelir.

> **Son denetim** Yüzde hesabında önce yüzde yüz olan temel belirlenir; parça ve bütün aynı birimle ifade edilir; sonuç gerekiyorsa ters işlemle kontrol edilir. Kesin ve yuvarlanmış oranlar birbirine karıştırılmaz. Bu bölüm temel yüzde hesaplarını tamamlar; karma alışveriş, faiz ve çok adımlı problem türleri GY-03 kapsamında ele alınır.

Yüzde hesapları, bir miktarı yüzlük ölçeğe taşımanın yanı sıra değişimlerin hangi temel üzerinden gerçekleştiğini ortaya koyar. Aynı miktar farkı farklı başlangıçlarla farklı yüzdelere karşılık gelir; ardışık değişimler katsayılarla birleştirilir ve yüzde puan, iki oran arasındaki doğrudan farkı anlatır. Bu ilkeler, bir sonraki bölümde ele alınacak eşitsizlikler ve daha sonra çözülmüş durumlar üzerinden genişletilecek problem konuları için ortak bir sayısal düşünme temeli oluşturur.

KONU 2.4

BASİT EŞİTSİZLİKLER

Bir denklemin amacı çoğu zaman bilinmeyenin eşitliği sağlayan değerini bulmaktır. Eşitsizlikte ise iki niceliğin hangisinin daha küçük veya büyük olduğunu, belirli bir sınırı aşıp aşmadığını ya da bir aralıkta kalıp kalmadığını araştırırız. Bir koşulu sağlayan sayıların tek bir değer yerine bir aralık oluşturması mümkündür. “En az”, “en çok”, “daha fazla” ve “altında” gibi ifadeleri matematiksel eşitsizliğe dönüştürebilmek; bir bütçe sınırı, kapasite veya gereken en küçük miktar gibi ilişkileri yanlış yorumlamadan hesaplamayı sağlar. Bu bölümde gerçek sayıların sıralanması, birinci dereceden tek bilinmeyenli eşitsizlikler ve çözüm kümelerinin gösterimi ele alınır.

1. Eşitsizlik işaretleri ve eşitliğin dahil oluşu

İki gerçek sayı için a < b ifadesi a'nın b'den küçük, a > b ifadesi büyük olduğunu belirtir. a ≤ b, a'nın b'den küçük veya ona eşit olduğunu; a ≥ b, a'nın b'den büyük veya ona eşit olduğunu gösterir. Kesin küçüklük ve büyüklük işaretlerinde eşitliğe izin verilmez. Örneğin 5 < 5 yanlıştır; 5 ≤ 5 doğrudur. “x en az 12” koşulu x ≥ 12, “x en çok 12” koşulu x ≤ 12 biçiminde yazılır. “12'den az” ve “12'den fazla” ifadeleri ise sınırın kendisini dışlar.

Gerçek sayılarda herhangi iki sayı için üç durumdan yalnız biri gerçekleşir: a < b, a = b veya a > b. Eşitsizlik işareti, sayıların mutlak değerlerini değil sayı doğrusundaki sıralarını karşılaştırır. Bu nedenle −8 < −3'tür; −8'in sıfıra uzaklığı daha fazla olsa da sayı doğrusunda −3'ün solunda bulunur. Sıfır da işaretli sayıların karşılaştırılmasında doğal sınırdır: −2 < 0 < 7.

Karşılaştırma işaretlerinin anlamı ve uç değer

Gösterim	Okunuş	Sınır değere izin var mı?	Öğretici örnek
a < b	a, b'den küçüktür	Hayır	4 < 9
a > b	a, b'den büyüktür	Hayır	9 > 4
a ≤ b	a, b'den küçük veya eşittir	Evet	9 ≤ 9
a ≥ b	a, b'den büyük veya eşittir	Evet	−3 ≥ −3

2. Sıralama ilişkisi ve sayı doğrusu üzerinde karşılaştırma

Sayı doğrusunda bir sayı diğerinin sağındaysa daha büyüktür. Sayıların yerlerini karşılaştırırken özellikle negatiflerde bu ilke korunmalıdır: −7 < −2 < 1 < 4 sıralaması, soldan sağa artışı gösterir. İki farklı sayının arasında başka gerçek sayılar bulunur. Örneğin 2 < x < 3 koşulunu 2,5, 2,25 ve 2,99 gibi sonsuz sayıda gerçek değer sağlayabilir. Bu yüzden eşitsizliklerin çözümü çoğu zaman birkaç örnek sayının listesiyle tamamlanamaz.

Sıralama geçişlidir: a < b ve b < c ise a < c'dir. Aynı biçimde a ≤ b ve b ≤ c ise a ≤ c olur. İki koşuldan birinde eşitlik dışlanıyorsa sonuçtaki uygun uç değerin de dışlanması gerekebilir. Örneğin a < b ve b ≤ c birlikte a < c sonucunu verir. Bunun bağımsız değerlendirmesi şöyledir: a sayısı b'ye eşit değil ve ondan küçük olduğundan, b'nin kendisi c'yi aşmasa bile a, c'ye eşit olamaz.

$$a < b \text{ ve } b \le c \Rightarrow a < c;\ a \le b \text{ ve } b \le c \Rightarrow a \le c$$

Anlamı: Sayıların küçükten büyüğe sıralanması geçişli bir ilişkidir.

Koşullar: a, b, c gerçek sayılardır; iki öncülün birlikte doğru olduğu varsayılır.

3. Her iki tarafa aynı sayıyı ekleme ve çıkarma

Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı gerçek sayı eklemek veya iki taraftan aynı sayıyı çıkarmak sıralamayı değiştirmez. Bunun nedeni iki sayının farkının değişmemesidir: a < b iken b−a pozitifse (b+c)−(a+c)=b−a da pozitiftir. Bu işlem eşitsizliğin çözüm kümesini korur. Örneğin x−7 < 13 ifadesinde iki tarafa 7 eklenerek x < 20 bulunur. x=19 için 19−7=12 <13 doğru, x=20 için 13<13 yanlış olduğundan sınırın dışlandığı da kontrol edilir.

Benzer biçimde x+9 ≥ 4 eşitsizliğinde iki taraftan 9 çıkarılır ve x ≥ −5 elde edilir. x=−5 başlangıçta −5+9=4 ≥4 koşulunu sağladığı için sonuçtaki eşitlik korunmalıdır. “Terim karşıya geçti, işareti değişti” ifadesi yalnız kısa bir anlatımdır; matematiksel olarak yapılan, her iki taraftan aynı terimi çıkarmaktır.

$$a < b \Leftrightarrow a+c < b+c;\ a \le b \Leftrightarrow a-c \le b-c$$

Anlamı: Eşitsizliğin iki tarafında aynı toplama veya çıkarma işlemi sıralamayı ve çözüm kümesini korur.

Koşullar: a, b, c ∈ ℝ; ilgili eşitsizlik işareti iki tarafta da aynı kalır.

Eşitsizlikte toplama ve çıkarma denetimleri

Başlangıç	Her iki tarafa uygulanan işlem	Eşdeğer sonuç	Sınır kontrolü
x−7 < 13	+7	x < 20	x=20 sağlamaz
x+9 ≥ 4	−9	x ≥ −5	x=−5 sağlar
2x+5 ≤ 17	−5	2x ≤ 12	2x=12 eşitliğe uygundur

4. Pozitif veya negatif sayıyla çarpma ve bölmede yön

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif sayıyla çarpılır veya pozitif sayıya bölünürse eşitsizlik işareti değişmez. Çünkü pozitif ölçekleme sayı doğrusundaki sıralamayı korur. Buna karşılık aynı negatif sayıyla çarpma veya negatif sayıya bölmede sıralama tersine döner. Basit bir örnekte 2 < 5 iken sayılar −3 ile çarpıldığında −6 > −15 olur. İşaret yönünün dönmesi keyfî bir kural değildir: Daha büyük pozitif sayının negatif çarpımı, daha küçük sayının negatif çarpımından daha solda yer alır.

Örneğin −4x+9 ≥ 25 eşitsizliğinde önce 9 çıkarılarak −4x ≥ 16 bulunur. İki taraf −4'e bölünürken işaret ters çevrilir: x ≤ −4. Sonucun denetiminde x=−4 için −4·(−4)+9=25 elde edilir ve sınır dahildir. x=−5 için 29≥25 doğru, x=−3 için 21≥25 yanlıştır. Böylece hem eşitlik durumunda hem sınırın iki yanında ilk koşulla aynı çözüm tarafına ulaşıldığı görülür.

$$c>0 \text{ iken } a<b \Leftrightarrow ac<bc;\ c<0 \text{ iken } a<b \Leftrightarrow ac>bc$$

Anlamı: Pozitif çarpan sıralamayı korur; negatif çarpan sıralamayı tersine çevirir.

Koşullar: a,b,c ∈ ℝ. Bölme için c≠0; c=0 ile çarparak eşdeğer eşitsizlik elde edilemez.

Eşitsizlikte çarpma ve bölme işaret kuralları

İşlem	İşaretin yönü	Gerekçe	Örnek
Pozitif sayıyla çarpma	Korunur	Pozitif ölçekleme	$2<5 \Rightarrow 6<15$
Pozitif sayıya bölme	Korunur	Sıra değişmez	$6\le12 \Rightarrow 3\le6$
Negatif sayıyla çarpma	Ters döner	Sayı doğrusu yönü terslenir	$2<5 \Rightarrow -6>-15$
Negatif sayıya bölme	Ters döner	Sıra terslenir	$-12\ge-20 \Rightarrow 3\le5$ (-4'e bölme)
Sıfıra bölme	Yasak	Bölme tanımsız	$8/0$ tanımsız

Eşitsizlik yönünün değiştiği aşama "Eksi işareti gördüm, yönü değiştirdim" kuralı yanlıştır. Yön yalnız her iki taraf negatif bir sayıyla çarpıldığında veya bölündüğünde ters döner. İki taraftan negatif sayı çıkarmak ya da negatif sayıyı her iki tarafa eklemek yön değiştirmez. Sıfırla çarpma, başlangıçtaki eşitsizliğe eşdeğer bir işlem değildir.

5. Birinci dereceden tek bilinmeyenli eşitsizliğin genel yapısı

Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik, değişkenin yalnız birinci kuvvetle bulunduğu ve uygun dönüşümlerle $ax+b < 0$, $ax+b \le 0$, $ax+b > 0$ veya $ax+b \ge 0$ biçimlerine getirilebilen karşılaştırmadır. Burada x bilinmeyen, a ve b gerçek katsayılardır; birinci dereceden olabilmek için $a\neq0$ gerekir. Eşitsizliği sağlayan tüm x değerlerine çözüm kümesi denir. x'in seçilebildiği küme önceden belirtilmemişse bu kitapta ilk yorum gerçek sayılar kümesindedir.

Örneğin $5x-7<18$ için her iki tarafa 7 eklenir: $5x<25$. Pozitif 5'e bölündüğünde $x<5$ bulunur. İlk ifadede $x=4$ için $20-7=13<18$ doğru, $x=5$ için $25-7=18<18$ yanlış olur. Çözüm kümesi yalnız 4 gibi tek örnekten ibaret değil, 5'ten küçük tüm gerçek sayılardır. Sınır noktasının kendisinin çözüm olmaması, kesin küçüklük işaretinden kaynaklanır.

$$a>0 \text{ için } ax+b<0 \Leftrightarrow x<-b/a;\ a<0 \text{ için } ax+b<0 \Leftrightarrow x>-b/a$$

Anlamı: Sıfırdan farklı değişken katsayısına bölündüğünde yön, katsayının işaretine göre belirlenir.

Koşullar: $a,b\in\mathbb{R}$ ve $a\neq0$. $\le$, $>$, $\ge$ işaretli ifadelerde aynı işlem kuralı geçerlidir.

6. Çözüm kümesi, aralık gösterimi ve sınır noktası

Bir eşitsizliğin çözüm kümesi küme gösterimi, eşitsizlik ve aralık biçimleriyle yazılabilir. $x<5$ ifadesi $\{x\in\mathbb{R} \mid x<5\}$ ve $(-\infty,5)$ biçimlerinde aynı kümeyi anlatır. $x\le5$ için aralık $(-\infty,5]$ olur; köşeli parantez, 5'in kümeye dahil olduğunu gösterir. $x>5$ için $(5,\infty)$, $x\ge5$ için $[5,\infty)$ yazılır. Sonsuzluk bir gerçek sayı ya da ulaşılabilir bir uç nokta olmadığı için ∞ ve $-\infty$ yanında köşeli parantez kullanılmaz.

İki sonlu sınır varsa $a<x<b$ gösterimi (a,b) açık aralığını, $a\le x\le b$ gösterimi $[a,b]$ kapalı aralığını, $a\le x<b$ gösterimi $[a,b)$ yarı açık aralığını belirtir. Aralık gösteriminde sınırların hangi tarafta bulunduğu ve eşitliğin dahil olup olmadığı korunmalıdır. Örneğin $-2\le x<4$ koşulu $[-2,4)$ aralığıdır; $x=-2$ sağlanırken $x=4$ sağlanmaz.

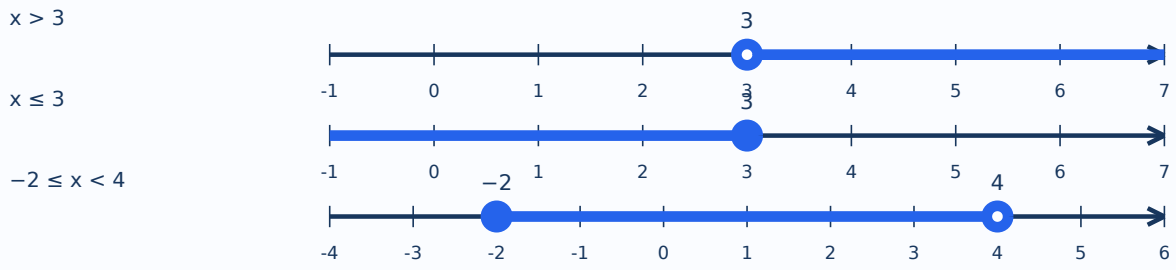
Eşitsizlik ve aralık gösterimlerinin karşılıkları

Eşitsizlik	Aralık	Uç durum
x<5	(−∞,5)	5 dahil değil
x≤5	(−∞,5]	5 dahil
x>5	(5,∞)	5 dahil değil
x≥5	[5,∞)	5 dahil
−2≤x<4	[−2,4)	−2 dahil, 4 hariç
1<x≤6	(1,6]	1 hariç, 6 dahil

7. Sayı doğrusu ve açık-kapalı sınırların metinsel gösterimi

Sayı doğrusu çizimlerinde sınır noktasının içi boş bir daireyle belirtilmesi genellikle bu noktanın çözüm kümesine dahil olmadığını, dolu nokta kullanılması ise dahil olduğunu anlatır. x>3 için 3'te açık nokta ve sağa uzanan taralı bölge; x≤3 için 3'te dolu nokta ve sola uzanan taralı bölge gösterilir. Ok yönü daha büyük veya küçük değerlerin hangi tarafta olduğunu belirler. Tek başına bir daire çizimi, sayı doğrusundaki ölçek ve yön etiketleri olmadan yeterince açıklayıcı değildir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

Sayı doğrusunun görsel olarak çizilemediği bir ortamda çözüm eşitsizlik ve aralık biçiminde açıkça yazılmalıdır. Özellikle eksi sonsuz ile artı sonsuz işaretlerinin yerleri karıştırılmamalıdır. (−∞,3) aralığı, 3'ten küçük sayıları; (3,∞) aralığı, 3'ten büyük sayıları belirtir. İki gösterim aynı sınır noktasını taşısa da çözümleri ortak değildir.

8. Bilinmeyenin eşitsizliğin iki tarafında bulunması

Değişken her iki tarafta bulunduğunda aynı değişken terimi taraflardan çıkarılarak katsayılar birleştirilir. Örneğin 7x−5 > 2x+15 eşitsizliğinde iki taraftan 2x çıkarıldığında 5x−5>15 bulunur. İki tarafa 5 eklenerek 5x>20, pozitif 5'e bölünerek x>4 elde edilir. Sonucun denetimi için x=5 seçildiğinde 7·5−5=30 ve 2·5+15=25 olduğu için 30>25 doğrudur. x=4 seçildiğinde iki taraf da 23 çıkar; kesin büyüklük koşulu sağlanmaz.

Ters yönde bir örnekte 3x+8≤8x−7 ifadesi iki taraftan 3x çıkarılarak 8≤5x−7, ardından 7 eklenerek 15≤5x, beşe bölünerek 3≤x biçimine getirilir. Sonuç x≥3'tür. x=3 sınırında 17≤17 doğru, x=2 için 14≤9 yanlış olduğundan çözümün yönü bağımsız biçimde doğrulanır. Hangi taraftan değişken çıkarılacağına ilişkin tek zorunlu yol yoktur; iki yana aynı işlem uygulanması esastır.

İki tarafta değişken bulunan eşitsizliklerin aşamaları

İlk eşitsizlik	Düzenlenmiş eşitsizlik	Sonuç	Sınır denetimi
$7x-5>2x+15$	$5x>20$	$x>4$	$x=4$ eşitlik verir; dahil değil
$3x+8\le 8x-7$	$15\le 5x$	$x\ge 3$	$x=3$ iki taraf 17
$6-2x<14$	$-2x<8$	$x>-4$	$x=-4$ iki taraf 14

9. Parantezli ifadeler ve işaretlerin korunması

Parantez açılırken dağıtma işlemi eşitliğin iki tarafına değil, parantezdeki bütün terimlere uygulanır. Örneğin $3(2x-1)-5\le 2(x+4)+4$ ifadesinde sol taraf $6x-3-5=6x-8$, sağ taraf $2x+8+4=2x+12$ olur. Böylece $6x-8\le 2x+12$, ardından $4x\le 20$ ve $x\le 5$ bulunur. Başlangıç eşitsizliğinde $x=5$ için sol $3\cdot 9-5=22$, sağ $2\cdot 9+4=22$ olur. $x=6$ için sol $3\cdot 11-5=28$, sağ $2\cdot 10+4=24$ çıktığından $x=6$ çözüm değildir.

Parantezin önündeki negatif işaret, parantez içindeki her terimin tersini alır. $-(3x-7)<2x+8$ ifadesi $-3x+7<2x+8$ olarak açılır; iki taraftan $2x$ ve 7 çıkarılınca $-5x<1$ olur. Negatif 5'e bölmede yön değiştirilerek $x>-1/5$ elde edilir. Sınırda $x=-1/5$ için başlangıç tarafları eşittir ve kesin küçüklük sağlanmaz. $x=0$ için $-(-7)=7<8$ doğrudur; sonuçla uyumludur. Bu yöntem, parantez açılımının işaret üzerindeki etkisiyle eşitsizliği negatif sayıya bölmenin etkisini birbirinden ayırır.

$$-(u-v)=-u+v;\ c(u+v)=cu+cv$$

Anlamı: Parantez başındaki işaret ve katsayı, bütün terimlere uygulanır.

Koşullar: u,v,c gerçek sayıdır; parantez açma işlemi tek başına karşılaştırma yönünü değiştirmez.

10. Sabit paydalı kesirli ve ondalık katsayılı eşitsizlikler

Paydası sıfırdan farklı sabit olan kesirli ifadelerde ortak pozitif payda kullanılması işlemleri düzenler. Örneğin $(x-2)/3 + (x+1)/2 \le 4$ eşitsizliğinde paydalar 3 ve 2'dir; her iki taraf pozitif 6 ile çarpılırsa $2(x-2)+3(x+1)\le 24$ bulunur. Açılımı $2x-4+3x+3\le 24$, yani $5x-1\le 24$ ve $x\le 5$'tir. Kontrol için $x=5$ seçildiğinde $3/3+6/2=1+3=4$ olur; eşitliğe izin vardır. $x=6$ için $4/3+7/2=29/6>4$ olduğundan çözüm değildir.

Negatif katsayı bulunduğunda yönün dönüşü, bütün eşitsizliğin ilgili negatif sayıya bölündüğü aşamada yapılır. $(-2x+1)/4 > (x-5)/2$ ifadesi pozitif 4 ile çarpılarak $-2x+1>2x-10$ biçimine gelir. Düzenleme $11>4x$, yani $x<11/4$ sonucunu verir. $x=2$ için sol $-3/4$, sağ $-3/2$ olup $-0{,}75>-1{,}5$ doğrudur. $x=3$ için sol $-5/4$, sağ -1 olup $-1{,}25>-1$ yanlış olur. İki örnek çözüm sınırının doğru tarafını gösterir.

Ondalık katsayılar da kesre veya tam sayı katsayılı biçime dönüştürülebilir. $0{,}4x-1{,}2\ge 2{,}8$ eşitsizliğinde onla çarpıldığında $4x-12\ge 28$, dolayısıyla $x\ge 10$ bulunur. $x=10$ için $4-1{,}2=2{,}8$ olduğu ve $x=9$ için $3{,}6-1{,}2=2{,}4<2{,}8$ olduğu kontrol edilir. Kullanılan 10 pozitif olduğundan eşitsizlik yönü korunmuştur. Ondalık ve kesir işlemleri GY-01.07'de ele alınan kuralların burada doğrudan uygulamasıdır.

Kesir ve ondalık katsayılı eşitsizlikler

Başlangıç ifadesi	Uygulanan güvenli dönüşüm	Çözüm	Kritik koşul
$(x-2)/3+(x+1)/2 \le 4$	Pozitif 6 ile çarpma	$x \le 5$	Sabit paydalar 3 ve 2
$(-2x+1)/4 > (x-5)/2$	Pozitif 4 ile çarpma	$x < 11/4$	Yön değişmez
$0{,}4x-1{,}2 \ge 2{,}8$	Pozitif 10 ile çarpma	$x \ge 10$	Ondalık basamaklar korunur

Değişkenli paydalar ayrı koşul gerektirir Paydada x veya işareti bilinmeyen başka bir ifade varsa, eşitsizliğin her iki tarafını o payda ile çarpmak yönü otomatik olarak korumaz. Önce paydanın sıfır olmadığı ve işaretinin ne olduğu incelenmelidir. Bu bölümün kesirli örneklerinde paydalar sabit, pozitif ve sıfırdan farklıdır; değişkenli rasyonel eşitsizliklerin ayrıntıları bu konunun kapsamı dışındadır.

11. İki sınır içeren zincir eşitsizlikler

Bir niceliğin hem alt hem üst sınırının bulunması $a \le x < b$ gibi zincir gösterimle anlatılabilir. Böyle bir durumda aynı işlem zincirin üç kısmına da uygulanır. Örneğin $-3 \le 2x+1 < 9$ eşitsizliğinde üç bölümden de 1 çıkarılır: $-4 \le 2x < 8$. Pozitif 2'ye bölündüğünde $-2 \le x < 4$ sonucuna ulaşılır. Bu aralık $[-2,4)$ şeklinde yazılır. $x=-2$ için orta ifade -3 olur ve alt sınır dahildir; $x=4$ için orta ifade 9 olur ve üstteki kesin küçüklüğü sağlamaz.

İşlem negatif sayıyla yapılacaksa zincirdeki her karşılaştırma yön değiştirir; ardından sınırların sayısal artış sırası düzenlenerek yeniden yazılır. Örneğin $-6 < -2x \le 8$ zincirinin her bölümü -2'ye bölündüğünde $3 > x \ge -4$ bulunur; artan sırada $-4 \le x < 3$ olarak yazılır. Bağımsız denetim $x=-4$ için $-2x=8$ ve $-6<8\le 8$ koşulunun doğru, $x=3$ için $-2x=-6$ ve $-6<-6$ koşulunun yanlış olmasıdır.

$$a \le cx+d < b,\ c>0 \Rightarrow (a-d)/c \le x < (b-d)/c$$

Anlamı: Zincir eşitsizlikte aynı toplama ve pozitif bölme tüm bölümlerde uygulanır.

Koşullar: $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ve $c>0$. $c<0$ ise bölmedeki iki karşılaştırmanın yönü de ters döner.

Zincir eşitsizliklerden çözüm aralığına geçiş

Verilen sınır	Ara aşama	Sonuç	Aralık
$-3 \le 2x+1 < 9$	$-4 \le 2x < 8$	$-2 \le x < 4$	$[-2,4)$
$-6 < -2x \le 8$	$3 > x \ge -4$	$-4 \le x < 3$	$[-4,3)$
$1 < 2x+3 \le 11$	$-2 < 2x \le 8$	$-1 < x \le 4$	$(-1,4]$

12. Birden fazla koşulun kesişimi veya birleşimi

“Aynı anda” sağlanması istenen koşulların ortak çözümleri alınır. $x>2$ ve $x\le 6$ koşullarında hem 2'den büyük hem 6'yı aşmayan değerler geçerlidir; çözüm $2<x\le 6$ veya $(2,6]$ olur. İki çözüm aralığının ortak kısmına kesişim denir ve $\cap$ işaretiyle gösterilir. Buna karşılık “veya” bağlacı en az birinin doğru olmasını yeterli kılıyorsa aralıkların birleşimi alınır; $\cup$ işareti kullanılır. Örneğin $x<1$ veya $x\ge 4$ için çözüm $(-\infty,1)\cup[4,\infty)$ olur.

Bazen ayrı ayrı mümkün olan iki koşul birlikte imkânsızdır. $x<2$ ve $x\ge 5$ şartları aynı gerçek sayı tarafından karşılanamaz; çözüm kümesi boş küme ($\varnothing$) olur. Fakat $x<2$ veya $x\ge 5$ koşullarının çözüm kümesi boş değildir; iki ayrık aralığın birleşimidir. Koşul metnindeki “ve” ile “veya” ayrımı, yalnız sembol seçimini değil

matematiksel sonucu değiştirir. Sayı doğrusu çizimi bu farkı görünür kılabilir, ancak aynı bilgi aralık ifadeleriyle de eksiksiz verilmelidir.

Kesişim ve birleşime ait koşullar

Koşul	İşlem	Çözüm kümesi	Gerekçe
$x>2$ ve $x\le6$	Kesişim	$(2,6]$	Her ikisi de sağlanır
$x<1$ veya $x\ge4$	Birleşim	$(-\infty,1)\cup[4,\infty)$	En az biri yeterlidir
$x<2$ ve $x\ge5$	Kesişim	$\varnothing$	Ortak değer yoktur
$x<2$ veya $x\ge5$	Birleşim	$(-\infty,2)\cup[5,\infty)$	İki ayrı çözüm bölgesi

13. Gerçek sayı, tam sayı ve doğal sayı çözümlerinin ayrımı

Aynı eşitsizlik, değişkene izin verilen sayı kümesine göre farklı sonuçlar verebilir. $2\le x<8$ koşulunun gerçek sayılardaki çözümü $[2,8)$ aralığındaki sonsuz sayıdan oluşur. x tam sayı olmak zorundaysa yalnız 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 seçilebilir; toplam altı değer vardır. “x pozitif tam sayıdır” veya “x doğal sayıdır” gibi bağlam koşulları, çözüm kümesini daraltır. Bu kitapta doğal sayılar sıfırı da içerdiğinden, $0\le x<4$ koşulunun doğal sayı çözümleri 0, 1, 2 ve 3'tür.

Örneğin $x>-2$ ve $x\le3$ koşulları için gerçek çözüm $(-2,3]$ olur. Tam sayılar istenirse -1, 0, 1, 2, 3 olmak üzere beş değer bulunur; doğal sayılarda 0, 1, 2, 3 olmak üzere dört değer kalır. Kontrol, listedeki her sayının iki sınırı da sağlaması ve dışarıda kalan ilk tam sayıların -2 ile 4 olmasıdır. Günlük dilde adet veya kişi sayısı ancak negatif olmayan tam değer alabileceğinden, böyle bir bağlamda gerçek sayı çözümünü doğrudan fiziksel sonuç saymak doğru değildir.

Aynı eşitsizliğin farklı sayı kümelerindeki çözümleri

Koşul	Sayı kümesi	Çözüm gösterimi	Eleman sayısı
$2\le x<8$	$\mathbb{R}$	$[2,8)$	Sonsuz
$2\le x<8$	$\mathbb{Z}$	$\{2,3,4,5,6,7\}$	6
$0\le x<4$	$\mathbb{N}$	$\{0,1,2,3\}$	4
$-2<x\le3$	$\mathbb{Z}$	$\{-1,0,1,2,3\}$	5
$-2<x\le3$	$\mathbb{N}$	$\{0,1,2,3\}$	4

14. Sınır içeren sözel ifadelerden eşitsizlik kurma

Bir eşitsizlik modeli kurulurken önce değişkenin neyi temsil ettiği ve birimi, ardından sabit gider, birim başına miktar, üst veya alt sınır belirlenir. Örneğin temsili bir atölye paketleme işleminde 12 birimlik sabit hazırlık tüketimi ve her kutu başına 18 birimlik malzeme tüketimi bulunsun. Toplam malzeme 156 birimi aşmayacaksa kutu sayısı n için $12+18n\le156$ yazılır. $18n\le144$, yani $n\le8$ çıkar. Kutu sayısı negatif olmayan tam sayı olduğu için $n\in\{0,1,\dots,8\}$'dir. En fazla 8 kutu hazırlanabilir. Kontrol $12+18\cdot8=156$ ve $12+18\cdot9=174>156$ hesabıdır. Buradaki veriler gerçek bir kuruma ait değil, öğretici temsili değerlerdir.

Başka bir temsili üretim ilişkisinde başlangıçta 15 birim ürün bulunsun, her çevrimde 25 birim daha üretilebilsin ve hedef en az 240 birim olsun. Tamamlanan çevrim sayısı n negatif olmayan tam sayı olarak $15+25n\ge240$ yazılır. Buradan $n\ge9$ çıkar. Dokuz çevrimde $15+225=240$, sekiz çevrimde $15+200=215$ olduğu

için gerekli en küçük çevrim sayısı 9'dur. Her iki örnekte sonucun gerçek anlamı, eşitsizlik yönü kadar değişkenin tam sayı olması ve sabit katsayıların bağlamda geçerli kalmasına bağlıdır.

Sözel sınırların matematiksel gösterimi

İfade	Eşitsizlik	Sınır dahil mi?	Sayısal yorum
En az 240	$q \geq 240$	Evet	240 yeterlidir
156'yı aşmayan	$q \leq 156$	Evet	156 geçerlidir
20'den fazla	$q > 20$	Hayır	20 yeterli değildir
20'nin altında	$q < 20$	Hayır	20 dahil değildir
$12+18n \leq 156$	$n \leq 8$	Evet	n tam sayıysa en çok 8

15. Katsayının sıfır olması, parametre ve geçersiz genellemeler

Birinci dereceden eşitsizliğin değişken katsayısı sıfır değilken tek bir sınırdan oluşan yarı doğru çözümü elde edilir. Ancak işlemler sonunda x terimleri tamamen yok olabilir. Örneğin $2(x-3)>2x+5$ eşitsizliğinde $2x-6>2x+5$, yani $-6>5$ kalır; bu yanlış olduğundan hiçbir gerçek sayı çözüm değildir. Buna karşılık $4x+7 \leq 4x+7$ ifadesi $7 \leq 7$ sonucuna dönüşür ve tüm gerçek sayılar çözümdür. Bir eşitsizliğin sadeleştirilmiş halinin sabit doğru veya sabit yanlış oluşu, özgün x katsayısının kalmadığı özel durumdur.

Parametreli bir eşitsizlikte bölünen katsayının işareti bilinmiyorsa durumlar ayrı değerlendirilir. $kx<12$ ifadesinde k pozitifse $x<12/k$, k negatifse $x>12/k$ bulunur; $k=0$ ise eşitsizlik $0<12$ olur ve bütün gerçek sayılar bunu sağlar. Üç durumun aynı tek formül altında yazılması mümkün değildir. Örneğin $k=3$ için $x<4$, $k=-3$ için $x>-4$, $k=0$ için $x \in \mathbb{R}$ elde edilir. Kontrolde $k=-3$ ve $x=0$ seçildiğinde $0<12$ doğru; $x=-5$ seçildiğinde $15<12$ yanlış olduğundan yönün doğru çevrildiği görülür.

$$kx<12 \Rightarrow k>0 \text{ ise } x<12/k;\ k<0 \text{ ise } x>12/k;\ k=0 \text{ ise } Ç=\mathbb{R}$$

Anlamı: Değişkenin katsayısı parametre olduğunda sıfır, pozitif ve negatif değerler ayrı incelenir.

Koşullar: $k,x \in \mathbb{R}$. $k=0$ iken $12/k$ tanımsızdır; bu nedenle bölme yapılmaz.

Tanım kümesi ve sıfırla çarpma Bir eşitsizliği iki taraftan sıfırla çarpmak başlangıç karşılaştırmasını korumaz. İşareti bilinmeyen ifadeye bölmek veya onunla çarpmak yönü belirlemeden yapılamaz. Parametre sıfır olduğunda önce kalan sabit karşılaştırmanın doğru mu yanlış mı olduğuna bakılır. Gerçek hayat koşulları çözüm kümesini ayrıca sınırlayabilir.

16. Çözüm kümesini başlangıç koşulunda bağımsız doğrulama

Denklemlerde bulunan kök başlangıç eşitliğinde yerine konulurken, eşitsizlikte sınıra ve sınırın iki tarafına ait değerler denenebilir. Bu yöntem tek başına sonsuz çözümün kanıtı değildir; asıl gerekçe eşdeğer işlemlerle kurulan çözüm aralığıdır. Ancak sınır denetimi, negatif sayıya bölme veya eşitlik işaretinin dahil olup olmaması gibi hataları fark ettirir. Örneğin $6-2x<14$ ifadesinden $-2x<8$ ve negatif 2'ye bölmeyle $x>-4$ çıkar. $x=-4$ için $6-2\cdot(-4)=14$ olup kesin küçüklük yanlış, $x=0$ için $6<14$ doğru, $x=-5$ için $16<14$ yanlıştır. Bu üç sonuç çözüm yönünü doğrular.

Bir diğer örnekte $1<2x+3 \leq 11$ koşulu önce $-2<2x \leq 8$, ardından $-1<x \leq 4$ biçimine dönüştürülür. Alt sınır $x=-1$ için orta ifade 1 olur ve sıkı eşitsizlik nedeniyle dışarıda kalır. Üst sınır $x=4$ için orta ifade 11 olur, üstteki ≤

işareti nedeniyle dahil kalır. x=0 seçildiğinde 1<3≤11 doğrudur. Sonuç (−1,4] aralığıdır; iki sınırın farklı türde olması başlangıçta verilen koşulun doğrudan yansımasıdır.

Eşitsizlik çözümünde son denetimin bileşenleri

Aşama	Denetim ölçütü	Örnek karşılaştırma
Tanım ve birim	Değişkenin değer kümesi bilinir	Kutu sayısı negatif olamaz
İşlem eşdeğerliği	Her iki tarafta aynı geçerli işlem	Negatif bölmede yön tersine döner
Sınır noktası	< ve > dışlar; ≤ ve ≥ dahil eder	x<5 için x=5 dışarıda
Sınırın iki tarafı	Sağlanan ve sağlanmayan örnekler tutarlıdır	x>−4 için x=0 doğru, x=−5 yanlış
Çözüm aralığı	Aralık, sayı doğrusu ve eşitsizlik aynı kümedir	−1<x≤4 ⇔ (−1,4]

En önemli üç ayrım Negatif sayıyla çarpma veya bölmede eşitsizliğin yönü ters döner; sıfıra bölme tanımsızdır. Kesin ve eşitliğe izin veren işaretler farklı sınır kümeleri oluşturur. Çözüm kümesi gerçek sayılarda bir aralık olabilir ancak tam/doğal sayı ve gerçek yaşam koşullarında uygun değerler ayrıca seçilir.

Basit eşitsizlikleri çözmek, sayıların sıralamasını koruyan işlemleri uygulayarak bir koşulu sağlayan bütün değerleri tanımlamaktır. Eşitsizliğin çözümünde yalnız sayısal sınır değil, sınırın dahil olup olmadığı, negatif katsayıyla işlemde yönün doğru çevrilmesi, kullanılan sayı kümesi ve günlük bağlamın koşulları da korunmalıdır. Bu ilkeler daha sonra karşılaşılacak üslü-köklü ifadeler ve daha geniş problem türleri için temel oluşturur.

KONU 2.5

ÜSLÜ VE KÖKLÜ SAYILARA GİRİŞ

Bir sayının kendisiyle tekrarlı çarpımını kısa biçimde göstermek için üs, bu işlemin ters yönündeki uygun büyüklüğü belirlemek için de kök kavramı kullanılır. Büyük sayıların yazımından bir karenin alanının kenar uzunluğuna dönüştürülmesine kadar pek çok ilişkide bu gösterimler görülür. Üslü ifadeler işlemlerin sırasını ve çarpan sayısını düzenlerken köklü ifadeler, sonucu tam sayı olmayan büyüklükleri de kesin biçimde göstermeye yarar. Kuralları kullanırken tabanın işareti, üssün türü, kökün derecesi ve gerçek sayılar içindeki tanım koşulları birlikte değerlendirilmelidir.

1. Üslü ifadenin tabanı, üssü ve tekrarlı çarpım anlamı

Bir a gerçek sayısının n pozitif tam sayı kuvveti, a sayısının n kez çarpılmasıdır. a taban, n üs ya da kuvvettir. Örneğin $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ olur. Üs çarpımda kaç tane 3 bulunduğunu belirler; 3^4 ifadesi $3 \cdot 4 = 12$ anlamına gelmez. Ters denetim olarak $81 = 3 \cdot 27$ ve $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ olduğundan dört tane 3 çarpımına geri dönülür. Üssün 1 olması özel fakat tutarlı bir durumdur: $a^1 = a$.

Üslü gösterim öncelikle aynı sayının tekrarlanan çarpımını kısaltır. 5^3 ile 3^5 arasındaki fark bunun iyi bir örneğidir: $5^3 = 125$, $3^5 = 243$'tür. Taban ile üs yer değiştirince genel olarak sonuç değişir. Tabanın 1 olması durumunda ise her pozitif tam sayı kuvveti 1'dir. Sıfırın pozitif tam sayı kuvvetleri 0 olur; çünkü çarpanlardan biri dahi 0 olduğunda çarpım 0'dır.

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \text{ (n çarpan)}; \quad a^1 = a$$

Anlamı: Pozitif tam sayı üssü, aynı tabanın kaç kez çarpıldığını gösterir.

Koşullar: $a \in \mathbb{R}$; n pozitif tam sayıdır. Bu tanımın dışında sıfırıncı ve negatif tam sayı üsleri ayrıca açıklanacaktır.

Üslü ifadelerin tekrarlı çarpımla karşılıkları

Üslü gösterim	Çarpım veya anlamı	Sonuç
2^5	2·2·2·2·2	32
4^3	4·4·4	64
$(1/2)^3$	(1/2)·(1/2)·(1/2)	1/8
10^4	10·10·10·10	10 000
7^1	Tek çarpan 7	7

2. Negatif taban ve parantezin işaret üzerindeki etkisi

Negatif bir sayının pozitif tam sayı kuvvetinde üssün tek veya çift olması sonucun işaretini belirler. $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$ iken $(-2)^4 = 16$'dır. Çünkü birinci çarpımda üç, ikincisinde dört negatif çarpan vardır. Negatif çarpan sayısı çift olduğunda sonuç pozitif, tek olduğunda negatiftir. Ancak bu kural tabanın gerçekten negatif olduğunda geçerlidir; üst simgenin hemen önündeki eksi işaretinin kapsamı ayrıca okunmalıdır.

Parantezsiz -3^2, işlem önceliği gereği $-(3^2) = -9$ demektir; $(-3)^2$ ise 9'dur. Benzer biçimde $-2^4 = -16$, $(-2)^4 = 16$ olur. Üssü negatif olan bir ifade ile tabanı negatif olan ifade de aynı şey değildir: $2^{-3} = 1/8$, $(-2)^3 = -8$. İki gösterimde eksi işaretinin bulunduğu yer farklı olduğundan yapılan işlem de değişir. Bağımsız denetimde $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$, $-3^2 = -(3\cdot3) = -9$ bulunur.

Parantez ve işaretin sonucu değiştirdiği durumlar

Gösterim	Açık yazımı	Sonuç
-4^2	−(4·4)	−16
$(-4)^2$	(−4)·(−4)	16
-2^3	−(2·2·2)	−8
$(-2)^3$	(−2)·(−2)·(−2)	−8
$(-1)^5$	Beş negatif birim çarpılır	−1
$(-1)^6$	Altı negatif birim çarpılır	1

Parantez ve işaret $-a^2$ ile $(-a)^2$ genel olarak farklıdır. Üs, parantez yoksa yalnız doğrudan bağlı olduğu tabana uygulanır; baştaki eksi işareti bütün kuvvetin dışında kalabilir. Bir ifadenin negatif üssü ise sonuç işaretini değil, sıfırdan farklı tabanın tersini belirtir.

3. Sıfırıncı kuvvet ve negatif tam sayı üssü

Sıfırdan farklı a için $a^0 = 1$ kabul edilir. Bu kural, aynı tabanlı kuvvetlerin bölünmesindeki düzenin devamıdır: $5^3/5^3 = 1$ ve üs farkı $3-3 = 0$ olduğundan $5^0 = 1$ olmalıdır. Buna karşılık 0^0 bu kitabın kullandığı temel aritmetik çerçevesinde tanımsız bırakılır; $a^0 = 1$ kuralı a = 0'a genişletilmez.

Negatif tam sayı üssü, sıfırdan farklı tabanın çarpmaya göre tersinin pozitif kuvvetini gösterir. $4^{-2} = 1/4^2 = 1/16$; $(2/3)^{-2} = (3/2)^2 = 9/4$ olur. Çarpma denetimi $4^2 \cdot 4^{-2} = 16 \cdot (1/16) = 1$ ve $(2/3)^2 \cdot (2/3)^{-2} = (4/9) \cdot (9/4) = 1$ sonuçlarını verir. Sıfırın negatif kuvveti tanımsızdır; çünkü tersini almak sıfıra bölmeyi gerektirir.

$$a^0 = 1;\ a^{-n} = 1/a^n = (1/a)^n$$

Anlamı: Sıfırıncı kuvvet birim değeri, negatif üs çarpımsal tersi ifade eder.

Koşullar: $a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$; n pozitif tam sayıdır. 0^0 ve 0'ın negatif tam sayı kuvvetleri bu çerçevede tanımsızdır.

Sıfırıncı ve negatif kuvvetlere ilişkin temel örnekler

İfade	Değer	Koşul veya gerekçe
12^0	1	Taban sıfır değil
$(-5)^0$	1	Negatif taban da sıfır değil
2^{-4}	1/16	$1/2^4$
$(-3)^{-2}$	1/9	$1/(-3)^2$
$(-3)^{-3}$	−1/27	$1/(-3)^3$
0^{-1}	Tanımsız	1/0 elde edilir

4. Aynı tabanlı kuvvetlerin çarpılması ve bölünmesi

Aynı tabanlı iki üslü ifade çarpıldığında taban korunur, üsler toplanır. Bunun nedeni her iki çarpımdaki tabanların tek uzun çarpımda birleşmesidir. $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7 = 128$ olur. Bağımsız denetimde $8 \cdot 16 = 128$ bulunur. Kural pozitif tam sayı üsleriyle açıkça görülür ve sıfırdan farklı tabanda tam sayı üslere genişletilebilir.

Aynı tabanlı kuvvetler bölündüğünde bölünenin üssünden bölenin üssü çıkarılır. Örneğin $3^6/3^2 = 3^4 = 81$'dir; doğrudan $729/9 = 81$ aynı sonucu verir. Üs farkı negatif olduğunda sonuç bir kesir olabilir: $2^2/2^5 = 2^{-3} = 1/8$; $4/32 = 1/8$ kontrolü bunu doğrular. Bölmede taban sıfır olamaz. Tabanlar farklıysa bu kurallar doğrudan uygulanmaz: $2^3 \cdot 3^4$, 6^7 değildir.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ a^m/a^n = a^{m-n}$$

Anlamı: Aynı tabanlı kuvvetlerin çarpımında üsler toplanır; bölümünde çıkarılır.

Koşullar: $m,n \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$. Pozitif üslerde yalnız çarpma için a=0 da anlamlıdır; bölümün paydası hiçbir durumda sıfır olamaz.

Aynı tabanlı kuvvetlerde işlem ve kontrol

İfade	Üslü dönüşüm	Sayısal denetim
$5^2 \cdot 5^3$	5^5	25·125 = 3 125
$2^8 / 2^5$	2^3	256/32 = 8
$7^3 / 7^3$	7^0	343/343 = 1
$3^2 / 3^4$	3^{-2}	9/81 = 1/9
$(-2)^3 \cdot (-2)^2$	$(-2)^5$	(−8)·4 = −32

5. Bir kuvvetin kuvvetini alma ve ortak üslü çarpımlar

Üslü bir ifadenin yeniden kuvveti alınırken üsler çarpılır: $(2^3)^2$ ifadesi $2^3 \cdot 2^3$ olarak açılır, dolayısıyla $2^6 = 64$ eder. İlk ifadeden bağımsız hesap $8^2 = 64$'tür. Aynı mantık $(a^m)^n = a^{mn}$ ilişkisini verir. Üslerin birleştirilmesi sırasında parantezlerin yeri önemlidir: $(2^3)^2 = 64$ iken 2^(3²) = $2^9 = 512$'dir. Bu iki yazım aynı işlem değildir.

İki tabanın üstleri aynıysa çarpım veya bölüm ortak üsle ifade edilebilir: $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1\,000$; doğrudan $8 \cdot 125 = 1\,000$'dir. $(12/3)^2 = 12^2/3^2 = 144/9 = 16$ sonucu da önce 12/3 = 4, sonra $4^2 = 16$ bulunarak sınanır. Bölme için bölen sıfır olamaz. Toplam veya fark için aynı tür kural bulunmaz: $(2+3)^2 = 25$, $2^2+3^2 = 13$'tür.

$$(a^m)^n = a^{mn};\ (ab)^n = a^n b^n;\ (a/b)^n = a^n/b^n$$

Anlamı: Kuvvetin kuvvetinde üsler çarpılır; çarpımın veya bölümün kuvveti her çarpana uygulanır.

Koşullar: Tam sayı üslerle genel kullanımda a,b ≠ 0 varsayılır; bölümde her durumda b ≠ 0'dır. Yalnız pozitif tam sayı üslerde çarpımın kuvveti için sıfır tabanlara da izin verilir.

6. Üslü ifadelerde toplama ve çıkarma: neden üsler toplanmaz?

Üs toplama kuralı yalnız aynı tabanlı ifadelerin çarpımı içindir. $2^3+2^3 = 8+8 = 16$ eder; $2^6 = 64$ değildir. İki eşit terimin toplamı ortak çarpan alınarak $2 \cdot 2^3 = 2^4$ şeklinde de yazılabilir; ancak burada sonucun 2^4 oluşu, $2 \cdot 2^3$ çarpımından gelir. $3 \cdot 5^4 - 5^4 = (3-1) \cdot 5^4 = 2 \cdot 625 = 1\,250$ örneğinde de toplanıp çıkarılan katsayılardır.

Tabanları ve üsleri birbirinden farklı terimler, uygun ortak bir üslü çarpan olmadıkça tek kuvvete dönüştürülmez. Örneğin $2^3+3^3 = 8+27 = 35$'tir; $(2+3)^3 = 125$'tir. Bu hata, çarpmanın toplama üzerinde dağılımının kuvvet alma işlemine koşulsuz taşınmasından doğar. Birleştirme yapılmadan önce işaretin toplama mı çarpma mı olduğu belirlenmelidir.

Üs kurallarında doğru ve yanlış genellemeler

İşlem	Geçerli değerlendirme	İlişkinin nedeni
$4^2 \cdot 4^3$	$4^5 = 1\,024$	Aynı tabanlı çarpma
4^2+4^3	16+64 = 80	Toplama; 4^5 değildir
$(3 \cdot 2)^2$	$3^2 \cdot 2^2 = 36$	Çarpımın kuvveti
$(3+2)^2$	25	$3^2+2^2 = 13$ değildir
$9^3/9^2$	9	Aynı tabanlı bölme

7. Onun kuvvetleri, ondalık gösterim ve bilimsel gösterime giriş

Onun pozitif tam sayı kuvvetleri onluk basamak sisteminin büyük birimlerini gösterir: $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^5 = 100\,000$. Negatif kuvvetler küçük ondalık birimlere karşılık gelir: $10^{-1} = 0{,}1$; $10^{-3} = 0{,}001$. Dolayısıyla $6{,}42\cdot10^3 = 6\,420$ ve $6{,}42\cdot10^{-2} = 0{,}0642$ olur. Ters denetim $6\,420/10^3 = 6{,}42$ ve $0{,}0642/10^{-2} = 6{,}42$ hesaplarıyla yapılabilir.

Sıfırdan farklı bir sayının bilimsel gösteriminde, tam sayı n ve $1 \le |a| < 10$ koşullarını sağlayan a için sayı $a\cdot10^n$ biçimindedir. $4\,800\,000 = 4{,}8\cdot10^6$; $0{,}00072 = 7{,}2\cdot10^{-4}$ eşitliklerinde virgülün kaydırıldığı basamak sayısı üsse yansır. Negatif sayılar için işaret katsayıda tutulur: $-53\,000 = -5{,}3\cdot10^4$. $48\cdot10^5$ aynı sayıyı verebilse de katsayının mutlak değeri 10'dan küçük olmadığı için standart bilimsel gösterim değildir.

$$N = a\cdot10^n;\ 1 \le |a| < 10$$

Anlamı: Sıfırdan farklı sayının bilimsel gösterimi bir katsayı ve onun tam sayı kuvvetinin çarpımıdır.

Koşullar: $N \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$; a gerçek sayıdır. N=0 ayrıca 0 olarak gösterilir, bu standart katsayı aralığına girmez.

Onun kuvvetleri ve bilimsel gösterim

Olağan yazım	Bilimsel veya üslü yazım	Denetim
25 000	$2{,}5\cdot10^4$	2,5·10 000
0,0048	$4{,}8\cdot10^{-3}$	4,8/1 000
−720 000	$-7{,}2\cdot10^5$	−7,2·100 000
$3{,}6\cdot10^2$	360	3,6·100
$5{,}07\cdot10^{-2}$	0,0507	5,07/100

8. Karekökün tanımı ve negatif olmayan kök değeri

Sıfırdan büyük veya sıfıra eşit a gerçek sayısının karekökü, karesi a olan negatif olmayan sayıdır ve √a ile gösterilir. √49 = 7'dir; çünkü $7^2 = 49$ ve $7 \ge 0$'dır. −7'nin karesi de 49 olsa bile √49'un değeri −7 değildir. Böylece √49 ile $x^2=49$ denklemi birbirinden ayrılır: Birincisi tek bir negatif olmayan değer olan 7'yi; ikincisi x=7 ve x=−7 olmak üzere iki çözümü verir.

Gerçek sayılarda karekök içi negatif olamaz: √(−9), bir gerçek sayı değildir. Buna karşılık negatif bir sayının küpkökü gerçek olabilir; küpkök daha sonraki başlıkta açıklanacaktır. √0 = 0, √1 = 1, √0,25 = 0,5 örneklerinin her biri bulunan değerin karesi alınarak denetlenir. √0,25 için $(0{,}5)^2 = 0{,}25$; √(9/16) için $(3/4)^2 = 9/16$ kontrolü kullanılabilir.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \text{ ve } b \ge 0$$

Anlamı: Karekök işareti, karesi a olan negatif olmayan sayıyı seçer.

Koşullar: $a \in \mathbb{R}$ ve $a \ge 0$; $b \in \mathbb{R}$. $a < 0$ ise gerçek sayılarda √a tanımlı değildir.

Karekök ile kare denklem çözümlerinin ayrımı

Gösterim	Doğru sonuç	Açıklama
√81	9	Kökün değeri negatif değildir
$x^2 = 81$	x=−9 veya x=9	İki sayı da aynı kareyi verir
√0	0	Sıfırın karesi sıfırdır
√(1/16)	1/4	$(1/4)^2 = 1/16$
√(−16)	Gerçek sayı değil	Negatif kök içi gerçeklerde tanımsız

Karekök ve denklem çözümü √a, a≥0 iken daima negatif olmayan değerdir. √25=5'tir; ±5 değildir. $x^2=25$ denkleminin çözümleri ise −5 ve 5'tir. Gerçek sayılar içinde negatif sayının karekökü yoktur.

9. Tam kare sayılar ve kökün yaklaşık değerinin sınırlandırılması

Bir tam sayının karesi olarak yazılabilen negatif olmayan tam sayılar tam kare sayılardır: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ... 45 tam kare değildir; çünkü $6^2=36$ ve $7^2=49$ olduğundan $6<\sqrt{45}<7$'dir. Bu yöntem, kök değerini herhangi bir tahmine bırakmadan belirli bir aralığa yerleştirir. √45 sayısının 6'ya mı 7'ye mi daha yakın olduğu ayrıca değerlendirilir; sınırların ortalaması alınarak kesin eşitlik kurulmaz.

Daha dar bir sınır gerektiğinde ondalık değerlerin kareleri denenebilir. $6,7^2 = 44,89$ ve $6,8^2 = 46,24$ olduğundan $6,7 < \sqrt{45} < 6,8$ bulunur. Yaklaşık değerin 6,7 olması kesin eşitlik değildir; daha ileri basamaklarda sayı değişebilir. Benzer biçimde $5^2=25$ ve $6^2=36$ olduğundan $5<\sqrt{30}<6$; $5,4^2=29,16$ ve $5,5^2=30,25$ olduğundan $5,4<\sqrt{30}<5,5$ olur. Bütün sınırlar kareleri alınarak bağımsız denetlenmiştir.

Tam karelere göre karekök aralıkları

İfade	Alt-üst tam kare	Kökün bulunduğu aralık
√20	16<20<25	4<√20<5
√45	36<45<49	6<√45<7
√70	64<70<81	8<√70<9
√110	100<110<121	10<√110<11
√144	$144=12^2$	√144=12

10. Kök içindeki tam kare çarpanı dışarı çıkarma

Kök içindeki sayıyı uygun bir tam kareyle kalan çarpana ayırmak ifadeyi sadeleştirir. √72 = √(36·2) = 6√2 olur. İki gösterimin eşitliği, $(6\sqrt{2})^2 = 36\cdot2 = 72$ ve her iki tarafın negatif olmayan değerler taşımasıyla doğrulanır. Aynı işlem √98 = √(49·2) = 7√2 ve √180 = √(36·5) = 6√5 örneklerinde kullanılır. Bu tür dönüşümlerde amaç yaklaşık değere geçmek değil, aynı gerçek sayıyı daha anlaşılır kesin bir gösterimle yazmaktır.

Değişkenli ifadelerde işaret koşulu unutulmamalıdır. $\sqrt{(x^2)} = |x|$ olur; çünkü hem x hem −x aynı kareyi verir ve karekök negatif olmayan değeri seçer. x = −6 alındığında $\sqrt{(x^2)} = \sqrt{36} = 6$ iken x = −6'dır; sonucu doğrudan x yazmak yanlıştır. Buna karşılık x≥0 koşulu biliniyorsa $\sqrt{(x^2)} = x$ denebilir. Değişkenli ifadelerin daha ileri dönüşümleri ayrı cebir konularıyla birlikte ele alınabilir.

$$\sqrt{(a^2b)} = |a|\sqrt{b};\ \sqrt{(x^2)} = |x|$$

Anlamı: Tam kare çarpan kökün dışına kendi mutlak değeriyle çıkar.

Koşullar: a,x ∈ ℝ, b≥0. Karekökün negatif olmaması nedeniyle |a| kullanılır; a≥0 ise |a|=a olur.

11. Kareköklü ifadelerde çarpma ve bölme

İki negatif olmayan sayının karekökleri çarpıldığında kök içindeki sayıların çarpımının karekökü elde edilir: √a·√b = √(ab). Örneğin √8·√18 = √144 = 12'dir. Alternatif yöntemde √8 = 2√2 ve √18 = 3√2 olduğundan çarpım 6·(√2)² = 12 olur. Benzer biçimde √50/√2 = √25 = 5; ilk ifade 5√2/√2 biçiminde de sadeleşir. Bölme için payda kökünün sıfır olmaması şarttır.

Kök işlemlerindeki bu kurallar, kök içindeki sayıların işaret koşuluyla sınırlıdır. Gerçek sayılar içinde √(−4)·√(−9) gibi bir ifade iki karekökü ayrı ayrı tanımlı kılmadığı için çarpım özelliği kullanılarak √36'ya dönüştürülemez. Ayrıca √a/√b ifadesinde b=0 olursa sıfıra bölme ortaya çıkar; işlem tanımsızdır. Köklerin çarpımıyla toplamı farklı işlemlerdir ve aynı kurallarla sadeleştirilmez.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{(ab)};\ \sqrt{a}/\sqrt{b} = \sqrt{(a/b)}$$

Anlamı: Negatif olmayan kök içleri çarpımda birleştirilebilir; bölümde kök altında bölünebilir.

Koşullar: İlk bağıntıda a,b≥0. İkinci bağıntıda a≥0, b>0 olmalıdır. Gerçek sayılar için kök içinin negatifliği veya sıfır payda kabul edilmez.

Köklerde çarpım ve bölümün iki yolla denetimi

İşlem	Doğrudan kök hesabı	Başka yoldan denetim
√12·√3	√36=6	2√3·√3=6
√8·√18	√144=12	2√2·3√2=12
√75/√3	√25=5	5√3/√3=5
√32/√2	√16=4	4√2/√2=4

12. Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma

Kök içleri aynı olan ve aynı kök derecesini taşıyan terimler katsayıları toplanarak veya çıkarılarak birleştirilir. 4√3+2√3 = 6√3; 7√5−3√5 = 4√5 olur. Bu işlem, aynı tür cebirsel terimlerin katsayılarını toplamaya benzer: 4t+2t = 6t eşitliğinde t yerine √3 yazılır. Ancak kök içleri farklıysa önce sadeleştirme mümkün olup olmadığı araştırılır; doğrudan kök içleri toplanmaz.

Örneğin √50+√8 = 5√2+2√2 = 7√2'dir. Bu sonucun kontrolü, yaklaşık kök değerlerinin toplamıyla sağlanabileceği gibi ortak √2 çarpanı alınarak (5+2)√2 biçiminde de yapılır. Buna karşılık √9+√16 = 3+4 = 7; √(9+16) = √25 = 5'tir. Kök içlerini toplama işlemi genel olarak geçersizdir. Aynı ayrım çıkarma için de geçerlidir: √25−√9 = 5−3 = 2 iken √(25−9) = 4'tür.

$$a\sqrt{c}+b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c};\ a\sqrt{c}-b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$$

Anlamı: Aynı köklü kısım ortak çarpan alınarak katsayılar üzerinde işlem yapılır.

Koşullar: a,b ∈ ℝ; c≥0. Farklı kök içleri ancak aynı köklü kısma sadeleşiyorsa benzer terime dönüştürülür.

13. Paydada karekök bulunması ve eşdeğer kesir oluşturma

Bir kesrin paydasında √a gibi sıfırdan farklı karekök varsa pay ve paydayı aynı pozitif karekökle çarpmak paydayı rasyonel sayıya dönüştürebilir. Örneğin 3/√5 = (3√5)/(√5·√5) = 3√5/5'tir. Çarpılan √5/√5 oranı 1 olduğundan kesrin değeri değişmez. Kontrol etmek için yeni ifadeyi √5 ile çarptığımızda 3 elde edilir; bu da ilk gösterimin aynı payda ile çarpılmasıyla tutarlıdır.

Paydada iki terimli köklü toplam veya fark bulunduğunda daha ileri cebirsel yöntemler de kullanılabilir; bu giriş bölümünde yalnız tek karekök içeren payda üzerinde durulur. İşlemin tanımı bakımından a>0 gerekir. 3/√0 geçersizdir ve payda sıfır olamaz. Ayrıca yeni payın köklü kalması bir hata değildir; amaç kesrin değerini değiştirmeden paydada kök bulunmayan eşdeğer bir yazım elde etmektir.

$$c/\sqrt{a} = c\sqrt{a}/a$$

Anlamı: Pay ve paydayı √a ile çarparak eşdeğer kesir elde edilir.

Koşullar: a>0 ve c gerçek sayıdır; sıfıra bölme yapılmaz.

14. Küpkök ve kök derecesinin temel anlamı

Karekök dışında küpkök de kullanılır. $\sqrt[3]{a}$, küpü a olan gerçek sayıdır. $3^3=27$ olduğundan $\sqrt[3]{27}=3$; $(-4)^3=-64$ olduğundan $\sqrt[3]{(-64)}=-4$'tür. Tek dereceli köklerde negatif sayıların da gerçek kökü bulunabilir; karekökün negatif kök içini kabul etmeyişi bütün kök derecelerine koşulsuz taşınamaz. $\sqrt[3]{8}=2$ örneğinde sonuç, 2·2·2=8 hesabıyla; $\sqrt[3]{(-125)}=-5$ örneğinde $(-5)^3=-125$ hesabıyla denetlenir.

Genel n'inci kök düşüncesinde kök derecesinin tek veya çift olması işaret açısından önemlidir. Çift dereceli köklerde gerçek sayı kapsamı için kök içi negatif olamaz ve ana kök negatif olmayan değer olarak seçilir. Tek dereceli köklerde negatif kök içi için de gerçek değer tanımlanabilir. Bu kitabın bu başlığında kapsam karekök ve temel küpkök ilişkisiyle sınırlı tutulur; karmaşık sayılar ve ileri kök denklemleri işlenmez.

Kök derecesi ve negatif sayıların durumu

İfade	Gerçek sayı değeri	Kontrol
√64	8	$8^2=64$
$\sqrt[3]{64}$	4	$4^3=64$
$\sqrt[3]{(-27)}$	−3	$(-3)^3=-27$
√(−27)	Gerçek sayı değil	Negatif kök içi; derece çift
$\sqrt[3]{0}$	0	$0^3=0$

15. Üslü ve köklü gösterimde karşılaştırma, kesin ve yaklaşık değer

Pozitif tabanı 1'den büyük olan kuvvetler, pozitif tam sayı üs arttıkça büyür. $2^5=32$ ve $2^6=64$ bunun örneğidir. Fakat 0<a<1 tabanında pozitif tam sayı üssü artırmak değeri küçültür: $(1/2)^2=1/4$, $(1/2)^3=1/8$'dir ve 1/8<1/4. Negatif tabanda işaretler ve üssün tek-çiftliği ayrıca değerlendirileceğinden “üs büyürse sayı mutlaka büyür” genellemesi yapılmamalıdır.

Karekök, negatif olmayan sayılarda sıralamayı korur: 16<18<25 olduğundan 4<√18<5 elde edilir. √18 sayısını yalnız yaklaşık olarak 4,24 diye yazmak, √18'in tam değerinin 4,24 olduğu anlamına gelmez. Tam kök değeri birden fazla yolla denetlenebilir: √18=3√2 ve her iki ifadenin karesi 18'dir. $4{,}24^2=17{,}9776$

olduğundan 4,24 yaklaşık değer olmakla birlikte kesin değildir. Kesin köklü gösterim ile yuvarlanmış ondalık sonuç arasındaki bu ayrım ölçü ve karşılaştırmalarda önemlidir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

16. Öğretici modelleme ve sonuç denetiminde temel koşullar

Bir kare biçimindeki alanın yüzölçümü 196 m² ise kenarı √196=14 m'dir. Karekökün seçilme nedeni alanın kenarın karesine eşit olması, negatif uzunluğun geometrik bağlamda anlam taşımamasıdır. Bağımsız denetim 14 m·14 m = 196 m² çarpımıdır. Yüzölçümü 75 m² olan başka bir karede kenar √75=5√3 m olarak kesin gösterilir; $(5\sqrt{3})^2=75$ denetimi yapılır. Gerçek kullanımda yaklaşık uzunluk gerekiyorsa bu değerin ondalık tahmini ayrıca belirtilir.

Üslü gösterim büyük ve küçük ölçüleri aynı basamak ilkesiyle anlatır. Örneğin 0,00036 m = $3{,}6\cdot10^{-4}$ m'dir; $3{,}6\cdot0{,}0001 = 0{,}00036$ kontrolü yapılabilir. Ancak $3{,}6\cdot10^{-4}$ m sayısını $3{,}6\cdot10^{4}$ m diye yazmak büyüklüğü yüz milyon kat değiştirir. Bu nedenle işaret, taban, üs ve ölçü birimi sonucu denetlerken birlikte ele alınmalıdır. Matematiksel sonuç gerçek dünyadaki ölçünün hassasiyetinden daha fazla basamaklı çıkabilir; hesapta kesin gösterim ile sunulan yaklaşık değer birbirine karıştırılmaz.

İşlem kurallarının sınırı Üsler aynı tabanlı kuvvetlerin çarpımında toplanır, bölümünde çıkarılır; toplama ve çıkarma işlemlerine bu kural uygulanmaz. $(a+b)^2=a^2+b^2$ ve $\sqrt{(a+b)}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ genel olarak yanlıştır. $\sqrt{(x^2)}=|x|$ olur. Gerçek sayılarda karekök içi negatif olamaz; payda hiçbir zaman sıfır olamaz.

Üslü ve köklü gösterimlerin ortak amacı bir büyüklüğü başka bir işlemle eşdeğer biçimde ifade etmektir. Bu eşdeğerlik, çarpanların açık yazımı, kuvveti geri alma, karesini veya küpünü hesaplama, paydayı denetleme ve yaklaşık sayıyı sınırlandırma yöntemleriyle kontrol edilebilir. Bir kuralın geçerliliği yalnız biçim benzerliğine değil, sayıların tanım kümesine ve yapılan işlemin türüne bağlıdır. Sonraki konuda mutlak değerin sıfıra uzaklık anlamı ve bu gösterimin işaretli sayılarla ilişkisi ayrıntılandırılacaktır.

KONU 2.6

MUTLAK DEĞER VE TEMEL İŞLEMLER

Sayıların işareti, bir referans noktasına göre yön bildirir; mutlak değer ise bu yönü dikkate almadan büyüklüğün sıfıra uzaklığını verir. Bu iki bilgi birbirini tamamlar. Örneğin −8 ve +8 farklı sayılardır; sayı doğrusunda sıfırın farklı taraflarında bulunurlar, ancak sıfıra olan uzaklıkları sekizer birimdir. Mutlak değer, negatif işaretleri keyfî olarak kaldıran bir işlem değil, belirli bir uzaklığı ölçen matematiksel tanımdır. Bu nedenle mutlak değer içeren eşitlik ve eşitsizliklerde işaret koşullarını korumak, doğru sonuca ulaşmanın temelidir.

1. Mutlak değerin sayı doğrusu üzerindeki anlamı

Bir gerçek sayının sayı doğrusundaki noktasının sıfıra uzaklığına o sayının mutlak değeri denir. x sayısının mutlak değeri |x| ile gösterilir. Uzaklık yön taşımaz; bu yüzden mutlak değer sonucu negatif olamaz. |−9| = 9, |9| = 9 ve |0| = 0 olur. Sonuncusu önemlidir: Mutlak değer her zaman kesinlikle pozitif değil, sıfır veya pozitiftir. Sayı doğrusunda bir noktanın kendisine uzaklığı sıfırdır.

Mutlak değerde çizgilerin içindeki sayı işaretli kalabilir; sonuç ise o sayının sıfırdan uzaklığıdır. Örneğin −2,5 sayısı sıfırın solunda 2,5 birim uzaklıkta olduğundan |−2,5|=2,5'tir. Aynı değerin pozitif karşılığı için |2,5|=2,5 bulunur. Negatif bir sayıyı sağa taşımak söz konusu değildir; uzaklık ölçüsü alınmaktadır. Bu bakış, daha sonra iki nokta arasındaki farkın neden mutlak değerle ifade edildiğini de açıklar.

$$x \geq 0 \text{ ise } |x|=x;\ x < 0 \text{ ise } |x|=-x$$

Anlamı: Gerçek sayının mutlak değeri sıfırdan uzaklığıdır; negatif sayının toplamsal tersi alınarak negatif olmayan sonuç elde edilir.

Koşullar: $x \in \mathbb{R}$. x=0 için her iki sınır anlatımında sonuç 0'dır; parçalı tanımda sıfır ilk duruma dahil edilmiştir.

Sayı ve mutlak değerin karşılaştırılması

Sayı	Sayı doğrusundaki konum	Mutlak değeri	Gerekçe
−11	Sıfırın 11 birim solu	11	mutlak(−11)=−(−11)
−3/4	Sıfırın 3/4 birim solu	3/4	Uzaklık yön içermez
0	Başlangıç noktası	0	Sıfırın sıfıra uzaklığı sıfır
4,2	Sıfırın 4,2 birim sağı	4,2	Sayı zaten negatif değil
√5	Sıfırın sağı	√5	√5 pozitif gerçek sayıdır

2. Parçalı tanımı uygulamak ve işaret belirlemek

Mutlak değerin içi bir cebirsel ifade olduğunda önce bu ifadenin işareti değerlendirilir. |x−4| için x≥4 olduğunda x−4 negatif değildir; sonuç x−4 olarak kalır. x<4 olduğunda içerisi negatiftir ve dışarı −(x−4)=4−x biçiminde çıkar. Örneğin x=1 için |1−4|=|−3|=3; x=7 için |7−4|=|3|=3'tür. Ayrı denetim olarak iki değerin de 4'e uzaklığı 3 birimdir.

Burada işaretin tespit edilmesi sonucunda mutlak değer tek bir sayıya dönüşür. |2x+6| ifadesi, x≥−3 için 2x+6; x<−3 için −2x−6 olur. x=−5 kullanılırsa içerisi −4 ve mutlak değeri 4'tür; parçalı tanımın ikinci kolu −2·(−5)−6=4 verir. x=0 için içerisi 6, ilk kol da 6 verir. Bu ikinci kontrol, dalların hangi aralıklarda geçerli olduğunu gösterir.

$$|x-a| = x-a\ (x \geq a);\ |x-a| = a-x\ (x < a)$$

Anlamı: Bir sayı ile a referansının farkının mutlak değeri iki noktanın uzaklığıdır.

Koşullar: $x, a \in \mathbb{R}$. Dalların seçimi x−a ifadesinin işaretine bağlıdır.

Değişkenli mutlak değerde parçalı açılım

İfade	İçinin negatif olmama koşulu	Bu koşuldaki açılım	Diğer koşuldaki açılım
mutlak(x−4)	x≥4	x−4	4−x
mutlak(x+5)	x≥−5	x+5	−x−5
mutlak(3−x)	x≤3	3−x	x−3
mutlak(2x+6)	x≥−3	2x+6	−2x−6

3. Mutlak değerin negatif olmaması ve sıfır koşulu

Bir uzaklık negatif ölçülemediği için $|x|\geq 0$ her gerçek x için doğrudur. Mutlak değerin sıfır olması yalnız içindeki değerin sıfır olmasıyla mümkündür: $|x|=0$ ile $x=0$ aynı koşuldur. Örneğin $|5x-15|=0$ eşitliğinde $5x-15=0$, dolayısıyla $x=3$'tür. Başlangıç ifadesine $x=3$ konulduğunda $|15-15|=0$ bulunur; başka bir gerçek değerin uzaklığı sıfır olamaz.

Mutlak değerin pozitif olması ise içinin sıfırdan farklı olduğuna karşılık gelir: $|x-2|>0$ için $x\neq 2$ yeterli ve gereklidir. $|x-2|<0$ eşitsizliğinin gerçek sayılarda çözümü yoktur. Benzer biçimde $|x-2|\geq 0$ bütün gerçek sayılarda doğrudur. Bir mutlak değerli ifadeyi negatif sabite eşitleyen koşul, içinin biçimine bakılmaksızın çözümsüzdür.

$$|x|\geq 0;\ |x|=0 \Leftrightarrow x=0;\ |x|>0 \Leftrightarrow x\neq 0$$

Anlamı: Mutlak değerin işaret ve sıfır özellikleri.

Koşullar: x gerçek sayıdır. Sıfır negatif değildir; sıfırdan büyük olmak ile negatif olmamak farklıdır.

Sıfır ve negatif sabit ayrımı $|A|=-k$ eşitliğinin $k>0$ için gerçek çözümü yoktur. $|A|<0$ asla sağlanmaz; $|A|\geq 0$ ise tanımlı bütün gerçek değerlerce sağlanır. $|A|=0$ yalnız $A=0$ durumudur.

4. Zıt sayıların ve işaret çevirmenin mutlak değeri

Bir sayının toplamsal tersi sayı doğrusunda sıfıra göre simetrik noktada bulunur. Bu nedenle $|-x|=|x|$ olur. Örneğin −13 ve 13 aynı 13 birim uzaklıktadır. Bu eşitlik, mutlak değer çizgilerinin içine eksi işareti eklemenin veya işareti dışarı almanın sonucu değiştirmediğini söyler; ama çizgilerin dışındaki eksi için aynı şey geçerli değildir: $-|-13|=-13$'tür.

İç içe iki mutlak değerde ilk uygulama zaten negatif olmayan sayı verdiğinden ikincisi sonucu değiştirmez: $||-7||=|7|=7$. Buna karşılık mutlak değerin önüne konan eksi işareti uzaklığın negatifi olarak ayrı işlenir. Örneğin $-|3-8| = -5$'tir. Bu gösterim, mutlak değer işleminin özünün pozitif sonuç vermesiyle çelişmez; önce hesaplanan 5 daha sonra dışarıda −1 ile çarpılmıştır.

Mutlak değer çizgisinin içindeki ve dışındaki eksi

İfade	Hesap	Sonuç	Ayrım
mutlak(−6)	−(−6)	6	Eksi çizgilerin içinde
−mutlak(−6)	−6	−6	Dışarıda ayrı negatif işaret
mutlak(−(−6))	mutlak(6)	6	İçeride çift işaret
mutlak(mutlak(−6))	mutlak(6)	6	İkinci mutlak değer sonucu korur
mutlak(−x)	mutlak(x)	mutlak(x)	Zıt sayıların uzaklığı eşit

5. İki gerçek sayı arasındaki uzaklık

Mutlak değer yalnız sıfıra uzaklığı ölçmez. Sayı doğrusu üzerinde a ve b noktalarının uzaklığı, aralarındaki farkın mutlak değeridir: |a−b|=|b−a|. Örneğin −4 ile 9 noktaları arasındaki uzaklık |9−(−4)|=|13|=13 birimdir. Ayrı bir yöntem, −4'ten 0'a kadar 4 ve 0'dan 9'a kadar 9 birim sayıp 4+9=13 bulmaktır. Her iki yöntem aynı uzaklığı verir.

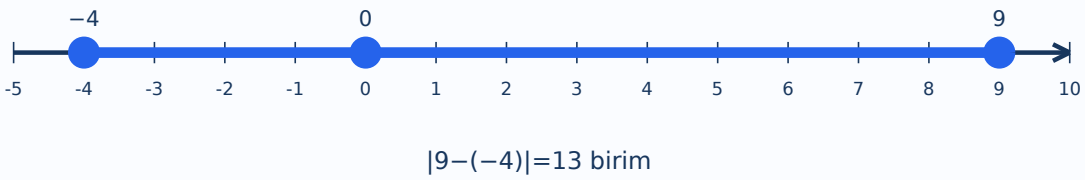
Bir ölçüm hedefi a=120 ve gerçekleşen değer x=117 ise hedeften sapmanın büyüklüğü |117−120|=3 birimdir. x=123 için de |123−120|=3 olur. Mutlak değer sapmanın yönünü söylemez; hedefin altında veya üstünde olunması ayrıca x−a farkının işaretinden anlaşılır. İki ölçü arasındaki uzaklığı hesaplarken birimlerin eşit olmasına dikkat edilmelidir: 2 metre ile 150 santimetrenin doğrudan sayı farkı 148 değildir; 2 metre 200 santimetreye dönüştürüldüğünde fark 50 santimetredir.

$$d(a,b)=|a-b|=|b-a|$$

Anlamı: Sayı doğrusu üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığın yönsüz ölçüsü.

Koşullar: $a,b\in\mathbb{R}$; fiziksel bir problemde iki niceliğin birimleri uyumlu olmalıdır.

Konuya ait açıklayıcı şema



|9−(−4)|=13 birim

Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

6. Mutlak değer ile çarpma ve bölme

İki gerçek sayının çarpımının mutlak değeri, mutlak değerlerinin çarpımına eşittir: |ab|=|a||b|. Bunun nedeni çarpımın işaretinin değişebilmesi, fakat büyüklüğünün çarpanların büyüklüklerinin çarpımı olmasıdır. Örneğin |(−6)·4|=|−24|=24; ayrıca |−6|·|4|=6·4=24'tür. İki hesap birbirini doğrular. İkiden çok çarpan olduğunda da aynı ilke sırayla uygulanabilir.

Bölüm için de bölen sıfır olmamak koşuluyla |a/b|=|a|/|b| geçerlidir. (−35)/7=−5 olduğundan bu bölümün mutlak değeri 5'tir; 35/7=5 aynı sonucu verir. Ancak bölümün kendisi negatif kalabilir. Mutlak değer kuralı, asıl bölümün işaretini değiştiren genel bir bölme kuralı değildir; mutlak değer alınmış bölümün büyüklüğünü açıklar.

$$|ab|=|a||b|;\ |a/b|=|a|/|b|$$

Anlamı: Çarpım ve bölümün mutlak değeri, çarpanların ve terimlerin mutlak değerleriyle hesaplanabilir.

Koşullar: a,b∈ℝ; bölümde b≠0. Sağ taraftaki mutlak değerli payda pozitiftir.

Çarpım ve bölümde iki yöntemle kontrol

Başlangıç ifadesi	Önce işlem	Önce mutlak değer	Sonuç
mutlak((−7)·5)	mutlak(−35)	7·5	35
mutlak((−3)·(−8))	mutlak(24)	3·8	24
mutlak((−45)/9)	mutlak(−5)	45/9	5
mutlak(24/(−6))	mutlak(−4)	24/6	4

7. Toplama ve çıkarma için eşitlik değil sınır bulunması

Mutlak değerin çarpma ve bölme ile uyumlu kuralları, toplama ve çıkarma için aynı biçimde kullanılmaz. Genel olarak |a+b| ifadesi |a|+|b| değildir. Örneğin |7+(−5)|=|2|=2, ancak |7|+|−5|=12'dir. İki değer eşit değildir. Buna karşılık |a+b|≤|a|+|b| eşitsizliği her zaman doğrudur; buna üçgen eşitsizliği denir. Sayı doğrusunda bir noktaya iki aşamada ilerleyerek gidilen toplam yol, başlangıçtan son noktaya olan en kısa uzaklıktan küçük olamaz.

Fark için |a−b|≤|a|+|b| geçerlidir; çünkü a−b = a+(−b) ve |−b|=|b| olur. Daha güçlü bir alt sınır da vardır: ||a|−|b||≤|a−b|. Örneğin a=7, b=−5 seçildiğinde sağdaki fark uzaklığı |7−(−5)|=12 ve soldaki ifade ||7|−|−5||=|7−5|=2 olur; gerçekten 2≤12'dir. Aynı yönlü iki pozitif değerde fark uzaklığı daha küçük olabilir. Bu eşitsizlikler mutlak değeri terimlere keyfî dağıtmayı önler.

$$|a+b|\le|a|+|b|;\ ||a|-|b||\le|a-b|\le|a|+|b|$$

Anlamı: Birleşik yolun toplam uzunluğu doğrudan uzaklığa üst sınır, büyüklüklerin farkı alt sınır verir.

Koşullar: a,b∈ℝ. Eşitliğin oluşması işaret ve sıralamaya bağlıdır; her çift için eşitlik beklenmez.

Toplama ve çıkarma içinde mutlak değerin sınırları

a ve b	mutlak(a+b)	mutlak(a)+mutlak(b)	mutlak(a−b)
7 ve −5	2	12	12
−4 ve −6	10	10	2
3 ve 8	11	11	5
0 ve −9	9	9	9

8. Kare, karekök ve mutlak değer ilişkisi

Her gerçek x için x^2 negatif değildir. Bu nedenle bir gerçek sayının karesinin negatif olmayan ana karekökü |x|'e eşittir: $\sqrt{(x^2)}=|x|$. Örneğin $\sqrt{((-7)^2)}=\sqrt{49}=7$ olur; sonuç −7 değildir. Karekök işareti tek başına negatif olmayan değeri verir. Buna karşılık $|x|^2=x^2$ eşitliği de geçerlidir; iki tarafta da tabanın büyüklüğünün karesi alınır.

Aynı ilişkiden yararlanılarak $\sqrt{((3-8)^2)}=|3-8|=5$ bulunur. Bağımsız denetimde önce 3−8=−5, ardından $(-5)^2=25$ ve $\sqrt{25}=5$ hesaplanır. Parantezli ifadenin işareti bilinmediğinde $\sqrt{(A^2)}=A$ yazmak genel olarak yanlıştır; doğru ifade |A|'dır. GY-02.05'teki köklü ifadelerin tanım koşulu burada da korunur.

$$\sqrt{(x^2)}=|x|;\ |x|^2=x^2$$

Anlamı: Bir sayının karesinin negatif olmayan karekökü, o sayının büyüklüğüdür.

Koşullar: $x\in\mathbb{R}$; √ simgesi negatif olmayan ana karekökü gösterir.

9. Mutlak değerli basit denklemlerin çözüm mantığı

|A|=c denklemi, A gerçek değerli bir ifade ve c pozitif sayı ise A=c veya A=−c durumlarını anlatır. Çünkü sıfıra aynı c uzaklıkta iki nokta vardır. |2x−1|=7 örneğinde 2x−1=7 ise x=4; 2x−1=−7 ise x=−3 bulunur. Kontrol için x=4 konulduğunda |8−1|=7, x=−3 konulduğunda |−6−1|=7 elde edilir. İki sonuç başlangıç denklemini sağlar.

Sabit c=0 olduğunda iki durum birleşir ve A=0 tek koşul olur. c<0 olduğunda ise çözüm yoktur. |x+4|=−2 eşitliğinin çözümü bulunmaz; çünkü bir uzaklık −2 olamaz. Mutlak değerin içindeki değişkenin katsayısı sıfırsa denklemin çözüm yapısı ayrıca değişebilir. Örneğin |0·x−3|=3 bütün gerçek x için doğrudur; çünkü sol taraf sürekli 3'tür. Dolayısıyla her mutlak değerli eşitliğin kesinlikle iki çözümü olduğu söylenemez.

$$|A|=c \Leftrightarrow (A=c \text{ veya } A=-c)\ (c>0);\ |A|=0 \Leftrightarrow A=0$$

Anlamı: Sabit uzaklık için sıfırın iki yanında simetrik değerler; sıfır uzaklık için tek değer vardır.

Koşullar: A gerçek değerli ifade, c gerçek sabittir. c<0 için çözüm yoktur. İki cebirsel durum farklı x değerleri vermek zorunda değildir.

Mutlak değerli eşitliklerin sonuç türleri

Eşitlik	Dallanma veya gerekçe	Gerçek çözüm kümesi
mutlak(x−5)=3	x−5=±3	{2,8}
mutlak(2x−1)=7	2x−1=±7	{−3,4}
mutlak(x+9)=0	x+9=0	{−9}
mutlak(x−2)=−4	Uzaklık negatif olamaz	∅
mutlak(0·x−3)=3	Sabit 3=3	$\mathbb{R}$

10. Bir merkeze uzaklık denklemi ve orta nokta yorumu

|x−a|=r eşitliği x değerinin a noktasına olan uzaklığının r olduğunu anlatır. r>0 için iki çözüm x=a−r ve x=a+r olur. Örneğin bir doğrusal ölçekte 15 birim konumundan tam 4 birim uzaktaki konumlar 11 ve 19'dur. Kontrol |11−15|=4 ve |19−15|=4'tür. Böylece mutlak değerli bir denklem, yalnız sembolik iki kollu işlem değil, merkez ve yarıçap benzeri uzaklık bilgisidir.

İki ayrı değere eşit uzaklıktaki sayıyı bulmak için |x−a|=|x−b| kullanılır. a≠b ise bu sayı (a+b)/2 orta noktasıdır. Örneğin 2 ve 14 noktalarına eşit uzaklıkta olan sayı 8'dir; |8−2|=6 ve |8−14|=6. Bağımsız kontrol 2 ile 14'ün orta noktası (2+14)/2=8 bulunmasıdır. a=b olsaydı her gerçek x zaten her iki aynı noktaya eşit uzaklıkta olurdu; tek orta nokta çözümü çıkarılamaz.

Merkez, uzaklık ve çözüm ilişkisi

Koşul	Merkez veya uçlar	Çözüm	Kontrol
mutlak(x−15)=4	Merkez 15	x=11 veya 19	Uzaklıklar 4
mutlak(x+2)=5	Merkez −2	x=−7 veya 3	Uzaklıklar 5
mutlak(x−8)=0	Merkez 8	x=8	Uzaklık 0
mutlak(x−2)=mutlak(x−14)	Uçlar 2 ve 14	x=8	İki uzaklık da 6

11. Mutlak değerin bir sayıdan küçük olması

|A|<r eşitsizliğinde r pozitifse A değeri sıfırdan r birimden daha az uzakta bulunmalıdır. Bu da −r<A<r koşuludur. Örneğin |x−6|<4 ifadesinde −4<x−6<4; iki tarafa 6 eklenince 2<x<10 bulunur. x=6 için uzaklık 0 olduğundan koşul doğrudur; x=2 ve x=10 için uzaklık tam 4 olduğundan sıkı eşitsizlik sağlanmaz. Aralık (2,10) biçimindedir.

|A|≤r koşulunda uç değerler de dahil edilir; r=0 ise yalnız A=0 mümkündür. r<0 için |A|≤r çözüm vermez. Buna karşılık |A|<0 da çözümsüzdür. Bir mutlak değerli eşitsizliği iki yönlü aralığa dönüştürmeden önce sağ tarafın pozitif olup olmadığı kontrol edilmelidir. Pozitif olmayan sınırda alışılmış dönüşümün koşulları ayrı ele alınır.

$$|A|<r \Leftrightarrow -r<A<r;\ |A|\le r \Leftrightarrow -r\le A\le r$$

Anlamı: Sıfıra uzaklığı pozitif r sınırından küçük olanlar iki uç arasında kalır.

Koşullar: İlk eşdeğerlik için r>0; ikinci eşdeğerlik r≥0 için kullanılabilir. r<0 durumunda her iki eşitsizliğin çözümü boştur.

İç bölgeyi anlatan mutlak değer eşitsizlikleri

Eşitsizlik	Aralık biçimi	Uç noktalar	Sonuç
mutlak(x−6)<4	2<x<10	Uçlar dışarıda	(2,10)
mutlak(x+1)≤3	−4≤x≤2	Uçlar dahil	[−4,2]
mutlak(x−3)≤0	x=3	Tek nokta	{3}
mutlak(x+2)<0	Uzaklık negatif olamaz	Çözüm yok	∅

12. Mutlak değerin bir sayıdan büyük olması

|A|>r eşitsizliğinde r>0 olduğunda A, −r noktasının solunda veya +r noktasının sağında olmalıdır. Bu yüzden A<−r veya A>r koşulu elde edilir. |x−4|>3 örneğinde x−4<−3 ya da x−4>3; sonuç x<1 veya x>7 olur. x=0 için |−4|=4>3 sağlanır; x=5 için |1|=1>3 yanlış, x=8 için |4|=4>3 doğrudur. Uçlar 1 ve 7, uzaklık tam 3 olduğu için çözüme dahil değildir.

Eşitliğe izin veren $|A|\geq r$ koşulunda $r>0$ için $A\leq -r$ veya $A\geq r$ elde edilir. $r=0$ ise $|A|\geq 0$ bütün tanım kümesinde doğrudur. $r<0$ olduğunda hem $|A|>r$ hem $|A|\geq r$ bütün gerçek tanımlı değerlerde sağlanır. Bu özel durumlarda “iki dış aralık” yazmak yerine mutlak değerin negatif olamayışı doğrudan kullanılmalıdır.

$$|A|>r \Leftrightarrow (A<-r \text{ veya } A>r);\ |A|\geq r \Leftrightarrow (A\leq -r \text{ veya } A\geq r)$$

Anlamı: Sıfıra uzaklık pozitif r sınırından büyükse değer sınırların dışındadır.

Koşullar: Gösterilen iki-kollu yorum $r>0$ için geçerlidir. $r=0$ ve $r<0$ durumları mutlak değerin negatif olmama özelliğiyle ayrıca okunur.

Dış bölgeyi anlatan mutlak değer eşitsizlikleri

Eşitsizlik	Koşullar	Çözüm aralığı
mutlak(x−4)>3	x<1 veya x>7	$(-\infty,1)\cup(7,\infty)$
mutlak(x+3)≥2	x≤−5 veya x≥−1	$(-\infty,-5]\cup[-1,\infty)$
mutlak(x)>0	x≠0	$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
mutlak(x−5)≥0	Her x	$\mathbb{R}$

13. Birden fazla mutlak değer bulunan ifadeler

İki veya daha fazla mutlak değer aynı ifadede bulunduğunda her çizginin içi kendi işaret koşuluyla değerlendirilir. Örneğin $|x-1|+|x-5|$ toplamı, sayı doğrusunda x noktasının 1'e ve 5'e uzaklıklarının toplamıdır. x 1 ile 5 arasındaysa birinci uzaklık x−1, ikinci uzaklık 5−x olur; toplamları 4'tür. Bu, iki uç arasındaki herhangi bir noktadan iki uca gidilen uzaklıkların toplamının uçların kendi uzaklığına eşit olmasını açıklar.

$x<1$ için toplam $(1-x)+(5-x)=6-2x$; $x>5$ için $(x-1)+(x-5)=2x-6$ olur. Örneğin $x=0$ için 6, $x=3$ için 4, $x=8$ için 10 bulunur. Bağımsız denetim doğrudan uzaklıklardır: $x=0$ için $1+5=6$; $x=3$ için $2+2=4$; $x=8$ için $7+3=10$. Bu nedenle $|x-1|+|x-5|$ ifadesinin en küçük değeri 4'tür ve $1\leq x\leq 5$ aralığındaki bütün gerçek sayılarda bu değeri alır.

İki merkeze uzaklık toplamının parçalı hesabı

x bölgesi	mutlak(x−1)	mutlak(x−5)	Toplam
x<1	1−x	5−x	6−2x
1≤x≤5	x−1	5−x	4
x>5	x−1	x−5	2x−6

14. İç içe mutlak değerli ifadelerin çözümü

Bir mutlak değer diğerinin içinde bulunduğunda dıştaki ifade önce tek bir bütün gibi değerlendirilir. Örneğin $||x-2|-3|=1$ eşitliği, $B=|x-2|-3$ denilerek $|B|=1$ biçiminde okunabilir. Dolayısıyla $B=1$ veya $B=-1$'dir; ilk durumda $|x-2|=4$, ikinci durumda $|x-2|=2$ olur. Birinci koşul $x-2=\pm 4$ üzerinden $x=6$ ve $x=-2$; ikinci koşul $x-2=\pm 2$ üzerinden $x=4$ ve $x=0$ verir.

Dört adayın kontrolü doğrudan yapılabilir. $x=6$ için $||4|-3|=1$, $x=-2$ için $||-4|-3|=1$, $x=4$ için $||2|-3|=1$, $x=0$ için $||-2|-3|=1$ bulunur. Bu örnekte bütün adaylar geçerlidir. Bazı iç içe ifadelerde bir aşama $|A|=-3$ gibi imkânsız

bir eşitliğe dönüşebilir; o dal hiçbir çözüm üretmez. Bir dış mutlak değeri kaldırırken oluşan iki alternatifin her biri kendi geçerlilik şartlarıyla okunmalıdır.

> **İki aşamalı çözümde çözüm denetimi** İç içe mutlak değerde önce dış çizgiler çözülür; oluşan her geçerli mutlak değerli eşitlik daha sonra kendi içinde açılır. Negatif bir sayıya eşitlenen iç mutlak değer dalı elenir. Bulunan adaylar ilk ifadede ayrıca kontrol edilir.

15. Gerçek, tam ve doğal sayı alanlarında çözümün yorumlanması

Mutlak değerli eşitsizliğin cebirsel çözümü başlangıçta gerçek sayılar kümesi için bulunabilir; ancak gerçek yaşamda her değer uygun olmayabilir. Örneğin bir dağıtım birimindeki kutu sayısı n için $|n-10| \le 3$ koşulu $7 \le n \le 13$ aralığına karşılık gelir. Kutu sayısı tam ve negatif olmayan olduğundan kabul edilebilecek değerler 7, 8, 9, 10, 11, 12 ve 13'tür. Bu değerlerden 7 ve 13 uçları için sapma 3, merkezdeki 10 için sapma 0'dır. Sayıların toplam yedi adet oluşu, $13-7+1=7$ hesabıyla ayrıca doğrulanır.

Aynı eşitsizlik bir sıcaklık farkı veya sürekli ölçüm için kullanılsaydı 7 ile 13 arasındaki bütün gerçek değerler matematiksel çözümde yer alırdı. Böylece tek bir aralık gösterimi farklı nicelik türlerinde farklı sayıda uygulanabilir sonuç verebilir. Ayrıca “mutlak hata 3 birimden küçük” ifadesi $|\text{ölçüm}-\text{referans}|<3$; “en çok 3 birim” ifadesi ≤ 3; “en az 3 birim” ifadesi ≥ 3 olarak modellenir. Başlangıçtaki eşitliğe izin verme bilgisi fiziksel yorumda kaybedilmemelidir.

16. Birleşik işlem önceliği, sınır durumlar ve son denetim

Mutlak değer işaretleri işlem grubu olarak değerlendirilir; önce çizgilerin içindeki işlemler kendi önceliğine göre tamamlanır. Örneğin $2|-3+1|-|4-9|$ ifadesinde ilk iç değer -2, ikincisi -5'tir. Mutlak değerler sırasıyla 2 ve 5 olur; $2 \cdot 2-5=-1$ elde edilir. Dışarıdaki çıkarma, mutlak değerlerin negatif olmama özelliğini bozmaz: iki negatif olmayan niceliğin farkı negatif olabilir. Bağımsız kontrol $2 \cdot (2)-5=4-5=-1$'dir.

Değişkenli ifadelerde bilinmeyen bir işareti varsayarak mutlak değeri kaldırmak, çözüm kümesinin bir bölümünü kaybettirebilir. Örneğin $|x|=x$ eşitliği yalnız $x \ge 0$ için doğrudur; $|x|=-x$ ise yalnız $x \le 0$ için doğrudur. Her iki eşitlik $x=0$ durumunda da sağlanır. Benzer biçimde $|x|=-5$ denklemi gerçek çözüm vermezken $-|x|=-5$ denklemi $|x|=5$'e eşdeğerdir ve $x=-5$ veya $x=5$ verir. Eksi işaretinin çizgilerin hangi tarafında bulunduğu mutlaka okunmalıdır.

Mutlak değerin dışına çıkarma, parantez, kesir, karekök veya farklı bir mutlak değer birlikte yazıldığında önce tanımlılık, sonra eşdeğer dönüşüm, en son çözümün başlangıca uygunluğu denetlenir. $\sqrt{(x^2)}$ için sonuç $|x|$'tir; sıfırdan farklı bir paydayı mutlak değer içine almak paydanın sıfır olamayacağı şartını kaldırmaz. $|a+b|$ ile $|a|+|b|$ genel olarak eşit olmadığı için bir toplamın bileşenlerinin uzaklıkları doğrudan toplanarak kesin fark sonucu bulunamaz.

> **Bölümün sonuç ölçütü** Mutlak değer sıfıra veya seçilen bir merkeze uzaklık ölçüsüdür. İçindeki ifadenin işareti, mutlak değerin dışında yapılan işlemden ayrılır. Denklemlerde sağ sabitin işareti; eşitsizliklerde sınırın sıfırla ilişkisi ve uçların dahil edilip edilmediği kontrol edilir. Mutlak değer çarpma ve bölmeyle uyumlu, toplama ve çıkarma ile genel olarak yalnız sınır veren kurallara sahiptir.

Sayı doğrusunda yön ile uzaklığı ayrı değerlendirmek, mutlak değerin bütün temel işlemlerini bir arada açıklayan ilkedir. Parçalı tanım, negatif olmayan sonuç ve iki nokta uzaklığı kavramlarından başlayarak denklem ve eşitsizliklere geçildiğinde, işlemler tek tek kural ezberleme olmaktan çıkar. Bir değeri yalnız cebirsel dönüşümle değil, sayısal yerleştirme veya sayı doğrusu üzerindeki konumuyla da doğrulamak,

özellikle işaret ve sınır hatalarını önler. İzleyen GY-02.07 bölümünde cebirsel ifadeler ve özdeşlikler bu düşünme biçimiyle ilişkilendirilecektir.

KONU 2.7

BASİT CEBİRSEL İFADELER VE ÖZDEŞLİKLER

Sayılar arasındaki ilişkiler yalnız belirli değerler üzerinden değil, farklı değerler için aynı biçimde geçerli olacak kurallarla da ifade edilebilir. Cebirsel dilde harfler, değeri değişebilen veya henüz bilinmeyen sayıları temsil eder. Bu sayede ayrı ayrı çok sayıda işlem yazmak yerine tek bir ifadeyle genel bir ilişki kurulur. Cebirsel ifadeyi düzenlemek, bir denklemi çözmekle aynı işlem değildir: düzenleme, ifadenin izin verilen değişken değerlerindeki sonucunu koruyarak daha anlaşılır bir biçim elde etmektir. Özdeşlikler de bu eşdeğer biçimlerin neden aynı değeri verdiğini gösterir.

1. Cebirsel ifadenin yapısı ve değişkenin görevi

Sayı, değişken ve aritmetik işlem işaretleri kullanılarak oluşturulan $4x+7$, $3a-2b$ ve $(x+5)/2$ gibi gösterimler cebirsel ifadedir. Burada x, a ve b birer değişkendir. Örneğin $4x+7$, bir sayının dört katına yedi eklenmesini ifade eder; $4x$ gösterimindeki yan yana yazım çarpma anlamındadır. Bir harfin yerine belirli bir sayı konulmadan ifadenin tek bir sayısal değeri bulunması zorunlu değildir. Buna karşılık değişkenin değeri bilindiğinde işlem sırası uygulanarak ifadenin değeri hesaplanabilir.

Bir ifadeyi yorumlarken parantez belirleyicidir. $3(x+2)$, önce x'e 2 eklenmesini, sonra bulunan sonucun 3 ile çarpılmasını anlatır. $3x+2$ ise önce x'in üç katının bulunup sonra 2 eklenmesi demektir. Bunlar genel olarak eşit değildir. $x=4$ için ilk ifade $3\cdot6=18$, ikinci ifade $12+2=14$ olur. İki farklı cebirsel ifade, bazı özel değişken değerlerinde eşit sonuç verse bile bu durum onların her değerde özdeş olduğu anlamına gelmez.

Sözel ilişki ile cebirsel gösterim arasındaki ayrım

Sözel ilişki	Cebirsel gösterim	Okuma biçimi
Bir sayının 6 eksiği	$x-6$	x'ten 6 çıkarılır
Bir sayının 6 eksiğinin 3 katı	$3(x-6)$	Fark bir bütün olarak 3 ile çarpılır
Bir sayının 3 katının 6 eksiği	$3x-6$	Önce 3 ile çarpılır, sonra 6 çıkarılır
İki sayının toplamının yarısı	$(a+b)/2$	Toplam ikiye bölünür
İki sayının yarılarının toplamı	$a/2+b/2$	Her sayı ayrı ayrı ikiye bölünür; toplamla eşdeğerdir

2. Terim, katsayı, sabit terim ve derece

Bir cebirsel ifadede toplama ve çıkarma işaretleriyle ayrılan parçalar terim olarak adlandırılır. $5x^2-3x+8$ ifadesinde terimler $5x^2$, $-3x$ ve 8'dir; çıkarma işareti ikinci terimin işaretine dahildir. Değişkenli terimin sayısal çarpanı katsayıdır: $5x^2$ teriminin katsayısı 5, $-3x$ teriminin katsayısı -3'tür. Değişken içermeyen 8 ise sabit terimdir. x yazıldığında katsayı 1, $-x$ yazıldığında katsayı -1 kabul edilir.

Tek bir değişkenli polinom teriminde değişkenin üssü terimin derecesini gösterir; sabit ve sıfırdan farklı bir terimin derecesi 0'dır. $5x^2$ terimi ikinci, $-3x$ terimi birinci derecedendir. Birden fazla terimi olan, sıfır olmayan bir polinomun derecesi benzer terimler birleştirildikten sonra kalan en büyük üstür. Örneğin $4x^2-4x^2+3x$ ifadesi $3x$'e eşdeğer olduğu için son biçim birinci derecedendir. Sıfır polinomunun derecesi bu temel tanımda

belirlenmez. Değişkenin negatif üs veya paydada bulunduğu her ifade ise polinom değildir; örneğin 1/x, x≠0 koşulunda tanımlı bir cebirsel ifadedir ama polinom değildir.

Terimlerin öğeleri

Terim	Katsayı	Değişken kısmı	Derece
$7x$	7	x	1
$-4x^2$	−4	x^2	2
y^3	1	y^3	3
$-y$	−1	y	1
9	9	Yok	0

3. Yerine koyma ve tanım koşulunu denetleme

Değişkene değer verildiğinde önce o değerin ifadedeki bütün kullanımları parantez içinde değiştirilir; ardından üs, çarpma-bölme ve toplama-çıkarma sırası izlenir. Örneğin $2x^2-3x+1$ için $x=-2$ alındığında $2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+1 = 2\cdot4+6+1=15$ elde edilir. Burada $2x^2$, $(2x)^2$ değil $2\cdot x^2$ anlamındadır. Bağımsız kontrol amacıyla $x^2=4$ ve $-3x=6$ ayrı hesaplanır; $8+6+1=15$ aynı sonucu verir.

Birden fazla değişkenin yer aldığı $3x-2y+5$ ifadesine $x=-2$, $y=3$ konulursa $3\cdot(-2)-2\cdot3+5=-6-6+5=-7$ bulunur. Önce değişkenli parçaların ayrı ayrı değerlerini belirleyip -6 ve -6 elde etmek, işaret hatalarını fark etmeye yardımcı olur. $x=1$ ve $y=-2$ alınırsa aynı yapı $3+4+5=12$ sonucunu verir; harfler aynı ifadede farklı sayıları gösterebilir.

Payda içeren ifadelerin değerini hesaplarken başlangıçtaki tanımlılık şartı korunur. $(x+2)/(x-1)$ ifadesinde $x=1$ seçilemez; paydanın sıfır olması cebirsel ifade için gerçek bir değer üretmez. Karekök içeren ifadelerde ise gerçek sayılarda kök içinin negatif olmaması gerekir. Bir cebirsel dönüşümde bazı terimler sadeleşse bile başlangıçtaki tanım dışı değerler sonradan geçerli hale gelmez.

4. Benzer terimlerin birleştirilmesi

Değişkenleri ve bu değişkenlerin üsleri aynı olan terimler benzer terimdir. $2x$ ve $-7x$ benzerken $2x$ ile $2x^2$ veya $3x$ ile $3y$ benzer değildir. Benzer terimleri toplarken yalnız katsayılar toplanır; değişken kısmı korunur. Bu işlem, 2 adet aynı tür birimle 5 adet aynı tür birimin birleştirilmesine karşılık gelir. Farklı türdeki terimler ise tek bir terime indirilemez.

$(3x^2-2x+7)+(5x^2+4x-9)$ ifadesinde x^2 terimlerinin katsayıları $3+5=8$, x terimlerinin katsayıları $-2+4=2$ ve sabitlerin toplamı $7-9=-2$'dir. Sonuç $8x^2+2x-2$ olur. $x=2$ için ilk parantez $12-4+7=15$; ikinci parantez $20+8-9=19$ olduğundan toplam 34'tür. Düzenlenmiş ifade $8\cdot4+2\cdot2-2=34$ değerini vererek işlem kontrolünü sağlar.

$$ax+bx=(a+b)x;\ ax^2+bx^2=(a+b)x^2$$

Anlamı: Benzer terimlerde ortak değişken kısmı korunur, katsayılar birleştirilir.

Koşullar: a,b,x gerçek sayıdır; birleştirilen terimlerin değişken ve üs yapısı aynı olmalıdır.

Benzer terimler ve doğru sadeleştirme

Başlangıç	Terim grupları	Eşdeğer sonuç
$9x-4x$	$(9-4)x$	$5x$
$3a+2b-a+5b$	$(3-1)a+(2+5)b$	$2a+7b$
$5x^2-2x^2+6x$	$(5-2)x^2+6x$	$3x^2+6x$
$4x+4x^2$	Üsler farklı	$4x+4x^2$

5. Parantezin önündeki işaret ve çıkarma işlemi

İki cebirsel ifadeyi çıkarırken çıkarılan ifadenin bütün terimleri ters işaretle alınır. $(6a-5b+2)-(2a+3b-4)$, ilk parantez korunup ikincinin her terimine eksi dağıtılarak $6a-5b+2-2a-3b+4$ biçimine gelir. Benzer terimlerin birleştirilmesiyle $4a-8b+6$ bulunur. $a=2$, $b=1$ için başlangıç değeri $(12-5+2)-(4+3-4)=9-3=6$; son ifade $8-8+6=6$'dır.

Parantez önünde artı varsa parantez kaldırılırken terimlerin işareti değişmez; önünde eksi varsa içerideki her terimin işareti değişir. $-(x-5)$ ifadesinin $-x+5$ olması, yalnız ilk terimin işaretinin değişmesine göre farklıdır. Çıkarma işleminin tüm paranteze uygulandığını görmek, özellikle art arda gelen eksi işaretlerini denetler.

6. Dağılma özelliği ve ortak çarpan düşüncesi

Bir sayının veya cebirsel terimin parantez içindeki toplamla çarpımı, her terimle ayrı ayrı çarpılıp sonuçların toplanmasıyla bulunur. $3(2x-5)-2(x+4)$ örneğinde önce $6x-15$, sonra $-2x-8$ oluşur. Sonuç $4x-23$'tür. $x=4$ olduğunda ilk gösterim $3\cdot3-2\cdot8=9-16=-7$, düzenlenmiş gösterim $16-23=-7$ olur. Her iki değerlendirme aynı değeri verir.

Dağılma negatif çarpanda da geçerlidir: $-2(x-3y+4)=-2x+6y-8$. Tersine yönde düşünmek de mümkündür: $6x+9$ ortak 3 çarpanı alınarak $3(2x+3)$ olarak yazılabilir. Bu, ifadenin değerini değiştirmez. Bir ifadenin tam olarak hangi çarpanlara ayrılabileceği GY-08.02'de ayrıntılı işlenecektir; bu bölümde temel amaç, dağılma ile ortak çarpan arasında ters yönlü eşdeğerliği kurmaktır.

$$k(A+B)=kA+kB;\ k(A-B)=kA-kB$$

Anlamı: Parantez dışındaki çarpan, içerideki her terime uygulanır.

Koşullar: k,A,B aynı sayı sisteminde işlemlerin tanımlı olduğu değerlerdir; burada gerçek sayılar esas alınır.

Parantez ve payda ayrımı Dağılma, paydadaki toplamın her terimine ayrı ayrı bölme yapmayı haklı çıkarmaz. Örneğin $12/(2+4)=2$ iken $12/2+12/4=9$'dur. İlk kesirde payda bir bütündür; aynı payın iki ayrı paydaya dağıtılması eşdeğer değildir.

7. İki parantezin çarpımı

İki toplamın çarpımında ilk parantezin her terimi ikinci parantezin her terimiyle çarpılır. $(2x+3)(x-4) = 2x\cdot x+2x\cdot(-4)+3\cdot x+3\cdot(-4) = 2x^2-8x+3x-12 = 2x^2-5x-12$ olur. Kontrol için $x=2$ yazılırsa parantezli biçim $(4+3)(2-4)=7\cdot(-2)=-14$; açılmış biçim $2\cdot4-5\cdot2-12=8-10-12=-14$ verir.

Bu yöntemde $x\cdot x=x^2$ oluşur; ancak $2x$ ile $3x$'in toplamı $5x$'tir, $5x^2$ değildir. Çarpma sonucuyla toplama sonucunun üs üzerindeki etkisi ayrıdır. Örneğin $(x+4)(x+7) = x^2+11x+28$; bu işlemde orta terim $4x+7x$'ten, sabit terim $4\cdot7$'den gelir. $x=2$ için $(6)(9)=54$ ve $4+22+28=54$ bulunur.

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Anlamı: Bir toplamın her terimi diğer toplamın her terimiyle çarpılır.

Koşullar: a,b,c,d gerçek sayıdır; işlem sonunda benzer terimler birleştirilebilir.

8. Özdeşlik, denklem ve yalnız belli değerde eşitlik arasındaki fark

Özdeşlik, değişkenlerin ortak tanım kümesindeki her izin verilen değeri için doğru olan eşitliktir. Örneğin $2(x+3)=2x+6$ bütün gerçek x değerlerinde doğru olduğu için bir özdeşliktir. Buna karşılık $2x+6=14$ yalnız $x=4$ için doğru olan bir denklemdir. Denklemde belirli çözüm değerleri aranırken özdeşlikte iki ifadenin tüm tanım kümesinde aynı değeri üretmesi gösterilir.

Bir iki değerde eşitlik görmek genel kanıt değildir. $(x+1)^2$ ile x^2+1 ifadeleri $x=0$ için ikisi de 1 değerini verir, ancak $x=2$ için sırasıyla 9 ve 5 olur. Tek bir karşı örnek, iddia edilen özdeşliği geçersiz kılmaya yeter. Buna karşılık özdeşliği kanıtlamak için geçerli işlem özelliklerinden yararlanılır: dağıtma, benzer terimleri birleştirme veya iki tarafı aynı ifadeye dönüştürme. Farklı sayılarla yapılan kontrol, kanıta yardımcı olur fakat onun yerini tutmaz.

İfadelerin ve eşitliklerin durumu

Gösterim	Matematiksel tür	Gerekçe
$5x-2$	Cebirsel ifade	Tek başına eşitlik bildirmez
$3(x+1)=3x+3$	Özdeşlik	Her gerçek x için doğrudur
$5x-2=13$	Denklem	Yalnız $x=3$ için sağlanır
$(x+1)^2=x^2+1$	Özdeşlik değildir	$x=2$ için 9 ile 5 farklıdır

9. İki terimin toplamının karesi

$(a+b)^2$ gösterimi, $(a+b)$ toplamının kendisiyle çarpılması demektir. Çarpım açıldığında $a\cdot a$, $a\cdot b$, $b\cdot a$ ve $b\cdot b$ terimleri çıkar. Gerçek sayılarda $a\cdot b=b\cdot a$ olduğundan iki çapraz terim $2ab$ olur. Böylece toplamın karesinin yalnız kareler toplamı olmadığı, iki terimin çarpımının iki katının da bulunduğu anlaşılır. Bu özdeşlik herhangi iki gerçek a ve b için geçerlidir.

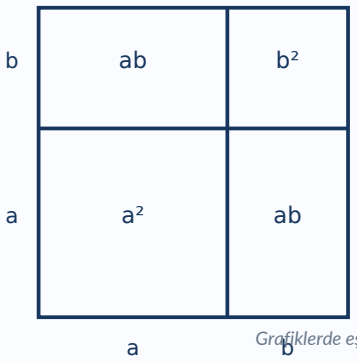
Örneğin $(2x+3)^2 = (2x)^2+2\cdot(2x)\cdot3+3^2 = 4x^2+12x+9$'dur. $x=-1$ alındığında ilk gösterim $(-2+3)^2=1$; açılmış gösterim $4-12+9=1$ olur. İkinci bir bağımsız denetim, $(2x+3)(2x+3)$ çarpımını dört terime dağıtıp aynı sonuca ulaşmaktır.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Anlamı: Toplamın karesi, iki terimin kareleri ile iki kat çapraz çarpımın toplamıdır.

Koşullar: a,b gerçek sayıdır; kare, toplamın tamamına uygulanır.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

10. İki terimin farkının karesi ve eksi işareti

$(a-b)^2$ ifadesinde farkın tamamı karesi alınan gruptur. $(a-b)(a-b)$ açılınca $a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2$ bulunur. Son terim pozitiftir; çünkü $(-b)(-b)=b^2$. Orta terimin eksi oluşu ise biri pozitif, diğeri negatif olan iki çapraz çarpımdan kaynaklanır.

Örneğin $(3x-2)^2 = 9x^2-12x+4$'tür. $x=1$ için parantezli biçim $(3-2)^2=1$, açılmış biçim $9-12+4=1$ değerini verir. $(x-4)^2 = x^2-8x+16$ ifadesinde $x=6$ alındığında ilk biçim $2^2=4$, ikinci biçim $36-48+16=4$ sonucunu üretir. Özellikle $-2ab$ teriminin ve $+b^2$ teriminin işaretleri bağımsız hesapla doğrulanabilir.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Anlamı: Farkın karesinde çapraz çarpımın iki katı çıkarılır; son terim yine pozitif karedir.

Koşullar: a,b gerçek sayıdır; işlem parantezdeki farkın tümüne uygulanır.

Tam kare açılımlarını karşılaştırma

Parantezli ifade	Eşdeğer açılım	Çapraz terim
$(x+5)^2$	$x^2+10x+25$	$+10x$
$(x-5)^2$	$x^2-10x+25$	$-10x$
$(2x+3)^2$	$4x^2+12x+9$	$+12x$
$(3x-2)^2$	$9x^2-12x+4$	$-12x$

11. İki kare farkı özdeşliği

Birbiriyle yalnız orta işaretleri farklı olan iki parantezin çarpımında çapraz terimler birbirini götürür: $(a-b)(a+b) = a^2+ab-ab-b^2 = a^2-b^2$. Bu yapı, iki kare arasındaki farkı hesaplamak veya eşdeğer çarpım biçimini görmek için kullanılabilir. a^2+b^2 ifadesi ise gerçek sayılar üzerinde genel olarak $(a+b)(a-b)$'ye eşit değildir; işaret farkı özdeşliğin esas koşuludur.

$(3a+2b)(3a-2b) = (3a)^2-(2b)^2 = 9a^2-4b^2$ olur. $a=2$, $b=1$ için parantezler $(6+2)(6-2)=8\cdot4=32$; kare farkı $36-4=32$ verir. Benzer biçimde $(5x+1)(5x-1)=25x^2-1$'dir. $x=2$ seçildiğinde $11\cdot9=99$ ve $25\cdot4-1=99$ aynı değerdir.

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Anlamı: Aynı iki terimin toplamıyla farkının çarpımında karışık terimler yok olur.

Koşullar: a,b gerçek sayıdır; iki parantezdeki terimler aynı olmalı, aradaki işaretler zıt olmalıdır.

12. Özdeşliği ters yönde okuma ve yapıyı tanıma

Özdeşlikler yalnız parantez açmak için kullanılmaz; açılmış bir ifadenin hangi bütünsel yapıyı gösterdiğini anlamaya da yarar. $x^2-14x+49$ ifadesinde ilk ve son terimler x ile 7'nin kareleridir. Ortadaki $-14x$, $-2\cdot x\cdot 7$ olduğundan ifade $(x-7)^2$ biçiminde yazılabilir. $x=9$ için her iki gösterim de $81-126+49=4$ ve $(9-7)^2=4$ verir. Bu tanıma işlemi, kare terimleri görmek kadar ortadaki terimi denetlemeyi de gerektirir.

Benzer şekilde $16p^2-81$, $(4p)^2-9^2$ olduğundan $(4p-9)(4p+9)$ biçimine eşdeğerdir. $p=3$ için karelerin farkı $144-81=63$; çarpım ise $(12-9)(12+9)=3\cdot 21=63$'tür. Ancak $16p^2+81$ toplamı, işareti farklı olduğu için aynı gerçek katsayılı iki kare farkı kuralıyla dönüştürülemez. Çarpanlara ayırmanın daha geniş yöntemleri sonraki tamamlayıcı matematik modülünde ele alınacaktır.

Temel özdeşliklerde ileri ve geri dönüşüm

Açılmış gösterim	Eşdeğer çarpım veya kare	Kontrol ölçütü
$x^2+12x+36$	$(x+6)^2$	Orta terim $+2\cdot x\cdot 6$
$x^2-14x+49$	$(x-7)^2$	Orta terim $-2\cdot x\cdot 7$
$25y^2-16$	$(5y-4)(5y+4)$	İki kare arasındaki fark
$4t^2+4t+1$	$(2t+1)^2$	Orta terim $+2\cdot(2t)\cdot 1$

13. Özdeşlikleri sayısal hesapta kullanma

Bir sayıyı yuvarlak bir sayının az üstü veya altı olarak yazmak, bazı çarpımları daha az işlemle hesaplamayı sağlar. $99^2=(100-1)^2=100^2-2\cdot 100\cdot 1+1^2=10\,000-200+1=9\,801$'dir. Alternatif uzun çarpma $99\cdot(100-1)=9\,900-99=9\,801$ sonucunu vererek hesabı doğrular. Kullanılan özdeşlik, sayının tamamının karesini koruyan eşdeğer bir açılımdır.

$103\cdot 97$ işleminde çarpanlar 100'den eşit miktarda farklıdır. $(100+3)(100-3)=100^2-3^2=10\,000-9=9\,991$ elde edilir. Bağımsız kontrol, $103\cdot(100-3)=10\,300-309=9\,991$ hesabıdır. Bu tür dönüşümlerde iki çarpanın ortak merkezden aynı uzaklıkta olup olmadığı belirlenir; uygun değilse iki kare farkı özdeşliği doğrudan uygulanamaz.

14. Cebirsel kesirlerde sadeleştirme ve değer kaybı tehlikesi

Bir cebirsel kesrin payı ve paydası ortak sıfır olmayan bir çarpan içeriyorsa bu çarpan sadeleştirilebilir. Örneğin $(x^2-9)/(x-3)$ ifadesinin payı $(x-3)(x+3)$ olduğundan $x\neq 3$ koşuluyla $x+3$'e eşdeğerdir. Buradaki $x\neq 3$ koşulu süs değildir: $x=3$ için başlangıçtaki payda sıfırdır ve ilk kesir tanımsızdır; sadeleştirilmiş $x+3$'ün 6 değeri vermesi başlangıçtaki kesri o noktada tanımlı hale getirmez.

$x=5$ alınırsa ilk kesir $(25-9)/(5-3)=16/2=8$, sadeleştirilmiş ifade $5+3=8$ olur. $x=0$ için ilk kesir $(-9)/(-3)=3$, ikinci ifade $0+3=3$ verir. İki farklı izin verilen değerle kontrol yapılması eşdeğerliği destekler; asıl gerekçe ortak çarpanın sıfırdan farklı olması koşuluyla pay ve paydadan çıkarılabilmesidir. Benzer terimler pay ile payda arasında toplanarak değil, yalnız bütün ortak çarpanlar üzerinden sadeleştirilir.

$$[(x-a)(x+a)]/(x-a)=x+a$$

Anlamı: Ortak çarpan pay ve paydadan çıkarılınca daha kısa eşdeğer gösterim elde edilir.

Koşullar: x,a gerçek sayıdır ve x≠a olmalıdır; başlangıçtaki paydayı sıfır yapan değer sadeleştirme sonrasında da yasaktır.

Özdeşlikte ortak tanım kümesi Özdeşlik eşitliği, söz konusu iki ifadenin birlikte tanımlı olduğu değerlerde değerlendirilir. Sadeleştirme, sıfıra bölme yasağını ortadan kaldırmaz. Örneğin $(x^2-9)/(x-3)=x+3$ bağıntısı $x=3$ için değil, $x\neq3$ için doğrudur.

15. Değişkenli ilişkilerde birim ve bağlam kontrolü

Cebirsel ifade sayıları düzenlerken niceliklerin anlamı da korunmalıdır. Tanesi 18 TL olan bir üründen x adet alınması ve toplam siparişe bir defalık 45 TL teslimat ücreti eklenmesi durumunda toplam ödeme 18x+45 TL'dir. Burada x negatif olmayan tam sayı olarak seçilir. x=7 için ürün bedeli 18·7=126 TL, toplam 126+45=171 TL olur. Ayrı kontrol, 7 ürünün bedeline tek bir 45 TL ücret eklenmesidir; 18(x+45) gibi bir yazım, ücreti ürün adedinin içine katarak farklı ve anlamsız bir ilişki kurar.

Kare özdeşlikleri alanla ilişkilendirildiğinde a ve b uzunluk birimindeyse a^2, 2ab ve b^2 alan birimindedir. Bir toplamda doğrudan uzunluk ile alanı birleştirmek, sayısal olarak yapılabilen işlemin bağlama uygun olduğu anlamına gelmez. Değişken için verilen yaş, adet, uzunluk, para veya zaman koşulları; cebirsel işlemin matematiksel geçerliliğinden ayrı olarak sonucun yorumlanmasını belirler.

16. Özdeşliklerde sık karışan yapılar ve son denetim

Bir toplamın karesi, karelerin toplamı değildir: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ iken a^2+b^2 ifadesinde çapraz terim bulunmaz. Örneğin a=5, b=2 alındığında $(5+2)^2=49$, $5^2+2^2=29$'dur. Yine iki parantezin çarpımıyla bunların toplamı aynı işlem değildir: $(x+2)(x+3)$, x^2+5x+6'ya; $(x+2)+(x+3)$ ise 2x+5'e eşdeğerdir.

Kare alma işlemi parantezin dışındaysa önce parantez bütünü dikkate alınır. x=1 için $2(x+3)^2=2\cdot16=32$ iken $[2(x+3)]^2=8^2=64$ bulunur. Bir katsayının dışarıda bulunması ile karesi alınan grubun içinde bulunması sonuçları farklılaştırır. Eksili açılımlarda da $(a-b)^2$ ile a^2-b^2 aynı değildir: a=7, b=2 için ilk ifade 25, ikinci ifade 45'tir. 25'i veren hesap (7−2)(7−2), 45'i veren hesap (7−2)(7+2) biçimindedir.

İki tam karenin farkı ve iki farkın karesi farklı ilişkilerdir. $(a+b)^2-(a-b)^2$ ifadesini iki kare farkı olarak açmak, $[(a+b)-(a-b)]\cdot[(a+b)+(a-b)] = (2b)(2a)=4ab$ sonucunu verir. Doğrudan tam kare açılımlarının farkı da $(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)=4ab$'dir. a=5, b=2 için $7^2-3^2=49-9=40$; $4\cdot5\cdot2=40$ olduğundan iki bağımsız yöntem örtüşür.

Cebirsel düzenlemede son kontrol noktaları

Kontrol noktası	Doğru yaklaşım	Tipik yanılgı
Benzer terimler	Değişken ve üsler aynıysa katsayıları birleştir	x ile x^2'yi topla
Parantezin önündeki eksi	Bütün terimlerin işaretini değiştir	Yalnız ilk terimin işaretini değiştir
İki parantezin çarpımı	Bütün çapraz çarpımları yaz	Bir çapraz çarpımı atla
Tam kare	İki kat çapraz çarpımı da ekle	$(a+b)^2$'yi a^2+b^2 san
İki kare farkı	Zıt işaretli eşlenik çarpanları kullan	Toplamı aynı kuralla aç
Cebirsel kesir	Önce tanım koşulunu, sonra ortak çarpanı kontrol et	Paydadaki toplamı terim terim sadeleştir

Bu bölümün temel sonucu, cebirsel işlemlerin yalnız sembolleri kısaltmak değil, aynı niceliği farklı ve doğrulanabilir biçimlerde göstermektir. Benzer terimleri birleştirme, parantezi dağıtma, çarpımı açma ve temel özdeşlikleri tanıma becerileri; denklem ve oran işlemlerindeki önceki bilgilerin farklı bir kullanımıdır. İzleyen matematik problemleri modülünde ise sözel verilerin uygun değişkenlerle modellenmesi, seçilen ifadenin gerçek duruma uyup uymadığının ayrıca denetlenmesini gerektirecektir.

BÖLÜM 03

MATEMATİK PROBLEMLERİ

KONU 3.1

SAYI VE KESİR PROBLEMLERİ

Sayı ve kesir problemleri, sözle ifade edilen nicelikleri matematiksel bir ilişkiye dönüştürme becerisini geliştirir. Bu tür problemlerde hesap yapmak kadar hangi sayının neyi temsil ettiğini belirlemek, verilen ilişkileri aynı bütün veya aynı birim üzerinden okumak ve elde edilen sonucu başlangıçtaki koşullarla karşılaştırmak önemlidir. Önceki bölümlerde sayı kümeleri, kesir işlemleri, denklemler ve cebirsel ifadeler ayrı ayrı incelenmişti. Burada bu bilgiler, bir durumun bütününü anlamaya ve eksik niceliği bulmaya yönelik bir model içinde birleştirilir. Yaş, iş-zaman, hareket, alışveriş ve yüzde-faiz gibi özel problem türleri fihristin sonraki başlıklarında ayrıca ele alınacaktır.

1. Problemi matematiksel bir modele dönüştürmek

Bir problemde önce bilinen miktarlar, aranan miktar ve bunları birbirine bağlayan sözel koşullar ayrılır. Bir niceliğin büyüklüğü açıkça verilmemişse uygun bir harfle temsil edilebilir. Harfin neyi ölçtüğü belirtilmediğinde aynı denklem farklı biçimlerde yorumlanabilir. Örneğin bir arşiv düzenlemesinde her birinin içinde eşit sayıda dosya bulunan 6 kutu ile kutular dışında kalan 14 dosyanın toplamı 92 olsun. Bir kutudaki dosya sayısı x doğal sayısı olarak tanımlanırsa toplam 6x+14=92 olur. Buradan 6x=78 ve x=13 elde edilir. Altı kutunun içindeki 6·13=78 dosyaya dışarıdaki 14 dosya eklendiğinde yeniden 92 bulunur.

Model kurarken denklemin doğru olması, çözümün bağlamda kullanılabilir olduğu anlamına tek başına gelmez. Dosya sayısı negatif veya kesirli olamaz; x'in doğal sayı olması gerekir. Buna karşılık bir kabın sıvı miktarı litre cinsinden kesirli olabilir. Birimleri ve izin verilen değerleri en başta belirlemek, işlem sonunda ortaya çıkabilecek anlamsız sonuçları ayırt etmeyi sağlar.

Sözel bir durumun matematiksel bileşenleri

Unsur	Örnek anlam	Modelde karşılığı
Bilinmeyen	Bir kutudaki dosya sayısı	$x \in \mathbb{N}$
Eşit gruplar	Altı kutu	6x
Grup dışı miktar	On dört dosya	+14
Toplam	Doksan iki dosya	6x+14=92
Doğrulama	Kutu içi ve dışı toplamı	6·13+14=92

2. Sözel ifadelerin sırası ve parantezin işlevi

“Bir sayının dört katının altı eksiği” ile “bir sayının altı eksiğinin dört katı” aynı anlama gelmez. Sayı x ise ilk ifade 4x−6; ikincisi 4(x−6) olur. x=17 için ilk değer 68−6=62, ikinci değer 4·11=44'tür. İkinci ifadeyi dağılma özelliğiyle 4x−24 biçiminde açmak da 44 sonucunu doğrular. Farkın nedeni, altı birimin yalnız sonuca mı yoksa dört kez alınan her gruba mı uygulandığıdır.

“Fazlasının yarısı”, “yarısının fazlası”, “katının eksiği” ve “eksiğinin katı” gibi anlatımlarda işlem sırasını belirleyen unsur cümlenin dilsel yapısıdır. Özellikle “kalanın üçte biri” ifadesindeki kesir, başlangıçtaki bütüne değil önceki işlem sonrasında elde edilen miktara uygulanır. Cümlenin tamamı anlaşılmadan tek bir sayının yanına kesir yazılması uygun değildir. Aynı ilke toplamın, farkın veya bir grubun belirli katının alınmasında da geçerlidir.

Benzer görünen farklı sözel ilişkiler

İfade	Matematiksel yazım	Ayırt edici anlam
Sayının 5 fazlasının 3 katı	3(x+5)	Önce 5 eklenir
Sayının 3 katının 5 fazlası	3x+5	Önce 3 ile çarpılır
Sayının yarısından 7 çıkarma	x/2−7	Yarıdan sonra 7 çıkarılır
Sayının 7 eksiğinin yarısı	(x−7)/2	Farkın yarısı alınır
Sayının üçte ikisinin 8 fazlası	2x/3+8	8 kesirli paya dahil değildir

3. Toplam ve farkı bilinen iki sayıyı belirlemek

İki sayının toplamı S, büyük sayı ile küçük sayı arasındaki fark D olsun; burada D negatif olmayan sayıdır. Büyük sayı B ve küçük sayı K ile gösterilirse B+K=S ve B−K=D yazılır. İki eşitlik toplandığında 2B=S+D, çıkarıldığında ise 2K=S−D olur. Böylece sayılar ayrı ayrı bulunur. Örneğin toplam 126, fark 34 ise büyük sayı (126+34)/2=80, küçük sayı (126−34)/2=46'dır. Doğrulamada 80+46=126 ve 80−46=34 elde edilir.

Bu yöntem iki eşitliğin aynı sayı çiftini anlattığı koşullarda kullanılır. Sayılar tam sayı olacaksa S ile D'nin aynı tek-çift niteliğine sahip olması gerekir; aksi durumda yarımlar tam sayı çıkmayabilir. Örneğin S=11 ve D=4, (11+4)/2=7,5 ile (11−4)/2=3,5 verir. Bunlar gerçek sayılar için geçerli olsa da iki tam sayının toplam-fark koşulu olarak kullanılamaz.

$$B=(S+D)/2;\ K=(S-D)/2$$

Anlamı: Toplam ve büyükten küçük çıkarılarak bulunan fark biliniyorsa iki sayı ayrı ayrı belirlenir.

Koşullar: B≥K gerçek sayılar; S=B+K, D=B−K≥0. Tam sayı isteniyorsa sonuçların tam sayı olma koşulu ayrıca incelenir.

4. Bir sayının diğerinin katı veya belirli farkı olması

İki miktar arasındaki ilişki “diğerinin üç katından sekiz eksik” gibi verilmişse iki bağımsız bilinmeyen tanımlamak zorunlu değildir. Küçük miktar x, büyük miktar 3x−8 olarak yazılabilir. Toplamları 112 ise x+(3x−8)=112, buradan 4x=120 ve x=30 bulunur. Diğer miktar 3·30−8=82'dir. İki koşulun ayrı kontrolü, 30+82=112 ve 82=3·30−8 eşitlikleridir.

“Üç katından sekiz eksik” ifadesinden ikinci miktarın her koşulda büyük olduğu sonucu çıkarılamaz. Nitekim x=2 için 3x−8=−2 olur. Yukarıdaki örnekte büyük-küçük sırası, bulunan 30 ve 82 değerleriyle tutarlıdır. Niceliklerin kişi veya nesne sayısı olduğu durumlarda x ve 3x−8 için negatif olmama ya da pozitif tam sayı koşulu aranır. Sözel tanımın önerdiği büyüklük sırası, çözümden sonra da denetlenmelidir.

5. İki tür grup ve toplam adet koşulu

Bir bütün iki tür gruptan oluşuyorsa grupların toplam sayısını ve grupların içerdiği birimleri ayrı yazmak gerekir. Örneğin bir toplantı salonunda yalnız üç veya beş kişilik oturma düzenine sahip 18 masa bulunduğunu ve bütün masaların tam dolu olması halinde 74 koltuk olduğunu varsayalım. Üç kişilik masa sayısı a, beş kişilik masa sayısı b olsun. Masa adedi a+b=18, koltuk adedi 3a+5b=74 eşitliklerini verir. a=18−b ifadesi yerine konulduğunda 54−3b+5b=74; 2b=20 ve b=10 bulunur. Böylece a=8 olur.

Bağımsız kontrolde 8+10=18 masa; 3·8+5·10=24+50=74 koltuk elde edilir. Masa sayısı ile koltuk sayısı farklı birimlerdir ve doğrudan birbirlerinin yerine kullanılamaz. Masalardan bazılarının boş olması veya kısmen dolu olması durumunda toplam kişi sayısı mutlaka koltuk kapasitesine eşit olmazdı; bu nedenle modelin dayandığı “tam dolu” veya “kapasite” bilgisi korunmalıdır.

$$a+b=N;\ pa+qb=T$$

Anlamı: İki farklı büyüklükte grup için grup adedi toplamı N ve birim sayısı toplamı T ayrı eşitliklerdir.

Koşullar: a,b negatif olmayan tam sayılar; p,q her grubun birim kapasitesi; tam kapasite kullanılıyorsa toplam T'ye eşit olur. p≠q olduğunda a ve b iki eşitlikten belirlenebilir.

6. Ardışık tam sayılarla kurulmuş toplam ilişkileri

Ardışık tam sayılarda her yeni değer bir öncekinden bir fazladır. Dört ardışık sayı x, x+1, x+2 ve x+3 olarak yazılır. Toplamları 138 ise 4x+6=138; 4x=132 ve x=33 olur. Sayılar 33, 34, 35, 36'dır. Doğrulama 33+34+35+36=138 işlemidir. Aynı kontrol, ilk ve son sayının toplamının 69, ortadaki iki sayının toplamının da 69 olmasıyla yapılabilir.

Ardışık tek veya ardışık çift sayılar arasında bir değil iki birim fark bulunduğu için gösterim x, x+2, x+4 biçimindedir; ayrıca x uygun tek veya çift tam sayı olarak seçilir. Beş ardışık tek sayının toplamı 205 ise ortadaki tek sayı, toplamın beşte biri olan 41'dir. Sayılar 37, 39, 41, 43 ve 45 olarak belirlenir. Bu sayıların toplamı 205'tir; en küçük ve en büyük değerlerin toplamı 82 olup ortadaki sayının iki katına eşittir. Böylece ortalama üzerinden yapılan kısa yol da gerekçelendirilir.

$$\text{n ardışık tam sayının toplamı} = n\cdot[2x+(n-1)]/2$$

Anlamı: İlk değer x ise son değer x+n−1'dir; toplam, terim sayısı ile ilk ve son değerin ortalamasının çarpımıdır.

Koşullar: n pozitif tam sayı; x tam sayı. Ardışık tek/çift sayılarda artış 2 birim olduğundan son değer ve formül buna göre uyarlanır.

Ardışık sayıların modellenmesi

Sayı türü	Gösterim	Uygunluk koşulu
Üç ardışık tam sayı	x, x+1, x+2	x∈ℤ
Dört ardışık tam sayı	x, x+1, x+2, x+3	x∈ℤ
Üç ardışık çift tam sayı	2k, 2k+2, 2k+4	k∈ℤ
Üç ardışık tek tam sayı	2k+1, 2k+3, 2k+5	k∈ℤ
Beş ardışık tek tam sayı	x−4, x−2, x, x+2, x+4	x tek tam sayı

7. Rakam koşulları taşıyan sayı problemlerinde iki düzey

İki basamaklı bir sayıda onlar ve birler basamağını harflerle göstermek, sayının kendisini çarpım sanmadan işlem yapmayı gerektirir. İki basamaklı sayının rakamları toplamı 11 ve onlar basamağındaki rakam birler basamağından 3 büyük olsun. Onlar rakamı a, birler rakamı b ise a+b=11 ve a−b=3 olur. İlk bölümdeki toplam-fark ilişkisinden a=7, b=4 bulunur. Sayı 10a+b=74'tür. Kontrol için 7+4=11 ve 7−4=3'tür.

Rakamlar 0 ile 9 arasında tam sayı olmalıdır; iki basamaklı sayıda onlar rakamı 0 olamaz. 74'ün ters yazılışı 47'dir ve 74−47=27 farkı, 9(7−4)=27 bağıntısıyla ayrıca doğrulanır. Rakamların toplamı ile sayının değeri farklı nesnelerdir: 7+4=11 olsa da sayının kendisi 11 değil 74'tür. Bu alt başlık, daha önce öğrenilen basamak çözümlemesinin sözel koşulla birlikte kullanılmasını gösterir; bölünebilme ve kapsamlı basamak kuralları yeniden anlatılmaz.

Rakam probleminde aynı verinin farklı görevleri

Bilgi	Matematiksel ifade	Doğrulama
Rakam toplamı	a+b=11	7+4=11
Rakam farkı	a−b=3	7−4=3
Sayının kendisi	10a+b	10·7+4=74
Basamak koşulları	1≤a≤9, 0≤b≤9	a=7, b=4 uygundur

8. Bir bütünün belirli kesri verildiğinde bütünü bulmak

“Bir miktarın beşte ikisi” biçimindeki ifade, miktarın 2/5 ile çarpılmasını anlatır. Buna karşılık miktarın 5/8'inin 185 olduğu biliniyorsa aranan, kesrin değeri değil başlangıç miktarıdır. Bütün x olmak üzere (5/8)x=185 yazılır. Her iki taraf 8/5 ile çarpılarak x=185·8/5=296 bulunur. Kontrol (5/8)·296=185'tir. Tamamlayıcı bölüm 296−185=111 olur; bunun da 3/8·296=111 olması bağımsız bir denetimdir.

Bu yöntemde verilen 185 sayısı bir parçadır ve hangi bütüne göre 5/8 olduğu açıkça tanımlanmalıdır. Kesir sıfırsa “0 katı 185” gibi bir eşitlik çözüm vermez; bütünün bulunmasında bölme için kesrin sıfırdan farklı olması gerekir. Bir kesir payı paydasından küçükse ve bütün pozitifse parça bütünden küçüktür; örnekte 185<296 bu beklenen büyüklük ilişkisini sağlar.

$$\text{Parça} = \text{Bütün}\cdot(a/b);\ \text{Bütün} = \text{Parça}\cdot(b/a)$$

Anlamı: Aynı bütüne ait kesir kadarının değeri biliniyorsa kesrin çarpımsal tersiyle bütün bulunur.

Koşullar: a,b gerçek sayılar; b≠0. Bütünü parça üzerinden belirlemek için ayrıca a≠0 gerekir. Adet problemlerinde bütün ve parça uygun tam sayılar olmalıdır.

9. Kullanılan kesir ve geriye kalan miktar ilişkisi

Bir stokun 3/7'si kullanılmışsa geriye kalan oran 1−3/7=4/7'dir. Kullanılan miktarın 96 birim olduğu bir durumda bütün x için 3x/7=96, dolayısıyla x=224 bulunur. Geriye kalan stok 4·224/7=128 birimdir. Bağımsız kontrol 96+128=224 eşitliğidir. Kesirlerin payları toplandığında 3/7+4/7=1 olduğu için iki miktar aynı başlangıç stokunu eksiksiz tamamlar.

“Kalan miktar” ile “kalanın kesri” farklı niceliklerdir: 4/7 boyutsuz bir pay, 128 ise stok birimi taşıyan sayıdır. Bir problem kalan miktarı 128 olarak verseydi ilk aşamada 4x/7=128 kurulabilirdi. Her iki giriş noktası aynı bütünü verir. Fakat kullanılmış veya kalmış miktarlar ile parçaların payları toplanırken mutlaka aynı bütün ve aynı ölçü birimi kullanılmalıdır.

Aynı stok için bütün, kullanılan ve kalan

Bölüm	Bütündeki payı	Miktar (birim)
Başlangıç stoku	1	224
Kullanılan	3/7	96
Geriye kalan	4/7	128
Toplam kontrolü	3/7+4/7=1	96+128=224

10. Aynı bütünün birbirinden ayrı kesirli bölümleri

Bir bütünden farklı amaçlarla ayrılan iki miktar aynı başlangıç bütününün kesirleri olarak verilmişse bu paylar toplanabilir. Örneğin bir kaynağın 2/5'i birinci gruba, 1/4'ü ikinci gruba ayrılmış ve geriye 84 birim kalmış olsun. Kullanılan pay 2/5+1/4=8/20+5/20=13/20'dir. Kalan pay 7/20 olur. Bütün x için (7/20)x=84; x=84·20/7=240 bulunur. Birinci pay 96, ikinci pay 60, kalan 84 birimdir. Son denetim 96+60+84=240'tır.

İlk iki parçanın toplamının 13/20 olması için grupların birbirinden ayrı olması ve verilen kesirlerin aynı başlangıç bütününe ilişkin bulunması gerekir. Aynı kişilerin iki kez sayılması veya ikinci kesrin ilk işlemden sonraki kalan üzerinden verilmesi halinde toplam değişir. Bu nedenle iki kesrin yazımına geçmeden önce hangi miktara göre tanımlandıkları açıklığa kavuşturulur.

$$\text{Kalan pay} = 1-a/b-c/d;\ \text{Kalan miktar} = x\cdot(1-a/b-c/d)$$

Anlamı: Çakışmayan iki parça aynı başlangıç bütünü üzerinden ayrılmışsa kalan pay, bütünden bu payların toplamının çıkarılmasıyla bulunur.

Koşullar: b,d≠0. Fiziksel bir bütün parçalanıyorsa a/b≥0, c/d≥0 ve a/b+c/d≤1 olmalıdır; parçalar birbirinden ayrıdır.

11. Bir işlemden sonra kalanın kesrini almak

Ardışık kesirli işlemlerde ikinci kesir çoğu zaman başlangıç miktarına değil önceki işlemin sonucuna uygulanır. Başlangıçtaki malzemenin önce 1/3'ü, ardından kalanın 1/4'ü kullanılmış olsun. İlk işlemden sonra 2/3 kalır. Sonraki aşamada bu kalanın 3/4'ü kaldığı için başlangıç bütününe göre son miktar (2/3)·(3/4)=1/2'dir. Son miktar 90 birim ise başlangıç x için x/2=90 ve x=180 bulunur.

İşlem adımlarıyla kontrol yapıldığında ilk kullanım 180/3=60, birinci işlem sonrası kalan 120'dir. İkinci kullanım 120/4=30, son kalan 120−30=90'dır. Başlangıç miktarının 1/4'ünü ikinci kez kullanmak ise 45 birim kullanımı ve 75 birim kalanı üretirdi; bu aynı problem değildir. “Önce kullanılan”, “sonra kalandan kullanılan” ve “son kalan” terimlerinin farklı aşamaları göstermesi zorunludur.

$$\text{Son kalan} = x\cdot(1-a/b)\cdot(1-c/d)$$

Anlamı: İlk kesir başlangıçtan, ikinci kesir ilk işlemden sonra kalandan ayrılıyorsa kalan katsayıları çarpılır.

Koşullar: b,d≠0. Fiziksel azalma için 0≤a/b≤1 ve 0≤c/d≤1 olmalıdır. İlk kalanın sıfır olması durumunda daha sonra kalandan pozitif miktar çıkarılamaz.

Ardışık kesirli azalmanın adım adım hesabı

Aşama	O aşamadaki hesap	Miktar (birim)
Başlangıç	x	180
İlk kullanılan	x/3	60
İlk işlem sonrası kalan	2x/3	120
İkinci kullanılan	(1/4)·120	30
İkinci işlem sonrası kalan	(3/4)·120	90
Son doğrulama	60+30+90	180

12. Kesirli azalma ile sabit miktarlı azalmayı birleştirmek

Kesirli bir kullanımın ardından sabit miktarda ek kullanım varsa son durumu tek kesir olarak göstermeden önce sabit miktarın etkisi ayrılır. Örneğin başlangıç stokunun 2/7'si kullanıldıktan sonra 18 birim daha kullanılmış ve 82 birim kalmış olsun. Başlangıç x birimdir. İlk işlem sonrası kalan 5x/7, son durum 5x/7−18=82'dir. Buradan 5x/7=100 ve x=140 bulunur. İlk kullanım 40, ek kullanım 18, kalan 82 birimdir; 40+18+82=140 başlangıca döner.

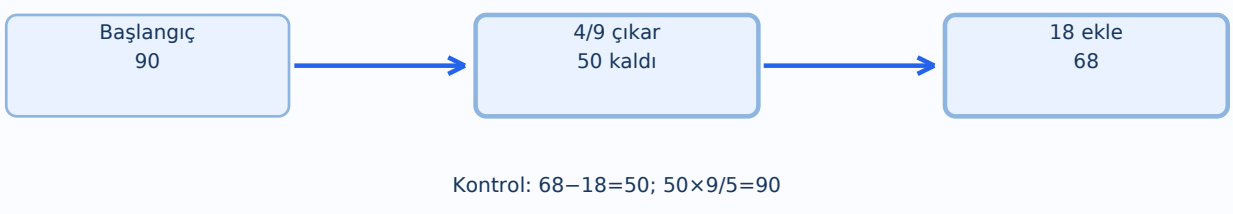
18 birimin başlangıç stokunun belirli bir kesri olduğunu söylemek için ayrıca bilgi gerekir. 18'i doğrudan 2/7 ile toplamak nicelik türlerini karıştırır. Matematiksel modelde 2/7 bir oran, 18 ise stokla aynı birime sahip sabit miktardır. Bu nedenle farklı türdeki iki nicelik bir denklemde yer alsa da doğrudan aynı tür terim gibi birleştirilmez.

13. Sonuçtan başlangıca doğru ters işlem yürütmek

Ardışık işlemlerin son sonucu bilindiğinde, adımları ters sırada okumak denklem çözümüne alternatif bir düşünme yoludur. Bir miktarın önce 4/9'u çıkarılmış, sonra kalan miktara 18 birim eklenmiş ve son değer 68 olmuş olsun. Başlangıç x ise model (5/9)x+18=68 biçimindedir. Önce eklenen 18 geri alınır ve 50 bulunur; 50 sayısı başlangıcın 5/9'udur. Başlangıç x=50·9/5=90'dır. İlk çıkarılan 4·90/9=40, kalan 50, ekleme sonrası 68'dir.

Ters yöntem yalnız işlemlerin geri alınabildiği ve hangi niceliğe uygulandığının bilindiği durumlarda tek bir başlangıç verir. Örneğin bir miktarın tamamının çıkarılmasından sonra son değere sabit eklenirse başlangıç bilgisi silinebilir; 0·x+18=18 eşitliği her x için doğrudur. Benzer biçimde bir işlemin sonucunun kesri alınırken kesrin sıfır olması önceki miktarın geri bulunmasını engeller. Bu sınırlar, her ardışık işlemin mutlaka tek bir çözümü olduğu varsayımını önler.

Konuya ait açıklayıcı şema



Kontrol: 68−18=50; 50×9/5=90

Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

14. Bir bütünün kesri ile onun içindeki başka bir kesir

“Bir bölümün dörtte biri” ifadesi, önce seçilen bölümün sonra bu bölümün 1/4'ünün alınmasını anlatır. Örneğin 200 birimlik bir malzemenin 3/5'i belirli bir işe ayrıldığında ayrılan miktar 120'dir. Bu ayrılan kısmın 1/4'ü işlemde kullanılırsa kullanılan miktar 120/4=30 birim olur. Başlangıç bütünü üzerinden hesap (3/5)·(1/4)·200=30 sonucunu verir. Böylece ayrılan bölümün 1/4'ü, başlangıç bütününün 3/20'sidir.

Burada 1/4 ile 3/5'in toplanması, kesirlerin farklı aşamalarda uygulandığını gözden kaçırır. İki kesrin çarpılmasının gerekçesi, aynı büyüklüğün ardışık parçalarının seçilmesidir. Buna karşılık aynı başlangıç bütünden birbirini dışlayan iki bağımsız bölüm ayrılıyorsa payların toplamı kullanılabilir. Hangisinin geçerli olduğunu belirlemek sözel ilişkiyi okumaya bağlıdır.

Aynı bütün, ayrılmış bölüm ve bölümün kesri

Nicelik	Başlangıç bütününe oranı	Miktar
Başlangıç	1	200 birim
İşe ayrılan	3/5	120 birim
Ayrılanın dörtte biri	3/20	30 birim
Ayrılandan kullanılmadan kalan	9/20	90 birim
Baştan hiç ayrılmayan	2/5	80 birim

15. Farklı bütünlerin kesirlerini yanlış karşılaştırmamak

İki miktarın aynı kesirle ifade edilmesi, bu kesirli parçaların aynı sayısal değere sahip olduğu anlamına gelmez. Birinci grubun 150 birimlik toplamının 2/5'i 60, ikinci grubun 200 birimlik toplamının 1/4'ü 50 birimdir. İlk grubun kullanılan oranı 2/5=0,4, ikinci grubunki 1/4=0,25'tir. Kullanılan miktarların farkı 60−50=10 birimdir. Buradaki 2/5−1/4=3/20 farkı, farklı toplamlar üzerinde doğrudan 10 birimi temsil etmez.

Bir kesir probleminde oranların aynı paydada yazılması, uygulandıkları toplamların aynı olduğu varsayımını kendiliğinden sağlamaz. “A'nın yarısı” ile “B'nin yarısı” ifadelerinde önce A ve B büyüklükleri belirlenir. Bütünler farklıysa sayısal karşılaştırma için her parça kendi bütününe uygulanır, sonra çıkan aynı birimli miktarlar karşılaştırılır. Ayrıca bir kesir 1'den büyük olabilir: 120 birimlik bir referans miktarın 5/4'ü 150 birimdir. Bu durumda 150 birim, referans bütünün içinde kalan bir parça değil onu 30 birim aşan karşılaştırma miktarıdır.

> **Kesirlerde bütünün değişmesi** Aynı kesir farklı büyüklükteki bütünlerde farklı miktar verir. Başlangıca ait kesirlerle kalana ait kesirler, bütünleri ortaklaştırılmadan toplanamaz. Başlangıçtaki bütünü aşan 5/4 gibi çarpanlar, fiziksel bir bütünden geriye kalan parça olarak yorumlanamaz.

16. Tam sayı koşulları, sınırlar ve tutarlılık denetimi

Sayı problemi sonucunda bulunan cebirsel değer, problemdeki nesnenin türüne uygun olmalıdır. Bir kutuda tam sayıda ürün, bir rafta tam sayıda kitap bulunur; bu adetlerde 7,5 gibi bir sonuç bağlamca uygun değildir. Örneğin bir bütündeki nesnelerin 1/6'sı 14 nesne ise toplam 6·14=84'tür ve 84 doğal sayıdır. Bu sonucun kontrolü 84/6=14 işlemidir. Buna karşılık 70 kitaptan tam olarak 3/8'inin “bütün kitap” olarak ayrıldığı söylenirse 70·3/8=26,25 kitap çıkar; kitaplar bölünemiyorsa böyle bir dağılım verilen koşullarla tutarsızdır. Sayıyı 26'ya yuvarlamak, tam olarak 3/8 koşulunu korumaz.

Bir miktarın alt veya üst sınırı verildiğinde eşitlik yerine eşitsizlik kurulabilir. Yalnız yedişer ürün içeren k kutunun yanına beş ayrı ürün eklendiğinde toplamın en fazla 89 olması isteniyorsa k negatif olmayan tam sayıdır ve $7k+5 \leq 89$ koşulu geçerlidir. Buradan $k \leq 12$ elde edilir. $k=12$ için toplam $7 \cdot 12+5=89$, $k=13$ için $7 \cdot 13+5=96$ olduğundan sınırın neden 12'de kaldığı ayrı şekilde doğrulanır. Kutuların dolu olmadığı bir durumda 7k ifadesi ancak toplam kapasiteyi gösterirdi; gerçek içerik sayısını göstermeyebilirdi.

Sayısal sonucun bağlamda geçerliliği Elde edilen değer başlangıçtaki eşitlik veya eşitsizlikte kontrol edilir. Kişi, kutu, kitap gibi bölünmez adetlerin negatif veya kesirli çıkması modelin yorumunu yeniden değerlendirmeyi gerektirir; koşulu korumadan yuvarlama yapılmaz. Ölçülebilen uzunluk, hacim veya süre kesirli olabilir. Kesirlerde payda sıfır olamaz; bütünün ne olduğu her aşamada korunur.

Sayı ve kesir problemleri için son doğrulama ölçütleri

Denetim	Aranacak bilgi	Örnek kontrol
Sözel sıra	İşlem gruplaması doğru mu?	$4(x-6)$, $4x-6$ değildir
Bütün ve parça	Kesir hangi miktara ait?	Kalanın 1/4'ü ilk kalan üzerinden alınır
Birim	Aynı tür miktarlar mı toplanıyor?	Masa adedi ve koltuk adedi ayrıdır
Sayı kümesi	Sonuç tam veya negatif olmayan mı olmalı?	84 nesnenin 1/6'sı 14'tür
Sınır	En az, en çok, tam eşit ayrımı	$k=12$ için 89, $k=13$ için 96
Başlangıca dönüş	Bütün parçalar geri toplanıyor mu?	$96+60+84=240$

Sayı ve kesir problemlerinde temel amaç, bilinmeyen sayıyı rastgele işlem deneyerek elde etmek değil; sözel koşulları aynı nicelikler üzerinde tutarlı eşitliklere dönüştürmektir. Toplam-fark, kat ve adet ilişkileriyle kurulan modeller; bütünün kesrini bulma, parçalardan bütüne dönme ve kalan üzerinden yeni bir kesir uygulama gibi durumlarda aynı düşünceyi kullanır. Sonucun birimi, işareti, tam sayı olup olmaması ve başlangıç koşullarını sağlayıp sağlamadığı değerlendirildiğinde hesapla yorum birbirini tamamlar. İlerleyen problemlerde de bu model kurma ve denetleme yaklaşımı korunacaktır.

KONU 3.2

YAŞ PROBLEMLERİ

Yaş problemleri, zaman ilerlediğinde bir veya birden çok kişinin yaşının nasıl değiştiğini ve bu değişimle birlikte yaş farkı, toplamı, oranı ya da ortalamasının ne hâle geldiğini inceleyen sözel matematik problemleridir. Temel işlem son derece düzenlidir: Aynı zaman aralığında yaşayan kişilerin yaşlarına aynı yıl miktarı eklenir veya çıkarılır. Ancak toplam yaş, yaş farkı ve yaş oranı aynı biçimde değişmez. Doğru çözüm, kişileri ve zaman noktalarını açıkça ayırmakla başlar; sözel veriler ortak bir zaman çizelgesinde denkleme dönüştürülür.

1. Yaşın zamanla değişimi ve başlangıç anının seçimi

Bir kişinin bugünkü yaşına x yıl, bugünden sonraki süreye t yıl denilsin. Bu durumda t yıl sonraki yaş $x+t$, t yıl önceki yaş $x-t$ olur. Zamanı aynı yönde ve aynı miktarda değiştirmek zorunludur. Örneğin bugün 28 yaşında olan bir kişi altı yıl önce 22, dokuz yıl sonra 37 yaşındadır. Ters kontrol yapıldığında $22+6=28$ ve $37-9=28$ elde edilir. “Altı yıl önce” ile “dokuz yıl sonra” arasında geçen toplam süre ise $6+9=15$ yıldır; iki ayrı yaşı doğrudan çıkarmak da $37-22=15$ sonucunu verir.

Yaş bir zaman noktasına bağlı büyüklüktür. “Babanın yaşı 40” ifadesi yalnız bugünkü durumu belirliyorsa, geçmiş veya gelecek bir bağıntı kurulurken babanın yaşı sabit 40 kabul edilemez. Benzer biçimde iki kişinin yaşları aynı tarihte karşılaştırılacaksa her iki yaş da aynı yıla taşınmalıdır. Geçmişe gidilen süre, kişinin hayatta bulunduğu dönemi aşmamalıdır; bu dersin sözel modellerinde negatif yaş, geçerli bir geçmiş yaş olarak kabul edilmez.

$$\text{Yaş(t yıl sonra)} = x+t;\ \text{Yaş(t yıl önce)} = x-t$$

Anlamı: Başlangıç yaşı x olan kişinin yaşına ileriye doğru t eklenir, geçmişe doğru t çıkarılır.

Koşullar: $x \geq 0$, $t \geq 0$. Geçmiş yaşın anlamlı olması için $t \leq x$ alınır. Yaşlar ve süreler aynı yıl birimindedir.

Tek kişinin farklı zamanlardaki yaşı

Zaman	Cebirsel gösterim	Bugünkü yaşı 28 olan kişi
6 yıl önce	$x-6$	22
Bugün	x	28
9 yıl sonra	$x+9$	37
6 yıl önceden 9 yıl sonraya	$(x+9)-(x-6)=15$	15 yıl ilerleme

2. İki kişinin yaşlarını aynı tarih üzerinden karşılaştırmak

Bugün A kişisinin yaşı a, B kişisinin yaşı b ise yedi yıl sonraki yaşları sırasıyla $a+7$ ve $b+7$; dört yıl önceki yaşları $a-4$ ve $b-4$ olur. Tablo kullanmak, bir kişinin yaşını geçmişe taşırken diğer kişiyi yanlışlıkla bugünde bırakma hatasını önler. Örneğin bugün 47 ve 19 yaşındaki iki kişinin on yıl önceki yaşları 37 ve 9, on iki yıl sonraki yaşları 59 ve 31'dir. Bütün zaman dilimlerinde aynı 28 yıllık fark korunur: $47-19=37-9=59-31=28$.

İki farklı tarihe ait yaşlar karşılaştırılacaksa zaman açıklaması denkleme ayrı ayrı yerleştirilir. A'nın üç yıl sonraki yaşının B'nin beş yıl önceki yaşına eşit olduğunu söyleyen ifade $a+3=b-5$ biçimindedir. Buradan $b-a=8$ çıkar; yani B bugün A'dan sekiz yaş büyüktür. Her iki tarafı aynı yıla taşımadan $a=b$ yazmak bu bilgiyi kaybettirir. Kontrol olarak $a=24$ ve $b=32$ seçildiğinde A üç yıl sonra 27, B beş yıl önce 27 yaşındadır; verilen eşitlik sağlanır.

İki kişinin aynı zaman eksenindeki yaşları

Zaman	A kişisi	B kişisi	Yaş farkı (A−B)
10 yıl önce	37	9	28
Bugün	47	19	28
12 yıl sonra	59	31	28

3. Yaş farkının neden sabit kaldığı

İki kişi arasındaki yaş farkı, ikisi de hayatta olduğu sürece zaman geçişinden etkilenmez. Çünkü her iki kişinin yaşına da aynı t miktarı eklenir: $(a+t)-(b+t)=a-b$. Geçmişe giderken de $(a-t)-(b-t)=a-b$ eşitliği geçerlidir. Bu özellik, çözümlerde farkı her zaman yeniden hesaplamayı gereksiz kılar; özellikle “kaç yıl sonra yaş farkları şu kadar olur” gibi ifadeler değerlendirilirken önemlidir. Fark bugün 20 ise gelecekte de 20 olur; başka bir değer olacağı iddiası aynı iki kişi ve aynı ölçüm anlayışı altında tutarsızdır.

Yaş farkı sabit olmakla birlikte yaşların oranı sabit değildir. Bugün 50 ve 30 yaşında olan iki kişinin oranı 50/30=5/3 iken on yıl sonraki oranı 60/40=3/2 olur. Fark iki tarihte de 20'dir. Bu değişimin nedeni, her iki yaşın aynı 10'u kazanması fakat başlangıçtaki büyüklüklerinin farklı olmasıdır. Oran problemi çözerken başlangıç oranını yıllar sonrasına aynen taşımak bu yüzden hatalıdır.

$$(a+t)-(b+t)=a-b;\ (a-t)-(b-t)=a-b$$

Anlamı: Aynı iki kişinin aynı andaki yaşlarının farkı zamanla değişmez.

Koşullar: İki kişi de karşılaştırılan tarihlerde hayattadır; yaşlar aynı anda ve aynı yıl biriminde değerlendirilmektedir.

4. Yaşları toplamının zamanla değişimi

İki kişinin bugünkü yaşları toplamı T ise t yıl sonra toplam T+2t, t yıl önce T−2t olur. Çünkü her kişi t yıl yaşlanır veya geçmişe gidildiğinde t yıl gençleşir. Üç kişi için değişim 3t, n kişi için nt'dir. Örneğin baba ile oğlunun bugünkü yaşları toplamı 68 ve aralarındaki fark 32 olsun. Baba B, oğul O ile gösterildiğinde B+O=68, B−O=32 elde edilir. Toplam ve fark birleştirilince B=(68+32)/2=50, O=(68−32)/2=18'dir. Beş yıl sonra toplamları 55+23=78 olur; 68+2·5=78 eşitliği bağımsız kontroldür.

Yedi yıl öncesine gidildiğinde yaşlar 43 ve 11, toplamları 54'tür. Aynı sonuç 68−2·7=54 ile bulunur. Buna karşılık 68−7=61 işlemi yanlış olur; yalnız bir kişiye ait yedi yıllık değişimi iki kişinin toplamına uygulamış olur. Yaşların toplamı değişirken kişi sayısının sabit tutulduğu özellikle belirtilmelidir; araya yeni bir aile üyesi katılırsa toplamın değişim kuralı ayrıca düzenlenir.

$$\text{n kişinin t yıl sonraki yaş toplamı}=T+n\cdot t;\ \text{t yıl önceki yaş toplamı}=T-n\cdot t$$

Anlamı: Her kişi t yıl yaşlandığı için toplamda n katı kadar değişim olur.

Koşullar: n pozitif tam sayıdır. Aynı n kişinin karşılaştırılan dönemlerde hayatta olduğu ve gruba kimse eklenmediği ya da gruptan çıkmadığı varsayılır.

Baba ile oğul örneğinde toplam ve fark

Zaman	Baba	Oğul	Toplam	Fark
7 yıl önce	43	11	54	32
Bugün	50	18	68	32
5 yıl sonra	55	23	78	32

5. Yaş ortalamasını zaman çizelgesinde yorumlamak

Aynı n kişinin yaş ortalaması, toplam yaşlarının n'ye bölünmesiyle bulunur. Her kişinin yaşı t yıl ilerlediğinde toplam nt artar ve ortalama da tam t yıl artar. Örneğin dört kişilik bir grubun bugünkü yaş ortalaması 27 yıl ise bugünkü toplam 4·27=108 yıldır. Beş yıl sonra toplam 108+4·5=128, ortalama 128/4=32 yıl olur. Üç yıl önce toplam 108−4·3=96, ortalama 96/4=24 yıldır. Ortalama bakımından doğrudan 27+5=32 ve 27−3=24 işlemleri de aynı sonucu verir.

Bu ilişki, kişi sayısı ve kişiler değişmedikçe geçerlidir. Bir kişinin gruptan ayrıldığı veya bir kişinin sonradan gruba katıldığı durumda yeni toplam, o kişinin ilgili tarihteki yaşı çıkarılarak ya da eklenerek hesaplanmalıdır. Yaş ortalaması kesirli çıkabilir: Dört kişinin yaşları 21, 22, 24, 28 ise toplamları 95 ve ortalamaları

95/4=23,75 yıldır. Bu, kişilerin tek tek kesirli yaşlarla ifade edilmesini gerektirmez; yalnız grubun aritmetik ortalamasıdır.

> Ortalama yaş=T/n; n kişi değişmiyorsa ortalama(t yıl sonra)=T/n+t
>
> **Anlamı:** Toplam yaşın kişi sayısına bölünmesi ortalamayı verir; aynı grubun ortalaması geçen yıl kadar artar.
>
> **Koşullar:** n>0 ve sabit; bütün kişilerin yaşları aynı tarihte alınmalıdır.

6. Bugün ile gelecek arasında kat ilişkisi kurmak

Sözel metinlerde bir kişinin yaşının diğerinin belirli katı olması çoğu zaman yalnız belirli bir tarihte geçerlidir. Örneğin bir babanın bugünkü yaşı çocuğunun bugünkü yaşının üç katı, on iki yıl sonraki yaşı ise çocuğun o günkü yaşının iki katı olsun. Çocuğun bugünkü yaşı x, babanın yaşı 3x alınır. On iki yıl sonraki eşitlik 3x+12=2(x+12) olur. Parantez açıldığında 3x+12=2x+24, dolayısıyla x=12 bulunur. Baba bugün 36, çocuk 12 yaşındadır. On iki yıl sonra baba 48, çocuk 24 yaşında olacağından oran tam olarak ikidir.

Bu modelde bugünkü üç kat ilişkisinin on iki yıl sonra da sürmesi beklenmez; iki kişi aynı yıl miktarında yaşlandığından yaşları arasındaki sabit 24 farkı korunurken oran küçülür. Doğrudan kontrol bugünkü 36/12=3 ve gelecekteki 48/24=2 eşitlikleridir. Bir çocuğun henüz doğmamış olduğu geçmiş tarihlerde bu tür oranlar kurulmamalıdır.

Gelecekte değişen yaş katları

Zaman	Baba	Çocuk	Babanın çocuğa oranı
Bugün	36	12	3
12 yıl sonra	48	24	2
İki zaman arasındaki fark	12 yıl artış	12 yıl artış	Sabit bir oran değil

7. Geçmişteki kat bilgisi ile bugünkü kat bilgisini birleştirmek

Kat ilişkisinin geçmişte verildiği durumlarda bütün yaşlar doğru tarihe çekilmelidir. Bir babanın yaşı bugün oğlunun yaşının üç katı, altı yıl önce oğlunun o günkü yaşının beş katı olsun. Oğlun bugünkü yaşı x, babanınki 3x'tir. Altı yıl önce oğul x−6, baba 3x−6 yaşındadır. Böylece 3x−6=5(x−6), yani 3x−6=5x−30 yazılır. 24=2x eşitliğinden x=12 ve baba 36 bulunur. Altı yıl önce oğul 6, baba 30 yaşındadır; 30=5·6 koşulu sağlanır.

Babanın geçmiş yaşı 3(x−6) olarak yazılsaydı, “bugün üç kat” ilişkisi yanlış biçimde geçmişe de taşınmış olurdu. Doğru ifade 3x−6'dır; önce bugünkü baba yaşı bulunur, sonra aynı altı yıl çıkarılır. Aynı örneğin yaş farkı bugün 36−12=24 ve altı yıl önce 30−6=24'tür; böylece ikinci bağımsız doğrulama yapılır.

8. Belirli bir kat oranına kaç yıl sonra ulaşılır?

Bazı problemlerde kişi yaşları bellidir, bilinmeyen geçecek süredir. Bugün 42 yaşındaki annenin 14 yaşındaki kızının yaşının iki katına ne zaman geleceği düşünülsün. Gelecekte geçecek süre t≥0 yıl olsun. 42+t=2(14+t) eşitliği 42+t=28+2t, dolayısıyla t=14 sonucunu verir. O tarihte anne 56, kızı 28 yaşındadır; oran 2'dir. Bugünkü fark 42−14=28, gelecekte de 56−28=28 olduğundan sonuç yaş farkıyla ayrıca denetlenir.

İki kişinin yaşlarının eşit olacağı bir tarih ise başlangıçta yaş farkı sıfır değilse bulunamaz. Çünkü a+t=b+t eşitliği ancak a=b olduğunda sağlanabilir. Buna karşılık daha büyük yaşın daha küçüğe oranı pozitif yaşlarda zaman ilerledikçe bire yaklaşır; büyük olan kişinin yaşı küçük olanın yaşına tam olarak eşit hâle gelmez. Bu ayrım denklem çözümündeki cebirsel sonuç ile yaşların gerçek anlamını birlikte düşünmeyi gerektirir.

$$A+t=k(B+t) \Rightarrow t=(A-kB)/(k-1)$$

Anlamı: Bugün A ve B yaşında olan iki kişinin t yıl sonraki yaşları arasındaki k kat ilişkisini çözmenin genel biçimidir.

Koşullar: $k\neq1$, $A\geq0$, $B\geq0$, aranan gelecek süre için $t\geq0$ ve o tarihte $B+t>0$ alınır. $k=1$ durumunda ancak $A=B$ ise eşitlik her t için geçerlidir.

9. Yaşları toplamı ve yaş farkı birlikte verildiğinde

İki kişi için yaşların toplamı T ve yaş farkı d biliniyorsa, büyük yaş $(T+d)/2$, küçük yaş $(T-d)/2$ olur. Bu ilişki, toplam ve fark denklemlerinin taraf tarafa toplanıp çıkarılmasıyla elde edilir. Örneğin iki kişinin beş yıl önceki yaşları toplamı 54 ve bugün aralarındaki fark 18 yıl olsun. Bugünkü toplam $54+2\cdot5=64$'tür. O hâlde bugünkü yaşlar $(64+18)/2=41$ ve $(64-18)/2=23$ bulunur. Beş yıl önceki yaşlar 36 ve 18, toplamları 54'tür; bugünkü fark $41-23=18$ ile korunmuştur.

Toplam ve farkın aynı tarih için yazılmış olması şarttır. Beş yıl önceki toplam ile bugünkü fark yan yana kullanılırsa önce zamanların eşleştirilmesi gerekir; fark her zaman aynı olduğu için geçmiş fark doğrudan 18 alınabilir, ancak bugünkü toplam doğrudan 54 alınamaz. Ayrıca yaşların tam sayı olması isteniyorsa toplam ile farkın aynı tek-çift niteliğe sahip olması gerekir; aksi durumda bulunan yaşlardan biri veya ikisi kesirli olabilir.

$$\text{Büyük yaş}=(T+d)/2;\ \text{küçük yaş}=(T-d)/2$$

Anlamı: Aynı tarihte yaş toplamı T, büyükten küçük çıkarılarak belirlenen fark d ise bireysel yaşlar bulunur.

Koşullar: $T\geq d\geq0$; yaşlar aynı tarihe aittir. Tam sayı yaş isteniyorsa $T+d$ ve $T-d$ çift olmalıdır.

10. Yaş oranından yaşlara ulaşmak ve oranların değişmesi

İki kişinin bugünkü yaşları 5:2 oranında olsun. Bugün büyük olanın yaşı 5k, küçüğün yaşı 2k gösterilebilir. Altı yıl sonra büyük olanın yaşının küçüğün yaşının iki katı olacağı bilgisi $(5k+6)/(2k+6)=2$ eşitliğini verir. Paydanın sıfır olmaması ve yaşların pozitifliğiyle $5k+6=4k+12$, dolayısıyla $k=6$ bulunur. Bugünkü yaşlar 30 ve 12; altı yıl sonraki yaşlar 36 ve 18'dir. Kontrol $30/12=5/2$ ve $36/18=2$ eşitlikleridir.

Aynı örnekte yaş farkı 18 yıl olarak iki tarihte de korunur. Yaş oranları yıl geçtikçe değiştiği için “bugün 5:2 ise altı yıl sonra da 5:2” denilemez. Ayrıca oranlar doğrudan yaş miktarı değildir: 5:2 gösterimindeki 5 ve 2 değerleri, k ortak çarpanıyla birlikte gerçek yaşı verir. Oran bilgisi tek başına k'yi belirlemez; başka bir koşul gerekir.

Yaş oranında ortak katsayı ve zaman etkisi

Zaman	Büyük kişi	Küçük kişi	Oran
Bugün	5k=30	2k=12	5:2
6 yıl sonra	5k+6=36	2k+6=18	2:1
Yaş farkı	18	İki tarihte de 18	Oranla aynı şey değildir

11. Birden çok çocuğun toplam yaşı ile yetişkinin yaşı

Bir yetişkinin yaşını çocuklarının yaşları toplamıyla karşılaştırırken kişi sayıları farklıysa iki tarafın artış hızları da farklıdır. Örneğin bugün 54 yaşındaki bir babanın üç çocuğunun yaşları 9, 8 ve 7 olsun. Çocukların toplam yaşı 24'tür. t yıl sonra baba 54+t, çocukların toplamı 24+3t olur. Eşitlik 54+t=24+3t biçiminde kurulur; 30=2t ve t=15 bulunur. O tarihte baba 69, çocuklar sırasıyla 24, 23 ve 22 yaşındadır. Çocukların toplamı 24+23+22=69'dur; babanın yaşıyla eşitlik hem kişi kişi hem de toplam formülüyle kontrol edilir.

Çocuk sayısı üç olduğu hâlde çocukların bugünkü toplamına yalnız t eklenirse hata yapılır. Her çocuk ayrı ayrı t yıl yaşlanacağından toplam 3t artar. Genel olarak yetişkinin bugünkü yaşı A, n çocuğun bugünkü yaşları toplamı S ise gelecekte eşit olma koşulu A+t=S+nt'dir. n>1 olduğunda t=(A−S)/(n−1) bulunur; negatif t sonucu gelecekte değil geçmişte gerçekleşmiş olabilecek bir eşitliğe işaret eder. Geçmiş çözüm için çocukların o tarihte doğmuş olmaları ayrıca gerekir.

$$A+t=S+n\cdot t \Rightarrow t=(A-S)/(n-1)$$

Anlamı: Bir kişinin yaşı ile n kişinin yaşları toplamının eşit olacağı zaman hesaplanır.

Koşullar: n>1; aynı kişiler karşılaştırılan dönemde hayattadır; gelecek için t≥0. n=1 özel durumda iki kişinin yaş farkı sabit olduğundan eşitlik ancak başlangıç yaşları eşitse mümkündür.

Bir babayla üç çocuğunun yaş toplamı

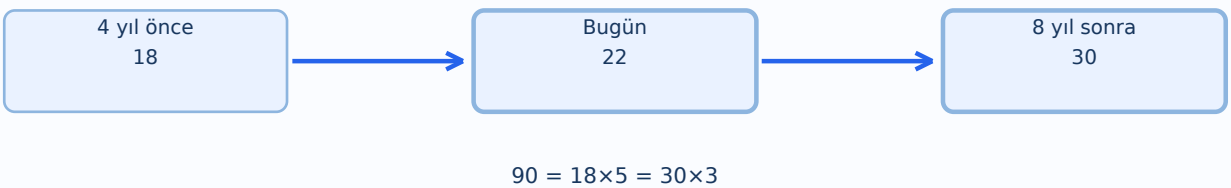
Zaman	Baba	Çocukların yaşları	Çocuklar toplamı
Bugün	54	9, 8, 7	24
15 yıl sonra	69	24, 23, 22	69
Artış miktarı	15	Her çocuk için 15	45

12. Bir kişinin farklı tarihlerdeki yaşlarını karşılaştırmak

Aynı kişinin geçmiş ve gelecekteki yaşları da birbiriyle oranlı ya da kat ilişkili verilebilir. “Sekiz yıl sonraki yaşın üç katı, dört yıl önceki yaşın beş katına eşittir” ilişkisinde bugünkü yaş x ise 3(x+8)=5(x−4) yazılır. Denklem 3x+24=5x−20, buradan 44=2x ve x=22 sonucunu verir. Dört yıl önceki yaş 18, sekiz yıl sonraki yaş 30'dur; 3·30=90 ve 5·18=90 eşitliği sonucu bağımsız biçimde doğrular.

Bu tür işlemlerde farklı tarihler arasındaki süre doğru hesaplanmalıdır: Dört yıl önceden sekiz yıl sonraya 12 yıl vardır ve bulunan yaşların farkı 30−18=12'dir. Parantezsiz 3x+8 yazımı “sekiz yıl sonraki yaşın üç katı” değil, “bugünkü yaşın üç katına sekiz ekleme” anlamına gelir. Kat ilişkisi hangi yaşın tamamına uygulanıyorsa parantez onu göstermelidir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

13. Doğum yılı, takvim yılı ve tamamlanmış yaş ayrımı

Matematiksel problemlerde yaşlar çoğu zaman yıl cinsinden sürekli değişen nicelikler gibi kullanılır. Oysa günlük kullanımda “25 yaşında” denildiğinde genellikle tamamlanmış yaş kastedilir; doğum günü gelmeden yeni yaşa geçilmiş sayılmaz. Örneğin 20 Kasım 2000 tarihinde doğmuş biri 29 Ekim 2026 tarihinde henüz 26. doğum gününü geçirmediğinden 25 yaşındadır. 12 Mayıs 2000 tarihinde doğmuş biri aynı 29 Ekim 2026 tarihinde 26 yaşındadır. Her iki kişinin doğum yılı aynıdır; tamamlanmış yaşları farklıdır.

Takvim yılı ile doğum yılının farkı, doğum günü bu yıl gerçekleşmişse tamamlanmış yaşı verir. Doğum günü henüz gelmemişse bundan bir çıkarılır. “2026 yılında 26 yaşına girecek” ifadesiyle “29 Ekim 2026 tarihinde 26 yaşında” ifadesi eşdeğer değildir. Problemin yalnız yıl numaralarını verdiği durumlarda doğum günü belirsizse kişinin tam olarak hangi yaşta olduğuna ilişkin tek değer çıkarılamayabilir. Ayrıntılı tarih verilmişse ay ve gün dikkate alınır; yaklaşık yaş yerine kesin tamamlanmış yaşın gerekli olup olmadığı belirtilir.

Aynı doğum yılına sahip kişilerin tamamlanmış yaşları

Doğum tarihi	Referans tarihi	Tamamlanmış yaş	Gerekçe
20 Kasım 2000	29 Ekim 2026	25	2026 doğum günü henüz gelmedi
12 Mayıs 2000	29 Ekim 2026	26	2026 doğum günü geçti
20 Kasım 2000	20 Kasım 2026	26	26. doğum günü gerçekleşti

14. Yaşın kesirli değerleri ve ölçüm hassasiyeti

Bir yaş probleminin cebirsel çözümünde 4,5 yıl veya 23,75 yıl gibi değerler ortaya çıkabilir. Bu sonuçlar, yaşın kesintisiz zaman olarak ölçüldüğü bir modelde anlamlıdır; fakat “tamamlanmış yaş kaçtır?” biçimindeki soruda doğrudan aynı şekilde raporlanamaz. Bir kişi doğumundan 4,5 yıl sonra dört yaşını tamamlamıştır ve beşinci yılını sürdürmektedir. Bu nedenle problem metninin tamamlanmış yaş mı, geçen tam yıl sayısı mı, yoksa kesintisiz süre mi kullandığı belirlenmelidir.

Örneğin bugün 18 ve 10 yaşındaki iki kişinin bugünkü yaş oranı 9/5'tir. Üç yıl sonra yaşlar 21 ve 13 olacağından oran 21/13 olur; onu en yakın tam sayıya yuvarlamak ilişkiyi bozar. Özellikle bir denklemde kesirli t değeri bulunduğunda “3,5 yıl sonra” ile “üç tam yıl sonra” aynı tarih değildir. Bununla birlikte ders kitabındaki genel yaş denklemleri, açıkça belirtilmedikçe tüm süreleri gerçek sayı olarak ele alır; günlük yaş hesabında kesin doğum tarihleri belirleyici olabilir.

> **Tamamlanmış yaş ve sürekli yaş** Yıl cinsinden cebirsel yaş ile günlük dildeki tamamlanmış yaş ayrı kavramlardır. Doğum tarihi bilinmiyorsa sadece doğum yılından belirli bir gündeki tamamlanmış yaş her zaman kesin bulunamaz. Kesirli yaş değerini rastgele tam sayıya yuvarlamak verilen eşitliği korumaz.

15. Gruba katılma veya gruptan ayrılma durumunda toplam ve ortalama

Toplam yaş ve yaş ortalamasının basit t ve nt kuralları aynı kişiler için geçerlidir. Üç kişinin bugün yaşları toplamı 90 olsun. Dört yıl sonra bu üç kişinin toplam yaşı 90+3·4=102 olacaktır. Bugün 25 yaşında olan kişi dört yıl sonra gruptan ayrılırsa çıkarılacak yaş 25 değil 29'dur. Geri kalan iki kişinin o günkü toplamı 102−29=73'tür. Kontrol olarak bugün diğer iki kişinin toplamı 90−25=65, dört yıl sonra toplamları 65+2·4=73'tür.

Aynı gün bugün 27 yaşında olan yeni bir kişi bu iki kişilik gruba katılırsa onun da dört yıl sonraki yaşı 31 olur. Yeni üç kişilik grubun toplamı 73+31=104, ortalaması 104/3 yıl olur. Eski grubun dört yıl sonraki ortalaması 102/3=34 yılken yeni grupta 104/3≈34,67 yıl bulunur. Üye değişimi nedeniyle ortalamanın yalnız “bugünkü ortalama artı dört” ile elde edilemeyeceği açıktır. Toplamların hesabında her kişi, tam olarak dâhil edildiği zaman noktasındaki yaşıyla değerlendirilmelidir.

Kişi değişen gruplarda toplam yaşın doğru izlenmesi

İşlem	Kişi sayısı	Yaş toplamı
Bugünkü başlangıç grubu	3	90
Aynı grubun 4 yıl sonraki durumu	3	102
O tarihte 29 yaşındaki üye ayrılır	2	73
O tarihte 31 yaşındaki yeni üye katılır	3	104

16. Yaş koşullarındaki eşitsizlikler, imkânsızlıklar ve son denetim

Yaş problemlerinde bulunan bilinmeyen, önce zaman yönü ve yaş sınırları bakımından incelenir. Bir kişinin bugünkü yaşı 3 ise “beş yıl önce kaç yaşındaydı?” biçiminde kurulacak 3−5=−2 sonucu, kişinin henüz doğmamış olduğu tarihe gider; negatif iki yaş diye yorumlanmaz. Bu tür veride geçmiş zaman kıyasının fiziksel olarak anlamı yoktur. Benzer biçimde büyüğün küçüğün iki katı olacağı yıl hesabında t negatif çıkarsa bu, gelecekte böyle bir tarih olmadığını ancak uygun bir geçmişte ilişkinin kurulabileceğini gösterir. Kişilerin geçmişte doğmuş olmaları ayrıca denetlenir.

Yaş farkı sabit olduğundan bugün yaşı büyük olan birinin gelecekte küçük kişiyle aynı yaşa geleceği iddiası doğru olamaz. Buna karşılık yaşların toplamının belirli bir eşiği ne zaman aşacağı eşitsizlikle gösterilebilir. Bugün yaşları 19, 23 ve 28 olan üç kişinin toplamı 70'tir. Aynı kişilerin yaş toplamının en az 100 olması için 70+3t≥100, buradan t≥10 yıl gerekir. t=10 için toplam 29+33+38=100, t=9 için 28+32+37=97'dir; sınırın neden 10 olduğu iki ayrı tarihle denetlenir. Eğer yalnız tam yıl sayıları kabul ediliyorsa en küçük uygun değer 10'dur.

Yaş problemlerinin tutarlılık kontrolü

Kontrol noktası	Doğru yaklaşım	Kaçınılacak hata
Zaman birliği	İki kişinin yaşını aynı tarihte karşılaştırma	Biri bugün, diğeri geçmişte kalması
Yaş farkı	Aynı kişiler için sabit fark	Farkın her yıl arttığını düşünme
Yaş toplamı	n kişi için n·t değişim	Toplamı yalnız t değiştirme
Yaş oranı	Yeni tarihte iki yaşa da t ekleme	Eski oranı aynı kabul etme
Geçmiş yaş	x−t≥0 sınırını denetleme	Doğumdan önce negatif yaş kullanma
Tamamlanmış yaş	Gerekiyorsa ay-gün inceleme	Doğum yılından tek başına kesin yaş çıkarma
Sonuç kontrolü	Yaşları ilk metindeki ilişkiye yerleştirme	Yalnız cebirsel sonucu yeterli sayma

Yaş modellerinde geçerlilik koşulları Bu bölümde kullanılan fark, toplam ve ortalama bağıntıları aynı kişiler, aynı referans tarihi ve aynı zaman birimi için geçerlidir. Geçmiş yaşların negatif olmaması, gelecek zamanın $t \geq 0$ koşulu, değişen grup üyeliği ve tamamlanmış yaşın takvimsel anlamı denetlenmelidir. Yaş farkı sabit kalırken yaş oranı genellikle değişir.

Yaş problemlerinin ortak çözüm mantığı, sözel ifadeyi bir tarih tablosunda düzenlemek, bilinmeyeni belirlemek ve her kişiyi belirtilen zamana doğru taşımaktır. Yaş farkı sabit kalır, aynı gruptaki toplam kişi sayısı kadar artar, yaş ortalaması ise geçen yıl kadar değişir. Oran ve kat ilişkileri ilgili tarihin yaşlarından kurulmalıdır. Böylece cebirsel sonuç, hem aritmetik eşitlikler hem de doğum ve zaman koşulları bakımından doğrulanabilir.

KONU 3.3

İŞÇİ, HAVUZ VE İŞ-ZAMAN PROBLEMLERİ

İşçi, havuz ve iş-zaman problemleri; belirli bir işin, dolumun veya boşaltımın zaman içinde hangi hızla ilerlediğini ve birden fazla etken birlikte çalıştığında toplam sonucun nasıl değiştiğini inceler. Bu problem türlerinde temel büyüklük, yalnız tamamlanma süresi değil, birim zamanda yapılan iş miktarıdır. Bir işi tek başına on saatte bitiren kişi saatte işin onda birini yaparken, aynı işi beş saatte bitiren kişi saatte beşte birini yapar. Daha kısa tamamlama süresi, aynı iş ve sabit koşullarda daha yüksek üretim hızı anlamına gelir.

İşçi problemlerindeki üretim, havuz problemlerindeki dolum ve boşaltım matematiksel olarak aynı birikim modeline dayanır. Ancak işin büyüklüğü, işçilerin verimliliği, çalışma saatleri, muslukların açık kaldığı süre ve başlangıçtaki doluluk gibi koşullar açıkça belirlenmelidir. Birden fazla hızın toplanması ancak aynı işi, aynı zaman biriminde ve birbiriyle uyumlu koşullarda tarif etmeleri hâlinde doğrudur. Bu bölümde önce ortak model açıklanacak, ardından işçi ve havuz durumlarının kendine özgü ayrımları öğretici işlemlerle gösterilecektir.

1. İş, zaman ve birim zamandaki üretim arasındaki ilişki

Bir işin tamamı W iş birimi, işin yapılma hızı r iş birimi/saat ve çalışma süresi t saat olsun. Hızın sabit kaldığı sürede yapılan iş $r \cdot t$ kadar, tamamlanma koşulu ise $r \cdot t = W$ biçimindedir. Bir işin fiziksel büyüklüğü verilmediğinde bütün iş 1 kabul edilir. Bu durumda r, saatte tamamlanan işin kesrini gösterir. Bir işçi bütün işi tek başına T saatte bitiriyorsa saatte $1/T$, t saatte t/T kadar iş yapar. Süre ve bitirme süresinin aynı birimle yazılması zorunludur.

Örneğin tek başına 12 saatte biten bir işte, işçi beş saat çalıştığında işin $5/12$'sini tamamlar; kalan $7/12$'dir. Aynı hızla yedi saat daha çalışıldığında $7/12$ daha ilerlenir ve toplam $(5+7)/12=1$ olur. Bu ters kontrol, yalnız bir kesrin hesaplanmasını değil, geçen süre ile yapılan iş arasındaki uygunluğu da gösterir. İşin tamamı 240 parça olarak belirtilseydi saatlik üretim $240/12=20$ parça/saat, beş saatlik üretim 100 parça olurdu. Oransal sonuç $100/240=5/12$ ile aynıdır.

Yapılan iş = hız × süre; $r=W/T$; $W=1$ seçildiğinde $r=1/T$ ve t sürede yapılan pay $=t/T$

Anlamı: Sabit hızla yapılan iş, çalışma süresiyle doğru orantılıdır; bir işin tamamı istenirse 1 birim olarak modellenebilir.

Koşullar: $T>0$ ve zaman birimleri aynı olmalıdır. İşin tamamının 1 kabul edilmesi, fiziksel miktarların yok sayılması değil, ortak ölçeğe dönüştürülmesidir.

Tek bir çalışanın sabit hızla tamamladığı iş

Çalışma süresi	Yapılan işin payı	Kalan işin payı
0 saat	0	1
3 saat	3/12=1/4	3/4
5 saat	5/12	7/12
9 saat	9/12=3/4	1/4
12 saat	1	0

2. İşin bir parçasını yapma süresinden tamamlama süresini bulmak

Bazen bir çalışanın bütün işi kaç saatte bitirdiği değil, işin belirli bir kısmını ne kadar sürede yaptığı bilinir. Sabit hızda önce birim üretim hesaplanır. Bir işçinin işin 3/8'ini altı saatte yaptığı kabul edilsin. Saatte yaptığı iş (3/8)/6=3/48=1/16'dır; bütün işi tek başına 16 saatte bitirir. Geriye kalan 5/8'lik kısım için gereken süre (5/8)/(1/16)=10 saattir. İlk altı saatle birlikte toplam 16 saat elde edilir; bu, ilk bulunan tamamlama süresini bağımsız olarak doğrular.

Bu örnekte altı saatte işin 3/8'inin bitmesi, kalan 5/8'in mutlaka altı saat daha süreceği anlamına gelmez. Sabit üretim hızında süre, kalan işin büyüklüğüyle doğru orantılıdır. “İşin yarısını yaptığı süre” ile “bütün işi bitirme süresi” arasında da ancak hız sabitse iki kat ilişkisi kurulur. Çalışma hızının zamanla arttığı veya azaldığı açıkça belirtilmişse her dönem ayrı incelenmelidir.

$$r=p/t;\ \text{bütün işin süresi } T=t/p;\ \text{kalan } (1-p) \text{ işin süresi } (1-p)/r$$

Anlamı: p oranındaki işi t sürede yapanın birim hızı p/t'dir; tamamlama süresi bu hızın tersidir.

Koşullar: $0<p\le 1$, $t>0$ ve hız ilgili dönemlerde sabittir. Birim iş ile fiziksel miktar karıştırılmamalıdır.

3. İki işçinin aynı anda çalışması ve hızların toplanması

Bir işi A işçisi tek başına a saatte, B işçisi tek başına b saatte tamamlasın. Her ikisi aynı işte birbirini engellemeden ve sabit hızla çalışıyorsa bir saatte birlikte 1/a+1/b kadar iş yaparlar. İşin tamamını birlikte bitirecekleri süre t için t(1/a+1/b)=1 yazılır. Buradan t=ab/(a+b) elde edilir. Bu bağıntı bir ezber kuralından değil, birlikte yapılan saatlik iş payının toplamından türetilir.

Örneğin A'nın tek başına on, B'nin tek başına on beş saatte bitirdiği işi birlikte tamamlamaları altı saat sürer. A saatte 1/10, B saatte 1/15 iş yaptığından toplam hız 1/10+1/15=(3+2)/30=1/6 iş/saattir. Altı saatte A işin 6/10=3/5'ini, B ise 6/15=2/5'ini tamamlar; toplam 1 olur. Bu payların ayrı hesaplanması sonucun bağımsız denetimidir. Birlikte çalışma süresinin her iki tek başına çalışma süresinden kısa olması da pozitif hızların toplanmasıyla uyumludur.

$$1/t=1/a+1/b;\ t=ab/(a+b)$$

Anlamı: İki bağımsız ve sabit üretim hızı aynı anda çalıştığında toplanır.

Koşullar: $a>0$, $b>0$; aynı işin tamamı esas alınmalı, eş zamanlı çalışılmalı ve hızlar birbirini etkilememelidir.

İki işçinin birlikte yaptığı altı saatlik işin dağılımı

İşçi	Tek başına bitirme süresi	Saatlik hız	Altı saatte yaptığı iş
A	10 saat	1/10 iş/saat	3/5
B	15 saat	1/15 iş/saat	2/5
Birlikte	6 saat	1/6 iş/saat	1

4. Birlikte bitirme süresinin kesirli çıkması ve zaman dönüşümü

Birlikte tamamlama süresi her zaman tam saat veya tam gün değildir. A'nın işi 12 saatte, B'nin ise 18 saatte bitirdiği durumda saatlik toplam hız 1/12+1/18=(3+2)/36=5/36'dır. Tamamlanma süresi 1/(5/36)=36/5=7,2 saattir. Ondalık kısım olan 0,2 saat, 0,2·60=12 dakika olduğundan süre 7 saat 12 dakikadır; “7 saat 20 dakika” değildir.

İki çalışanın 7,2 saatte ürettiği iş ayrı ayrı hesaplanabilir: A, (36/5)/12=3/5; B, (36/5)/18=2/5 kadar iş yapar. Toplam bir bütündür. Kesirli süre günlük üretim modellerinde de mümkündür; ancak çalışma yalnız tam günlerle sınırlandırılmışsa fiziksel takvim ve vardiya sonu gibi ek koşullar sonuç yorumuna katılmalıdır. Süreyi ondalıktan dakikaya dönüştürmeden yaklaşık tam saate yuvarlamak, bitiş anını yanlış belirleyebilir.

Ondalık saat ile saat-dakika gösterimi

Ondalık süre	Kesirli kısmın dakika karşılığı	Saat-dakika
7,2 saat	0,2·60=12 dakika	7 saat 12 dakika
4,5 saat	0,5·60=30 dakika	4 saat 30 dakika
2,25 saat	0,25·60=15 dakika	2 saat 15 dakika
1,75 saat	0,75·60=45 dakika	1 saat 45 dakika

5. Birlikte çalışmanın ardından bir işçinin tek başına devam etmesi

Bütün süreç boyunca aynı işçilerin çalışmadığı durumlarda tek bir ortak hız bütün zamana uygulanamaz. A'nın işi sekiz saatte, B'nin on iki saatte bitirdiğini düşünelim. Birlikte üç saat çalışırlarsa saatlik hızları 1/8+1/12=5/24, üç saatlik toplam üretimleri 3·5/24=5/8 olur. İşin 3/8'i kalır. B ayrıldıktan sonra A tek başına devam ederse, kalan iş için (3/8)/(1/8)=3 saat daha gerekir. Başlangıçtan itibaren toplam süre 3+3=6 saattir.

Ters kontrolde A toplam altı saat çalıştığı için 6/8=3/4, B yalnız ilk üç saatte 3/12=1/4 iş yapmıştır. 3/4+1/4=1 eşitliği başlangıçtaki işin tamamlandığını gösterir. Burada A'nın altı saatte işin dörtte üçü, B'nin üç saatte dörtte biri yapmış olması, ilk dönemin ortak hız hesabıyla da uyuşur.

$$\text{Tamamlanan iş} = \Sigma \text{ (her dönemin toplam hızı} \times \text{dönem süresi)}$$

Anlamı: Ekip bileşimi veya hız değişiyorsa her zaman aralığı ayrı bir iş payı üretir; dönem payları toplanır.

Koşullar: Dönemlerde süre ve hız birimleri aynı olmalı; aynı iş parçası iki kez sayılmamalı; toplam tamamlanma için bütün paylar 1 olmalıdır.

6. Bir işçinin daha sonra katılması ve başlangıç anı

Bir işçi çalışmaya başladığında diğeri belirli bir süre sonra katılıyorsa toplam geçen zaman ile birlikte çalışma süresi farklıdır. A tek başına altı saatte, B tek başına dokuz saatte bir işi bitirsin. A iki saat yalnız çalışırsa işin 2/6=1/3'ünü tamamlar. Kalan 2/3'lük işi ikisi birlikte saatte 1/6+1/9=5/18 hızla yapar. Gerekli ortak çalışma süresi (2/3)/(5/18)=12/5=2,4 saattir. A'nın işe başlamasından son bitişe kadar geçen süre 2+2,4=4,4 saat, yani 4 saat 24 dakikadır.

Bağımsız denetimde A toplam 4,4 saat çalışarak (22/5)/6=11/15; B yalnız 2,4 saat çalışarak (12/5)/9=4/15 iş yapmıştır. Paylar toplamı 1'dir. B'nin çalışma süresi 4,4 saat sayılsaydı birinci dönemde henüz çalışmadığı iki saat de kendisine yazılmış olurdu. Bu hata, ortak zaman çizelgesi çizilerek önlenir.

Sonradan katılımda zaman çizelgesi

Dönem	Çalışanlar	Süre	Yapılan iş
İlk dönem	Yalnız A	2 saat	1/3
İkinci dönem	A ve B	12/5 saat	2/3
Toplam	A toplam 22/5 saat, B 12/5 saat	22/5 saat	1

7. İşçilerin hız oranları ve çalışma sürelerinin ters ilişkisi

İki işçi aynı büyüklükteki işi farklı hızlarda yapıyorsa bitirme süreleri hızlarla ters orantılıdır. A'nın hızı B'nin hızının 3/2 katıysa, A aynı süre içinde B'nin yaptığı işin 3/2 katını yapar; fakat aynı işi bitirmek için B'nin süresinin 2/3'ü kadar süreye ihtiyaç duyar. Hız oranı doğrudan süre oranı gibi kullanılırsa terslik kaybolur.

Örneğin A'nın hızı B'ninkinin 3/2 katı ve ikisinin birlikte bitirme süresi altı saat olsun. B'nin saatlik hızı r kabul edilirse A'nın hızı 3r/2 olur. Toplam 5r/2=1/6 eşitliğinden r=1/15 bulunur. Böylece B'nin tek başına bitirme süresi 15, A'nın ise 10 saattir. Kontrol olarak 1/10+1/15=1/6'dır. Aynı işi iki kat hızlı yapan bir kişinin bitirme süresi yarıya düşer; ancak birlikte çalışırken işçi sayısının iki katına çıkması, verim koşulları değişiyorsa süreyi zorunlu olarak yarıya düşürmez.

> Aynı iş için hız_A/hız_B = süre_B/süre_A
>
> **Anlamı:** Sabit büyüklükteki işte hız artarken tek başına bitirme süresi aynı oranda azalır.
>
> **Koşullar:** İşin büyüklüğü iki işçi için aynı, hızlar pozitif ve karşılaştırma boyunca sabittir.

8. İşçi sayısı, günlük çalışma süresi ve verimlilik

Eşit verimli işçilerin birlikte yaptığı iş, çalışan kişi sayısı, günlük çalışma saati, gün sayısı ve kişi başına saatlik üretim hızının çarpımına bağlıdır. Kişi başına hız sabitse aynı iş için işçi sayısı ile bitirme süresi ters orantılıdır. Fakat günlük çalışma saati değiştiğinde yalnız işçi sayıları üzerinden oran kurmak yeterli değildir. İşçi-saat, bir işçinin bir saat çalışmasına karşılık gelen çalışma miktarını gösterir; işin ne kadar üretildiğini değerlendirmek için birim işçi-saatteki verim de sabit olmalıdır.

Altı eş verimli işçinin günde sekiz saat çalışarak on günde tamamladığı bir iş 6·8·10=480 işçi-saatlik emek gerektirir. Aynı verimle sekiz işçi günde altı saat çalışırsa günlük 8·6=48 işçi-saat üretir ve iş 480/48=10 günde tamamlanır. İşçi sayısının artması, günlük toplam çalışma saati aynı kaldığından süreyi azaltmamıştır. Bağımsız hesapla her iki düzen de 48 işçi-saat/gün sağlar. Aynı sekiz işçinin kişi başına saatlik verimi %25 artarsa günlük üretim eski verimle 8·6·1,25=60 işçi-saat eşdeğeridir; iş sekiz günde biter. Verim değiştiği için önceki on günlük sonuç doğrudan kullanılamaz.

$$W=n\cdot h\cdot d\cdot v;\ \text{aynı iş için } n_1h_1d_1v_1=n_2h_2d_2v_2$$

Anlamı: n işçi sayısı, h günlük kişi başına saat, d gün, v bir işçinin saatlik üretimi, W toplam iş miktarıdır.

Koşullar: Eş verimli çalışanlar varsayılmıştır; v ve günlük saatler dönemde sabit olmalı, işçi sayısı ve vardiya düzeni gerçek koşullarla uyumlu olmalıdır.

Aynı işin farklı personel ve verim düzenlerinde yapılması

Çalışan	Günlük kişi başına süre	Göreli verim	Günlük eşdeğer işçi-saat	Toplam gün
6 işçi	8 saat	1	48	10
8 işçi	6 saat	1	48	10
8 işçi	6 saat	1,25	60	8

9. Üç veya daha fazla çalışanın birlikte üretimi

Eş zamanlı çalışanların sayısı arttığında genel ilke değişmez: Her birinin aynı işin ne kadarını bir zaman biriminde yaptığı toplanır. Bir işi tek başına sırasıyla 12, 15 ve 20 saatte tamamlayan üç işçinin saatlik hızları 1/12, 1/15 ve 1/20'dir. Ortak payda 60 alınırsa toplam (5+4+3)/60=12/60=1/5 iş/saattir. İşin tamamı beş saatte biter. Bu sürede üç işçinin payları sırasıyla 5/12, 1/3 ve 1/4'tür. Paydası 12 olan son toplam 5/12+4/12+3/12=1'dir.

İşçilerden birinin hızının negatif olduğunu varsaymak, onun başka birinin tamamladığı işi bozduğu veya geri aldığı özel bir modelde anlamlı olabilir. Normal işçi sorularında çalışan herkes işi ilerletir; yalnız birinin yavaş olması negatif üretim yaptığı anlamına gelmez. Bu yüzden işçi hızları için eksi işareti ancak metinde açıkça bir geri alma veya bozma etkisi tanımlandığında kullanılır.

$$r_{toplam}=r_1+r_2+\ldots+r_n;\ \text{sabit ortak hızda } t=1/r_{toplam}$$

Anlamı: Aynı büyüklükteki işin tamamı 1 alındığında bağımsız katkılar birim zamanda toplanır.

Koşullar: Her r_i iş/saat gibi ortak birimdedir; birlikte çalışma süresi ortaktır; fiziksel olarak engelleme veya verim kaybı yoksa toplamsal model uygulanır.

10. Havuz problemlerinde dolum ve boşaltım hızları

Bir havuzun tamamı 1 hacim birimi kabul edilebilir. Bir musluk boş havuzu tek başına a saatte dolduruyorsa saatte 1/a kadar pozitif dolum sağlar. Dolu havuzu b saatte boşaltan gider ise saatte 1/b kadar azaltıcı etki yapar. Aynı anda açık iki dolum musluğu ile bir giderin net hızı 1/a+1/c−1/b şeklindedir. Burada eksi işareti, giderin suyu havuzdan çıkarmasından kaynaklanır. Gider, dolu havuzu boşaltabildiği sürece debisi negatif kabul edilen bir akış gibi modellenir; muslukların aynı su hacminde aynı anda çalışması gerekir.

Örneğin birinci musluk boş havuzu on saatte, ikinci musluk on beş saatte dolduruyor; gider dolu havuzu otuz saatte boşaltıyor olsun. Üçü birlikte çalışınca net hız 1/10+1/15−1/30=(3+2−1)/30=4/30=2/15 havuz/saattir. Başlangıçta boş olan havuzun dolması (1)/(2/15)=15/2=7,5 saat sürer. Bu sürede iki giriş sırasıyla 3/4 ve 1/2 havuz kadar su verir; gider 1/4 havuz kadar su boşaltır. 3/4+1/2−1/4=1 kontrolü, net toplamın gerçekten bir havuz olduğunu gösterir.

$$r_{net}=\Sigma(1/\text{dolum süreleri})-\Sigma(1/\text{boşaltım süreleri});\ t=(1-\text{başlangıç doluluk payı})/r_{net}$$

Anlamı: Dolum pozitif, boşaltım negatif hızla aynı havuzun doluluk payını değiştirir.

Koşullar: Süreler pozitif, debiler sabit, hız birimleri aynı ve hedef başlangıç doluluğundan büyük olmalıdır. Hedefe doğru dolabilmek için $r_{net}>0$ gerekir.

Aynı anda açık iki dolum ve bir boşaltım musluğu

Etken	Tek başına bütün havuz süresi	Saatlik doluluk değişimi	7,5 saatte net katkı
Dolum A	10 saat	+1/10	+3/4
Dolum B	15 saat	+1/15	+1/2
Gider	30 saat	−1/30	−1/4
Net	7,5 saat	+2/15	+1

11. Net hızın sıfır veya negatif olması

Havuzun dolması için içeri giren suyun hızının dışarı çıkan suyun hızından büyük olması gerekir. Net hız sıfırsa doluluk değişmez; başlangıçta boş olan havuz, aynı koşullarla ne kadar beklenirse beklensin dolmaz. Net hız negatifse su seviyesi düşme eğilimindedir. Boş havuzda su seviyesi sıfırın altına inemediğinden yalnız bu negatif değere bakarak “eksi saatte dolma” yorumu yapılamaz. Dolum süresini $1/r_{net}$ biçiminde hesaplarken r_{net}'in pozitif olup olmadığı önce kontrol edilmelidir.

Bir dolum musluğu havuzu 12 saatte doldururken gider 18 saatte boşaltıyorsa net hız $1/12-1/18=(3-2)/36=1/36$'dır. Birlikte açık olduklarında boş havuz 36 saatte dolar. Giderin dolumdan çok daha hızlı olması durumunda örneğin dolum 12, gider 6 saatte bütün havuza denk debideyse net $1/12-1/6=-1/12$ olur; boş havuzun dolması mümkün değildir. Bu modelde bir havuzun başlangıçta su barındırması hâlinde net hız negatifse boşalma süresi ayrıca hesaplanabilir.

Net hızın anlamı Dolum ve boşaltım aynı havuza ait sabit debiler olarak ele alınır. Net hız sıfır veya negatifse başlangıçta boş havuzun dolmasına ilişkin pozitif bir bitirme süresi yoktur. Boşaltım, havuz boşaldıktan sonra doluluk payını eksiye indirmez. Giriş ve çıkış hızları yalnız açık oldukları dönemlerde hesaba katılır.

12. Başlangıçta kısmen dolu havuz ve kalan kapasite

Havuz başlangıçta boş değilse hesaplanması gereken iş, bütün havuz değil, hedef dolulukla mevcut doluluk arasındaki farktır. Havuz başlangıçta 1/4 dolu olsun. Bir giriş onu tek başına 12 saatte doldurabilecek, bir gider dolu havuzu 24 saatte boşaltabilecek sabit debide olsun. Net hız $1/12-1/24=1/24$ havuz/saattir. Dolması gereken kısım $1-1/4=3/4$ olduğundan gereken süre $(3/4)/(1/24)=18$ saattir.

Denetim olarak 18 saatte musluktan $18/12=3/2$ havuz kadar su girer; gider $18/24=3/4$ havuz kadar su çıkarır. Başlangıçtaki 1/4 ile birleştiğinde $1/4+3/2-3/4=1$ tam doluluk bulunur. Bir süreçte havuza bütün kapasitesinden fazla su girmesi yanlış değildir; aynı anda su boşaldığı için depodaki net miktar bir havuzla sınırlı kalır. Başlangıçta yarı dolu bir havuz için doğrudan tam dolum süresini kullanmak, kalan kapasiteyi ihmal etmek olur.

Kısmen dolu havuzun 18 saatlik bilançosu

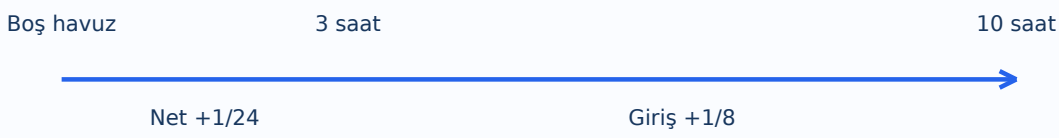
Doluluk bileşeni	Havuz cinsinden pay	Yorum
Başlangıç	1/4	Önceden bulunan su
Giriş	+3/2	18 saatte giren toplam su
Çıkış	−3/4	18 saatte çıkan toplam su
Son durum	1	Tam dolu havuz

13. Muslukların farklı anlarda açılması ve kapanması

Bir havuzda muslukların açık olduğu süreler farklıysa işçi problemlerindeki dönem mantığı aynen geçerlidir. Boş bir havuzu sekiz saatte dolduran giriş ile dolu bir havuzu on iki saatte boşaltan gider birlikte üç saat çalışsın. Bu dönemde net hız 1/8−1/12=1/24; üç saatte dolan kısım 3/24=1/8 olur. Ardından gider kapatılırsa yalnız giriş çalışır. Kalan 7/8'lik kısım 1/8 havuz/saat hızla yedi saatte dolar. Başlangıçtan itibaren toplam süre 3+7=10 saattir.

Bağımsız kontrolde giriş toplam on saat boyunca açık kalıp 10/8=5/4 havuz kadar su vermiş; gider yalnız ilk üç saat açık kalıp 3/12=1/4 havuz kadar su çıkarmıştır. Net 5/4−1/4=1 havuzdur. Musluğun açık kalma sürelerini eşitlemeden yapılan bu iki yönlü kontrol, döneme özgü hızların korunmasını sağlar. Musluklardan biri ancak belirli bir doluluk düzeyinde açılıyorsa dönem sınırına ulaşma süresi de önce hesaplanmalıdır.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

14. Havuz kapasitesi litre veya metreküp olarak verildiğinde

Havuzun fiziksel kapasitesi biliniyorsa bütün işi 1 seçmek yerine doğrudan hacim cinsinden hesap yapmak da mümkündür. Kapasitesi 600 litre olan bir depoya saatte 90 litre su girerken aynı anda 30 litre su çıkıyorsa net dolum 90−30=60 litre/saattir. Depo boşsa 600/60=10 saatte, başlangıçta 200 litre su varsa (600−200)/60=400/60=20/3 saatte, yani 6 saat 40 dakikada dolar. Sonucun geri kontrolü 200+60·(20/3)=600 eşitliğidir.

Aynı hesabı bütün kapasite 1 alınarak yapmak da mümkündür. 90 litre/saat giriş 90/600=3/20 havuz/saat; 30 litre/saat çıkış 30/600=1/20 havuz/saat; net hız 1/10 havuz/saattir. Başlangıç doluluğu 200/600=1/3, kalan kısım 2/3'tür. Süre (2/3)/(1/10)=20/3 saat olur. İki modelin aynı sonucu vermesi, litre ve havuz payı yöntemlerinin eşdeğerliğini gösterir. Litre/saat ile metreküp/dakika gibi farklı birimler doğrudan çıkarılamaz; önce ortak birim seçilir.

$$\text{Süre} = (\text{hedef hacim} - \text{başlangıç hacmi})/(\text{toplam giriş debisi} - \text{toplam çıkış debisi})$$

Anlamı: Fiziksel hacimle çalışıldığında net debi, hedefe ulaşmak için gerekli hacme bölünür.

Koşullar: Hacimler aynı birimde, debiler aynı hacim/zaman biriminde, net debi pozitif olmalıdır. Sabit debi ve taşma olmaması varsayılır.

15. Birlikte tamamlama süresinden bilinmeyen çalışanın hızını bulmak

Bazen tek başına bitirme sürelerinden biri bilinmez; birlikte çalışma süresiyle diğer çalışanın süresi verilir. A tek başına on saatte bitirdiği bir işi B ile birlikte altı saatte tamamlasın. A'nın saatte yaptığı iş 1/10, ikisinin toplam yaptığı iş 1/6 olduğundan B'nin hızı $1/6 - 1/10 = (5-3)/30 = 1/15$'tir. B aynı işi tek başına 15 saatte tamamlar. Bağımsız kontrol için B'nin altı saatlik payı $6/15 = 2/5$, A'nın payı $6/10 = 3/5$'tir; toplamları 1'dir.

Burada sürelerin doğrudan farkını almak, yani $10 - 6 = 4$ saati B'nin tek başına süresi saymak yanlıştır. Çıkarılan nicelik süre değil, ortak birim zamandaki iş oranıdır. B'nin pozitif hızda çalışan bir kişi olduğu kabul ediliyorsa ortak bitirme süresi A'nın tek başına süresinden kısa olmalıdır. Eşit veya daha uzun süre verilmişse işbirliğini yavaşlatan etki, değişen verim veya metindeki başka bir koşul incelenmeden olumlu bir B hızı çıkarılamaz.

$$1/b = 1/t - 1/a;\ b = at/(a-t)$$

Anlamı: Toplam hızdan bilinen A hızının çıkarılması, B'nin saatlik hızını verir.

Koşullar: Bağımsız pozitif hızlar ve aynı iş için $a > t > 0$ gerekir. $a = t$ ise B'nin katkısı sıfırdır; $a < t$ ise yalın pozitif işçi modeliyle çelişir.

16. Verim değişikliği, vardiya ve dönemsel üretim

Bir çalışan işin ortasında hızını artırabilir ya da azaltabilir; iş miktarının zamana göre değişimini bu durumda tek bir T değeriyle hesaplamak hatalı olur. Başlangıç hızında işi tek başına 12 saatte bitirebilen bir çalışan ilk üç saatte $3/12 = 1/4$ iş yapmış olsun. Daha sonra saatlik üretimini iki katına çıkarırsa yeni hızı $2/12 = 1/6$ iş/saattir. Kalan $3/4$ işin tamamlanması $(3/4)/(1/6) = 9/2 = 4{,}5$ saat sürer. İş toplam $3 + 4{,}5 = 7{,}5$ saatte biter.

Ters hesap ilk üç saatin 1/4, sonraki 4,5 saatin $4{,}5/6 = 3/4$ iş ürettiğini gösterir. İlk çalışma hızı 1/12, sonraki hız 1/6 olduğundan iki dönemi tek bir ortalama süreyle birleştirmek için iş ağırlıklı hesap gerekir. Günlük çalışma saatleri veya vardiyalar değişiyorsa “bir günde yapılan iş” hızı da aynı varsayılamaz. Örneğin günde altı saat çalışan bir personelin saatlik hızı biliniyorsa dört gün sonunda toplam çalışma süresi 24 saattir; yalnız dört sayısı saatlik hızla çarpılamaz.

Hızı değişen tek işçinin çalışma bilançosu

Dönem	Saatlik hız	Süre	Yapılan iş
İlk dönem	1/12	3 saat	1/4
Hız iki katına çıktıktan sonra	1/6	4,5 saat	3/4
Toplam	Dönemlere göre değişken	7,5 saat	1

17. Ardışık değil dönüşümlü çalışan ekipler

Çalışanların aynı anda değil sırayla görev aldığı bir işte yalnız fiilen çalıştıkları süre kadar katkıları bulunur. A tek başına sekiz saatte, B on iki saatte bir işi tamamlayabilsin. A iki saat çalışırsa işin 2/8=1/4'ünü, ardından B üç saat çalışırsa 3/12=1/4'ünü yapar. Böylece beş saat sonunda işin yarısı bitmiştir. Sonrasında ikisi birlikte çalışırsa saatlik toplam hız 1/8+1/12=5/24 olur; kalan 1/2 iş için (1/2)/(5/24)=12/5=2,4 saat gerekir. Başlangıçtan toplam 7,4 saat, yani 7 saat 24 dakika geçmiştir.

Bağımsız kontrolde A toplam 2+2,4=4,4 saat, B toplam 3+2,4=5,4 saat çalışmıştır. Katkılar sırasıyla 4,4/8=11/20 ve 5,4/12=9/20 olup toplam 1'dir. Bu örnek, birlikte çalışma sürelerini ve dönüşümlü çalışma sürelerini ayırmadan doğrudan toplam hız kullanmanın neden yanlış olduğunu gösterir. Sıralama, çalışanların yaptığı iş payını değiştirmeyebilir; fakat hangi saatte işin tamamlanacağı ve kimin ne kadar çalıştığı dönemlere bağlıdır.

18. Matematiksel modelin sınırları ve bağımsız sonuç denetimi

İş ve havuz problemlerinin çoğu sabit hız kabulüne dayanır. Gerçek bir ekipte işin bazı aşamalarında bekleme, çalışma alanı sınırlaması, ekip üyelerinin birbirini engellemesi, işin yeniden yapılması veya günlük mesai sınırı bulunabilir. Bir muslukta basınç değişikliği, havuz kesitinin değişimi, doluluğa bağlı otomatik vana veya dolduktan sonra taşma gibi durumlar da sabit debi modelini bozabilir. Metinde böyle bir bilgi yer almıyorsa standart model kullanılır; ancak bunun varsayım olduğu bilinmelidir. Tamamlanan iş payı genel modelde 1'i aşmışsa işin bitiş anı daha önce gerçekleşmiştir ve sonraki üretimin aynı işi tamamlama bakımından özel olarak yorumlanması gerekir.

İşçi-havuz problemlerinde güvenilir denetim dört aşamadan oluşur: İlk olarak bütün işin 1 mi yoksa parça/litre gibi fiziksel miktar mı seçildiği kontrol edilir; ikinci olarak bütün hızlar ortak zaman birimine dönüştürülür; üçüncü olarak her etkenin yalnız gerçekten çalıştığı süreye ait katkısı hesaplanır; son olarak başlangıç miktarıyla net katkı toplanarak hedefe gerçekten ulaşılıp ulaşılmadığı değerlendirilir. Pozitif işçi hızları toplanır, azaltıcı çıkışlar çıkarılır; tek başına bitirme süresi ile birim üretim hızı ters büyüklüklerdir. Bu kontrol yöntemi, bir sayı olarak doğru görünen fakat metindeki zaman ve çalışma koşullarını karşılamayan sonuçları ayırt etmeye yardımcı olur.

İş-zaman ve havuz problemlerinde model kontrolü

Kontrol başlığı	Doğru değerlendirme	Yaygın hata
İş büyüklüğü	Aynı işin payı veya ortak fiziksel birim	Farklı iş büyüklüklerinin hızını toplama
Hız ve süre	Saatlik hız ile saat, günlük hız ile gün	Saatlik hızla doğrudan gün sayısını çarpma
Birlikte çalışma	Aynı anda çalışanların hızları toplanır	Tek başına bitirme sürelerini toplama
Dönemler	Her işçinin aktif olduğu süre ayrı tutulur	Tüm çalışanları baştan sona aktif sayma
Havuz çıkışı	Boşaltma hızı net dolumdan çıkarılır	Gideri pozitif dolum kabul etme
İlk doluluk	Yalnız hedefe kalan miktar doldurulur	Kısmen dolu havuzu boş varsayma
Bitirme koşulu	Tamamlanan net iş payı 1 olur	Negatif veya sıfır net hızdan pozitif bitirme süresi türetme
Sonuç kontrolü	Her etkenin katkısını ters yöntemle toplama	Yalnız ilk denklemin sonucuyla yetinme

Birim hız ilkesi Tek başına bitirme süresi ile birim zamandaki üretim birbirinin tersidir. Aynı işi eş zamanlı ilerleten bağımsız hızlar toplanır; boşaltma veya geri alma etkileri çıkarılır. Başlangıç miktarı, aktif çalışma süreleri ve net hızın işareti dikkate alınmadan bitiş süresi belirlenemez. Sayısal sonuç, fiziksel çalışma ve zaman koşullarına da uygun olmalıdır.

Sonuç olarak işçi, havuz ve iş-zaman problemlerinde ortak yöntem, bütün işi uygun bir birime dönüştürüp sabit dönemlerin üretim hızlarını doğru kurmaktır. Bir kişinin işin ne kadarını yaptığı, ekibin birlikte ne kadar sürede bitirdiği, sonradan katılan çalışanın katkısı ve bir havuzun giriş-çıkış dengesi aynı hız × zaman ilişkisinin farklı yorumlarıdır. Hesaplamada en önemli ayrımlar, hız ile bitirme süresini karıştırmamak, ortak birimleri korumak, değişen koşulları dönemlere ayırmak ve sonucun gerçekten hedeflenen iş veya hacmi tamamladığını bağımsız biçimde doğrulamaktır.

KONU 3.4

HIZ, HAREKET VE YOL PROBLEMLERİ

Hız, hareket ve yol problemleri; bir hareketlinin belirli bir sürede ne kadar yol aldığını, aynı güzergâhı farklı hızlarla ne kadar zamanda tamamladığını ve birden fazla hareketlinin ne zaman karşılaşıp birbirine yetiştiğini matematiksel olarak açıklar. Görünüşte yalnız yol, hız ve zaman arasında üç değişkenli bir ilişki bulunsa da problem çözümünün asıl güçlüğü çoğu kez birimlerin, hareket yönünün, başlangıç anının, duraklamaların ve yolun hangi bölümünün kastedildiğinin doğru yorumlanmasındadır. Özellikle “ortalama hız”, “toplam yol”, “başlangıç uzaklığı” ve “karşılaşma süresi” kavramları aynı biçimde kullanılmaz.

Bu bölümde temel model sabit süratle hareket eden kişi, araç veya benzeri bir hareketlidir. Hız günlük matematik problemlerinde genellikle yönü belirtilmeyen yol alma süratini anlatır; fiziksel anlamda yönlü hız ve yer değiştirme ayrımı ise ayrıca gösterilecektir. Araçların ivmelenmesi, yol koşulları ve trafik beklemeleri gibi değişkenler verilmediğinde kendiliğinden varsayılmaz. Gerçekçi bir sonuç için kullanılan modelin sınırları açık tutulur; denklemin ürettiği sayının hareketin yönüne, zamanına ve başlangıç koşullarına uygun olduğu da kontrol edilir.

1. Yol, sürat ve zamanın temel bağıntısı

Sabit süratle gidilen yol d, yol alma sürati v, hareket süresi t ile gösterilsin. Bu durumda d=v·t olur. Eşitlikten v=d/t ve t=d/v biçimleri elde edilir. Yol kilometre, süre saat ise sürat kilometre/saat; yol metre, süre saniye ise metre/saniye birimindedir. Süre veya sürat bulunurken bölme işlemi kullanıldığından paydanın sıfır olması yasaktır. Ayrıca alınan yol ve süre negatif olamaz; sabit sürat, yol kat edilen bir bölüm için pozitif alınır.

Örneğin bir araç 72 km/saat sabit süratle 2 saat 45 dakika hareket ederse 45 dakika=45/60=3/4 saat olduğundan süre 11/4 saattir. Alınan yol 72·11/4=198 km olur. Bağımsız denetimde ilk iki saatte 144 km, sonraki üç çeyrek saatte 54 km yol alınır; toplam yine 198 km'dir. Birim denetimi de aynı sonuca ulaşır: (km/saat)·saat=km. Salt 72·2,45 işlemi uygun değildir; 2 saat 45 dakika, ondalık 2,45 saate değil 2,75 saate karşılık gelir.

$$d=v\cdot t;\ v=d/t;\ t=d/v$$

Anlamı: Sabit süratte yol, birim zamanda alınan yol ile hareket süresinin çarpımıdır.

Koşullar: d≥0, t≥0 ve v≥0; v=d/t için t>0, t=d/v için v>0 gerekir. Yol, sürat ve süre birimleri birbiriyle uyumlu olmalıdır.

Yol, sürat ve zamanın birbirine dönüştürülmesi

Bilinenler	Hesaplanan	Birim denetimi
72 km/saat ve 2,75 saat	198 km	km/saat · saat = km
315 km ve 4,5 saat	70 km/saat	km / saat = km/saat
150 km ve 50 km/saat	3 saat	km / (km/saat) = saat
750 m ve 45 saniye	50/3 m/saniye	m / saniye = m/saniye

2. Kilometre, metre, saat, dakika ve saniye dönüşümleri

Hız problemlerinde farklı birimlerde verilen bilgileri aynı denklemde kullanabilmek için önce ortak ölçü birimine geçilir. Bir kilometre 1000 metre, bir saat 60 dakika ve 3600 saniyedir. Kilometre/saatten metre/saniyeye geçerken 1000/3600=5/18 ile çarpılır; ters yönde 18/5 ile çarpılır. Bu çevirme yalnız sürat birimini değiştirir, aracın hareketinin kendisini değiştirmez. Zaman dönüştürülürken ondalık kısmın 60 ile çarpıldığı unutulmamalıdır.

Örneğin 90 km/saat, 90·5/18=25 m/saniyedir. Bağımsız kontrolle bir saatte 25·3600=90 000 metre, yani 90 kilometre yol alınır. Aynı şekilde 15 m/saniye sürat 15·18/5=54 km/saattir. 750 metrelik yolu 45 saniyede alan bir kişinin ortalama sürati 750/45=50/3 m/saniye, yani (50/3)·18/5=60 km/saattir. Burada kesirli değer yaklaşık yazılmadan önce tam olarak hesaplanmıştır.

Saat-dakika dönüşümünde 2 saat 18 dakika=2+18/60=2,3 saat olur. Buna karşılık 2,3 saat iki saat otuz dakika değil, iki saat on sekiz dakikadır. Özellikle hız birimi km/saatken dakika cinsinden verilen süreyi doğrudan sayısal katsayı olarak çarpmak 60 katlık hataya yol açabilir.

> $v(m/sn)=v(km/sa)\cdot 5/18;\ v(km/sa)=v(m/sn)\cdot 18/5;\ t(saat)=saat+\ dakika/60+\ saniye/3600$
>
> **Anlamı:** Aynı hareketi farklı uzunluk ve zaman birimlerinde ifade etme.
>
> **Koşullar:** Uzunluk ve zaman ölçüleri önce ortak sisteme çevrilmelidir; ondalık saat ile saat-dakika gösterimi karıştırılmaz.

Hareket problemlerinde örnek birim dönüşümleri

İlk gösterim	Eşdeğer gösterim	Kontrol
36 km/saat	10 m/saniye	10·3600=36 000 m/saat
90 km/saat	25 m/saniye	25·3600=90 000 m/saat
15 m/saniye	54 km/saat	15·3,6=54
2 saat 18 dakika	2,3 saat	0,3·60=18 dakika
1 saat 12 dakika	1,2 saat	0,2·60=12 dakika

3. Aynı mesafeyi farklı süratlerle almak

Mesafe değişmediğinde sürat ile süre ters orantılıdır. Aynı 315 kilometrelik güzergâh 70 km/saat süratle 315/70=4,5 saat, 90 km/saat süratle 315/90=3,5 saat sürer. Böylece sürati 20 km/saat artırmak yolculuğu bir saat kısaltır. Sonuç iki yönden denetlenebilir: 70·4,5=315 ve 90·3,5=315 kilometredir. Ancak sürat artışı ile zaman azalışının yüzdeleri aynı değildir; süre sabit mesafede süratin tersine bağlıdır.

Aynı yol için süreler $t_1=d/v_1$, $t_2=d/v_2$ olduğundan aralarındaki fark $d(1/v_1-1/v_2)$ biçiminde yazılabilir. Bu bağıntı, daha yüksek süratin daha kısa süre verdiğini ve farkın hangi uzunluk üzerinde oluştuğunu açıklar. “Hızını 20 artırınca bir saat kazanıyor” ifadesinden başlangıç yolunun uzunluğunu bulmak istenirse önce süratlerin pozitifliği ve aynı güzergâhın karşılaştırıldığı doğrulanmalıdır. Yük ve araç sayısı gibi diğer değişkenler sabit kabul edilmiyorsa salt hızdan kesin süre hesaplanamaz.

$$\text{Aynı mesafede } t_1=d/v_1,\ t_2=d/v_2 \text{ ve } t_1-t_2=d\cdot(1/v_1-1/v_2)$$

Anlamı: Sabit yol uzunluğunda zaman, pozitif süratle ters orantılıdır.

Koşullar: $d\geq 0$, $v_1>0$, $v_2>0$; yol uzunlukları ve duraklamaların işlenişi iki durumda da aynı olmalıdır.

4. Yolculuğu ardışık hareket ve mola dönemlerine ayırma

Bir hareketlinin yolun farklı bölümlerinde sürati değişiyorsa tek bir sabit sürat kullanılarak tüm yolculuk açıklanamaz. Her aşamanın yolu kendi sürati ve süresiyle bulunur; toplam yol aşama yollarının, toplam süre aşama sürelerinin toplamıdır. Mola sırasında yol alınmamasına rağmen geçen süre yolculuğun başlangıcından bitişine kadarki toplam süreye dâhildir. Bu nedenle “hareket hâlindeki ortalama sürat” ile “molalar dâhil seyahat ortalaması” ayrı sonuçlar verebilir.

Bir araç önce 100 kilometreyi 50 km/saat, sonra 180 kilometreyi 90 km/saat süratle gitsin ve arada 30 dakika dursun. Hareket süreleri sırasıyla $100/50=2$ ve $180/90=2$ saattir. Alınan toplam yol 280 kilometre, hareket süresi 4 saat, molalı toplam süre 4,5 saattir. Hareket hâlindeki ortalama sürat $280/4=70$ km/saat, mola dâhil yolculuk ortalaması $280/4{,}5=560/9\approx 62{,}22$ km/saat olur. Denetimde $50\cdot 2+90\cdot 2=280$; mola yol üretmediği hâlde süreye yarım saat eklemiştir. Molayı yol alınmış gibi görmek ortalamayı yapay biçimde yükseltir.

İki hareket dönemi ve bir mola içeren yolculuk

Dönem	Süre	Yol	Sürat
İlk hareket	2 saat	100 km	50 km/saat
Mola	0,5 saat	0 km	0 km/saat
İkinci hareket	2 saat	180 km	90 km/saat
Hareket toplamı	4 saat	280 km	Ortalama 70 km/saat
Bütün yolculuk	4,5 saat	280 km	Ortalama 560/9 km/saat

5. Ortalama süratin neden her zaman iki süratin aritmetik ortalaması olmadığı

Ortalama sürat, toplam alınan yolun toplam geçen süreye bölünmesiyle hesaplanır. İki hareket döneminin süreleri eşitse süratlerin aritmetik ortalaması kullanılabilir; çünkü her sürat aynı süre ağırlığına sahiptir. Örneğin bir saat 45 km/saat, ardından bir saat 75 km/saat ile gidildiğinde yol $45+75=120$ kilometre, süre iki saat ve ortalama sürat 60 km/saattir. Bu durumda $(45+75)/2=60$ aynı sonucu verir.

Eşit mesafeli bölümlerde ise süreler farklı olduğu için basit aritmetik ortalama genellikle yanlıştır. Bir araç 120 kilometreyi 40 km/saatle üç saatte, sonraki 120 kilometreyi 60 km/saatle iki saatte alır. Toplam 240 kilometre beş saatte gidildiğinden ortalama sürat 48 km/saattir; 50 km/saat değildir. Süratlerin yalnız aritmetik ortalaması alınsaydı $50\cdot 5=250$ kilometrelik yanlış bir toplam yol ortaya çıkardı. Eşit uzunluktaki iki bölüm için ortalama sürat $2v_1v_2/(v_1+v_2)$ olur; bu, mesafeyi ortak alıp süreleri toplama işleminin sonucudur.

Ortalama sürat = $(d_1+d_2+\ldots)/(t_1+t_2+\ldots)$; eşit süreli iki bölümde $(v_1+v_2)/2$; eşit mesafeli iki bölümde $2v_1v_2/(v_1+v_2)$

Anlamı: Ağırlık, hareket dönemlerinin sürelerine göre belirlenir; eşit mesafelerde daha yavaş bölüm daha fazla zaman tüketir.

Koşullar: Toplam süre>0, süratler pozitif; verilen özel ortalama formülleri yalnız belirtilen eşit süre veya eşit yol koşullarında geçerlidir. Dâhil edilen molalar toplam süreye eklenir.

Ortalama hız ve ortalama sürat terminolojisi Sınavların matematik problemlerinde "ortalama hız" sözü çoğu kez toplam yol/toplam zaman anlamında kullanılır. Fizikte ise ortalama hız yer değiştirme/toplam zaman, ortalama sürat toplam yol/toplam zamandır. Gidiş-dönüşte yer değiştirme sıfır olsa da alınan toplam yol sıfır değildir. Sorunun bağlamı ve sorulan nicelik ayrılmalıdır.

6. Birbirine doğru hareket eden iki kişi veya aracın karşılaşması

Aralarında D kilometre bulunan A ve B noktalarından iki araç aynı anda birbirine doğru sabit v_1 ve v_2 süratleriyle hareket ederse t saat sonunda aralarındaki mesafe $(v_1+v_2)t$ kadar azalır. İlk karşılaşma $D=(v_1+v_2)t$ eşitliğiyle bulunur. Buradaki toplam hız, iki aracın kendi başlarına aldıkları yolların toplamını ifade eden yaklaşma süratidir; fiziksel süratlerin gelişigüzel toplanabileceği anlamına gelmez. Bir araç duruyorsa karşılaşma süresi yalnız hareketli aracın hızına bağlıdır.

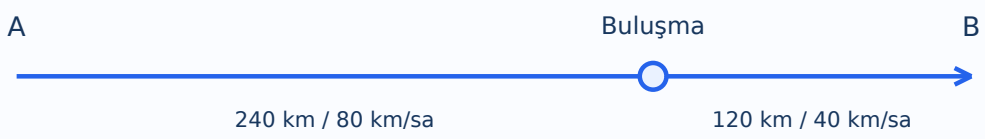
Örneğin iki kent arası 360 kilometre ve birbirine yaklaşan araçların süratleri 80 ile 40 km/saat olsun. Yaklaşma sürati 120 km/saat, karşılaşma süresi 360/120=3 saattir. İlk araç 80·3=240, ikinci araç 40·3=120 kilometre gider; toplam tam olarak 360 kilometredir. Karşılaşma noktası ilk kentten 240 kilometre, diğerinden 120 kilometre uzaktadır. Yol parçalarının toplamıyla yapılan bu ikinci hesap, süreyi ve hareket yönlerini birlikte doğrular.

Karşılaşma süresi $t=D/(v_1+v_2)$; $d_1=v_1t$, $d_2=v_2t$, $d_1+d_2=D$

Anlamı: Birbirine yaklaşan iki hareketlinin aynı anda katettiği yollar başlangıç uzaklığını kapatır.

Koşullar: $D\geq0$, $v_1,v_2\geq0$ ve $v_1+v_2>0$; başlangıç aynı anda, hareket aynı yol üzerinde karşılıklı ve süratler sabit olmalıdır.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

7. Aynı yönde hareket eden araçlarda yetişme ve bağıl sürat

Aynı yönde hareket eden iki araçtan geridekinin ileridekine yetişebilmesi için geridekinin sürati daha yüksek olmalıdır. Başlangıçta aralarındaki uzaklık D ise bu uzaklık saatte v_hızlı−v_yavaş kadar azalır. Dolayısıyla yetişme süresi t=D/(v_hızlı−v_yavaş) olur. Süratler eşitse başlangıç uzaklığı korunur; arkadaki daha yavaşsa aradaki uzaklık artar ve bu sabit sürat modelinde yetişme gerçekleşmez.

Başlangıç aralığı 90 kilometre olan ve aynı yöne giden iki araçtan arkadaki 85, öndeki 55 km/saat süratle ilerlesin. Bağıl sürat 30 km/saat olduğu için yetişme üç saat sonra gerçekleşir. Arkadaki bu sürede 255 kilometre, öndeki 165 kilometre alır; fark 255−165=90 kilometredir. Buluşma yeri bir aracın başlangıç noktasına göre hesaplanacaksa yalnız fark değil, başlangıçta öndeki aracın nerede olduğu da dikkate alınmalıdır. Birbirine doğru hareket için hızların toplanması, aynı yönde yetişme için farklarının alınması yön bilgisinden doğar.

> Aynı yönde yetişme için t=D/(v_hızlı−v_yavaş)
>
> **Anlamı:** Hızlı aracın yavaş araca göre her saat kapattığı başlangıç mesafesi, sürat farkına eşittir.
>
> **Koşullar:** D>0, v_hızlı>v_yavaş≥0; hareket yönü ortak, başlangıç anı ve süratler model boyunca uyumlu olmalıdır.

Karşılaşma ve yetişmede bağıl sürat seçimi

Hareket biçimi	Mesafenin değişim hızı	İlk temasın koşulu
Birbirine doğru	v_1+v_2	Alınan yolların toplamı D olur
Aynı yönde ve arkadaki hızlı	v_arka−v_ön	Arkadakinin fazladan aldığı yol D olur
Aynı yönde ve süratler eşit	0	D>0 ise yetişme olmaz
Aynı yönde ve arkadaki yavaş	Aralık büyür	Sabit süratte yetişme olmaz

8. Hareketlilerin farklı zamanlarda yola çıkması

İki aracın başlangıç anları farklıysa hareketlerin ortak zaman aralığı belirlenmeden bağıl sürat denklemi kurulamaz. Önce erken yola çıkan aracın elde ettiği yol avantajı veya ilk mesafedeki azalma hesaplanır. Ardından iki aracın da hareket ettiği dönem için uygun karşılaşma veya yetişme ilişkisi kullanılır. Hesaplanan ortak süre, geç başlayan aracın çıkış anından itibaren geçerlidir; erken başlayan aracın toplam süresine başlangıç farkı eklenmelidir.

Birinci araç aynı kentten saat 07.30'da 55 km/saat süratle, ikinci araç 09.30'da 75 km/saat süratle aynı yöne çıksın. İki saatlik ilk dönemde ilk araç 110 kilometre öne geçer. İkinci aracın bağıl sürati 20 km/saat olduğundan arayı kapatması 110/20=5,5 saat sürer. Yetişme 09.30'dan beş saat otuz dakika sonra, saat 15.00'tedir. İlk araç toplam 7,5 saatte 55·7,5=412,5 kilometre, ikinci araç 5,5 saatte 75·5,5=412,5 kilometre yol alır. İki bağımsız yol hesabının eşitliği, hem buluşma zamanını hem de ilk çıkış farkını doğrular.

Gecikmeli çıkışlarda saat biçimine ilişkin hata da sık görülür. 5,5 saat beş saat elli dakika değil, beş saat otuz dakikadır. Saat 23.00'ten sonraki bir buluşma ertesi takvim gününe taşabilir; problem günlük saat istiyorsa toplam geçen süreyle saat göstergesi birbirinden ayrılmalıdır.

9. Varış saatinin erken veya geç olması ve sabit mesafe denklemi

Bir yolculuğun planlanan varış saati biliniyor, ancak farklı süratlerle ulaşıldığında ortaya çıkan erken veya geç varış farkları veriliyorsa aynı yol iki ayrı süreyle ifade edilir. Hedef mesafe değişmez; değişen yalnız hareket süresidir. Planlanan yolculuk süresi T, erken varma miktarı e ve geç kalma miktarı g saat olmak üzere hızlı yolculuk T−e, yavaş yolculuk T+g sürer. Böylece d=v_hızlı(T−e)=v_yavaş(T+g) kurulur. İfadelerde T−e>0 şartı göz ardı edilmemelidir.

Örneğin bir araç 240 kilometrelik yolu 60 km/saatle dört saatte, 80 km/saatle üç saatte tamamlar. Aynı saatte yola çıktığında yavaş yolculuk hızlı olandan bir saat sonra biter. Araç saat 08.00'de yola çıkarsa varış saatleri sırasıyla 12.00 ve 11.00 olur. Ters kontrolle 60·4=80·3=240 kilometredir. Bir problemde mesafe bilinmiyorsa aynı yaklaşım iki hızın süre farkıyla bir bilinmeyenli denklem kurmaya yarar; tek başına “hız arttı” ifadesi kesin varış saatini vermez.

10. Gidiş-dönüş yolculuğu ve eşit mesafelerde ortalama sürat

Aynı güzergâhta gidip başlangıç noktasına dönüldüğünde gidiş ve dönüş mesafeleri eşittir; ancak hızlar farklıysa süreler eşit değildir. Örneğin 150 kilometrelik bir yol 50 km/saatle üç saatte gidilsin ve 75 km/saatle iki saatte dönülsün. Toplam yol 300 kilometre, toplam hareket süresi beş saattir. Ortalama sürat 300/5=60 km/saattir. Aynı sonuç eşit mesafeli iki bölümün 2·50·75/(50+75)=60 bağıntısıyla doğrulanır. Süratlerin aritmetik ortalaması 62,5 km/saat olmasına rağmen bu sonuç yolculuğun ortalaması değildir.

Başlangıç noktasına dönüldüğü için toplam yer değiştirme sıfırdır. Bu nedenle fizik tanımıyla ortalama yönlü hız sıfır olabilir; buna karşılık 300 kilometre yol alındığından ortalama sürat pozitif kalır. Yolculuğa verilen molalar dahilse beş saatlik hareket süresine bu molalar da eklenir. Matematik problemlerinde “ortalama hız” ifadesinin çoğu kez sürat anlamında kullanılması, yön bilgisi bulunan metinlerde bu ayrımı geçersiz kılmaz.

11. Tren, köprü, tünel ve sabit bir noktadan geçiş

Uzunluğu ihmal edilemeyen bir hareketli, bir noktadan bütünüyle geçmek için kendi uzunluğu kadar ilerlemelidir. Bir trenin köprüyü veya tüneli tamamen geçmesi içinse trenin ön ucunun girişten çıkışın ötesine varmasının yanında son vagonun da çıkması gerekir. Bu nedenle tam geçişte alınan yol, tren uzunluğu ile köprü veya tünel uzunluğunun toplamıdır. “Trenin ön kısmının köprüye varması”, “ön kısmının köprüden çıkması” ve “treninin bütünüyle köprüden çıkması” ayrı anları belirtir.

Uzunluğu 180 metre olan trenin sabit sürati 72 km/saat, yani 20 m/saniye olsun. Tren sabit bir direğin yanından bütünüyle 180/20=9 saniyede geçer. Uzunluğu 270 metre olan köprüden bütünüyle geçişi (180+270)/20=450/20=22,5 saniye sürer. Uzunluğu 420 metre olan tünelden tam geçiş için (180+420)/20=30 saniye gerekir. Kontrol için köprüde 22,5·20=450, tünelde 30·20=600 metre hareket edildiği görülür. Bu hesapların hepsinde trenin ön ucunun yapması gereken yer değiştirme esas alınmıştır; trenin uzunluğunun ayrıca ve tekrar eklenmesi çift saymaya neden olur.

> Direği bütünüyle geçme süresi=L_tren/v; köprü veya tüneli bütünüyle geçme süresi=(L_tren+L_geçit)/v
>
> **Anlamı:** Tam geçiş süresince trenin ön ucunun katettiği mesafe hesaplanır.
>
> **Koşullar:** v>0; bütün uzunluklar aynı birimde, hareket doğrultusunda ölçülmeli; geçiş başlangıcı ön ucun girişe ulaştığı an olarak alınmalıdır.

Uzunluğu 180 metre olan trenin 20 m/saniye süratte geçişleri

Geçilen yer	Tam geçiş için yol	Süre
Sabit direk	180 m	9 saniye
270 m köprü	450 m	22,5 saniye
420 m tünel	600 m	30 saniye

12. Akıntılı suda teknenin gidiş ve dönüş sürati

Bir teknenin durgun suya göre sürati u, nehrin akıntı sürati c olsun. Akıntı ile aynı yönde ilerlediğinde kıyıya göre sürati u+c, akıntıya karşı ilerlediğinde u−c olur. Akıntıya karşı gerçekte ilerleyebilmesi için u>c gerekir. Bu bağıntılar teknenin suya göre sabit sürati, akıntının doğrultu boyunca sabit olması ve hareketin tek bir doğrultuda değerlendirilmesi varsayımlarıyla kurulur. Akıntı, teknenin makine süratini değiştirmez; karaya göre ölçülen ilerleme süratine etkide bulunur.

Durgun suda 18 km/saat süratle giden bir tekne, 3 km/saat akıntılı nehirde akıntı yönünde 21, ters yönde 15 km/saatle ilerler. Tekne 84 kilometrelik yolu akıntıyla 84/21=4 saatte, dönüşte akıntıya karşı 84/15=5,6 saatte alır. Dönüş süresinin 5,6 saat yani 5 saat 36 dakika olması, akıntıya karşı daha yavaş ilerlemesiyle tutarlıdır. Toplam 168 kilometrelik yol 9,6 saat sürmüşse ortalama sürat 168/9,6=17,5 km/saattir. Bağımsız kontrol için eşit mesafeli iki bölüm bağıntısı 2·21·15/(21+15)=17,5 sonucunu verir. Akıntı ve tekne süratlerinin aritmetik ortalamasını yolculuğun ortalama sürati kabul etmek doğru değildir.

v_akıntıyla=u+c; v_akıntıya_karşı=u−c; u=(v_akıntıyla+v_akıntıya_karşı)/2; c=(v_akıntıyla−v_akıntıya_karşı)/2

Anlamı: Karaya göre iki hareket sürati, teknenin suya göre sürati ile akıntının birleşiminden doğar.

Koşullar: u≥0,c≥0; akıntıya karşı ilerleme için u>c; akıntı ve tekne süratleri sabit ve aynı doğrultudadır.

13. Dairesel pistte aynı yönde ve zıt yönde hareket

Kapalı pistte bir tur tamamlayan hareketli başladığı noktaya döner. Pist uzunluğu P ve hareketlilerin sabit süratleri v_1, v_2 olsun. İki hareketli aynı başlangıç noktasından aynı anda, aynı yönde hareket ediyorsa ve süratleri farklıysa hızlı olanın yavaşa ilk kez yeniden yetişmesi için aralarında bir tam tur fark oluşmalıdır. Bu yüzden ilk yeniden yan yana geliş süresi $P/|v_1-v_2|$ olur. Zıt yönlü hareket ederlerse ilk buluşma için pist boyunca aldıkları yolların toplamı bir turdur; süre $P/(v_1+v_2)$ olarak bulunur. Başlangıç anındaki birlikte bulunma “yeniden karşılaşma” olarak sayılmaz.

Çevresi 600 metre olan dairesel pistte iki kişinin süratleri 5 ve 3 m/saniye olsun. Aynı yönde ilk yeniden yan yana gelmeleri 600/(5−3)=300 saniye, yani beş dakika sürer. Bu sürede hızlı kişi 1500, yavaş kişi 900 metre yol alır; fark 600 metrelik tam bir turdur. Zıt yönde ilk yeniden karşılaşmaları 600/(5+3)=75 saniye sürer. Bu kez kişiler sırasıyla 375 ve 225 metre alır; toplam 600 metrelik bir tur olur. İlk hesap tur farkıyla, ikinci hesap tur toplamıyla bağımsız doğrulanmıştır.

Başlangıç noktaları farklıysa ilk karşılaşmaya kadar kapatılması gereken pist yayı mutlaka belirlenir; bu yay her zaman tam tur uzunluğu değildir. Dairesel hareketin daha ayrıntılı açı, faz ve periyot hesapları bu temel GYS düzeyi hareket problemlerinin kapsamını aşar.

Aynı noktadan aynı yönde ilk yeniden yetişme $t=P/|v_1-v_2|$; zıt yönde ilk yeniden buluşma $t=P/(v_1+v_2)$

Anlamı: İlk yeniden karşılaşmada aynı yönde bir tam tur fark, ters yönde bir tam tur toplam yol oluşur.

Koşullar: $P>0$; süratler sabit, aynı başlangıç noktasından aynı anda çıkış vardır. İlk formülde $v_1 \neq v_2$, ikinci formülde $v_1+v_2>0$ olmalıdır.

14. Alınan yol, yer değiştirme, ortalama sürat ve yönlü hız

Yol, hareket boyunca kat edilen toplam uzunluktur ve negatif değildir. Yer değiştirme ise başlangıç konumundan son konuma yönlü değişimdir. Hareketli geri dönüyorsa yol ile yer değiştirmenin büyüklüğü farklı olabilir. Ortalama sürat toplam yolun toplam zamana oranıdır; ortalama yönlü hız ise yer değiştirmenin toplam zamana oranı olarak tanımlanır. Düz bir doğrultuda sağ veya doğu yönü pozitif seçilebilir; ters yöndeki yer değiştirme negatif yazılır. Bu işaret seçimi süratin negatif olduğu anlamına gelmez.

Bir yaya önce doğuya doğru 150 metreyi 3 m/saniye süratle 50 saniyede, sonra batıya doğru 90 metreyi aynı süratle 30 saniyede yürüsün. Toplam yol 150+90=240 metredir; başlangıç noktasına göre son konumu 150−90=60 metre doğudadır. Toplam süre 80 saniye olduğundan ortalama sürat 240/80=3 m/saniye, ortalama yönlü hız +60/80=+0,75 m/saniyedir. Bağımsız kontrol, toplam yolu 3·50+3·30=240 ve yönlü yer değiştirmeyi 3·50−3·30=60 olarak yeniden bulur. Başlangıç konumuna tam dönüşte ortalama yönlü hız sıfır olabilir; aynı yolculukta ortalama sürat pozitif kalabilir.

Yol ve yer değiştirme kavramlarının ayrımı

Nicelik	Hesap yöntemi	Örnekteki sonuç
Toplam yol	Yön ayırmadan uzunlukları toplama	240 m
Yer değiştirme	Seçilen doğrultuya göre işaretli toplama	60 m doğu
Ortalama sürat	Toplam yol / toplam zaman	3 m/saniye
Ortalama yönlü hız	Yer değiştirme / toplam zaman	0,75 m/saniye doğu

Fiziksel kavramların matematik problemindeki kullanımı Sabit doğrultudaki yol problemlerinde “hız” günlük dilde sürat yerine kullanılabilir. Çok yönlü bir harekette toplam yol ile yer değiştirme; ortalama sürat ile ortalama yönlü hız farklı niceliklerdir. Soru “kaç kilometre yol aldı?” diyorsa yolların toplamı, “başlangıçtan ne kadar uzağa geldi?” diyorsa konum farkı esas alınır.

15. Zaman çizelgesi ve parçalı hız verilerini yorumlama

Hareketli bir yolculukta verilen hız-zaman bilgisi, her dönem için “sürat × dönem uzunluğu” hesabıyla toplam yola çevrilebilir. Bu yöntemin kullanılabilmesi için her dönemde süratin sabit olduğu bilinmelidir. Zaman aralıkları doğrudan süreyi gösterir; örneğin 2,5 ile 4. saat arasındaki dönem 1,5 saattir, dört saat değildir. Sürat 0 ise o dönemde yol alınmaz, ancak yolculuğun toplam süresi artar. Ayrıntılı grafik türleri ve grafiklerden veri okuma ayrı GY-05 modülünde ele alınacaktır; burada hareketin hesaplama modeli kurulmaktadır.

Temsili bir yolculuk çizelgesinde araç ilk bir saatte 40 km/saat, ikinci saatte 60 km/saat, 2. saatten 2,5. saate kadar 0 km/saat, 2,5. saatten 4. saate kadar 80 km/saatle ilerlesin. Dönem yolları 40, 60, 0 ve 120 kilometredir. Toplam yol 220 kilometre, toplam yolculuk süresi dört saat, mola hariç hareket süresi 3,5 saattir. Ortalama sürat molalar dâhil 220/4=55 km/saat, yalnız hareket zamanı esas alınırsa

220/3,5=440/7≈62,86 km/saattir. Bağımsız kontrolle 40·1+60·1+0·0,5+80·1,5=220 bulunur. Hareket dönemlerinin süreleri farklı olduğu için dört sayının basit ortalamasını almak geçerli değildir.

Temsili hız-zaman çizelgesinden yol hesabı

Zaman aralığı	Sürat	Süre	Alınan yol
0–1. saat	40 km/saat	1 saat	40 km
1–2. saat	60 km/saat	1 saat	60 km
2–2,5. saat	0 km/saat	0,5 saat	0 km
2,5–4. saat	80 km/saat	1,5 saat	120 km
Toplam	Değişken	4 saat	220 km

16. Sabit yol uzunluğunda sürat artışıyla zaman kazancı

Sabit uzunlukta bir güzergâh için sürat artırıldığında süre ters orantılı olarak azalır; süratin yüzde artışıyla sürenin yüzde azalışı aynı sayıya eşit olmak zorunda değildir. Bir araç 300 kilometrelik yolu 75 km/saat süratle dört saatte alır. Sürat %20 artırılıp 90 km/saate çıkarıldığında yolculuk süresi 300/90=10/3 saat, yani 3 saat 20 dakika olur. Kazanılan süre 4−10/3=2/3 saat=40 dakikadır. Sürenin oransal azalışı (2/3)/4=1/6, yaklaşık %16,67'dir; %20 değildir. Bu sonuç ikinci yoldan, süratin 1,2 katına çıkmasıyla sürenin 1/1,2=5/6 katına inmesi üzerinden de bulunur.

Böyle bir hesapta başlangıç hızının sıfır olması, sürenin sonsuz olması veya değişen hızın belirtilen güzergâhta uygulanamaması gibi durumlar model dışında kalır. Sürat artışı trafik, mola ve farklı yol uzunluklarıyla birlikte verilmişse bunlar ayrı etkenlerdir; önce her bölümün gerçekten ne kadar sürdüğü bulunmalıdır.

17. Birden fazla koşulu birlikte değerlendirme ve çözüm denetimi

Bir hareket probleminde hız, yön, başlangıç uzaklığı, gecikmeli çıkış ve mola gibi unsurlar aynı metinde bulunabilir. Güvenilir yöntem; hareketin başladığı anları sıralamak, her dönem için kimlerin hareket ettiğini belirlemek, ortak uzunluk ve zaman birimini seçmek, buluşmayı sağlayan mesafe eşitliğini kurmak ve çözümü başlangıç senaryosuna yerleştirmektir. Negatif bir karşılaşma süresi, uygun olmayan yön varsayımı veya geçmiş bir anda karşılaşma gibi sonuçlar, salt cebirsel işlem doğru olsa bile modelin olayla örtüşmediğini gösterir.

Örneğin aralarında 360 kilometre bulunan iki kentten ilk araç 60 km/saat süratle diğerine doğru yola çıksın. İkinci araç ilkinden bir saat sonra, karşı yönde 40 km/saat süratle hareket etmeye başlasın. İlk saat sonunda ilk araç 60 kilometre aldığından yeni uzaklık 300 kilometredir. Bundan sonra iki araç birbirine toplam 100 km/saat süratle yaklaşır ve üç saat sonra karşılaşır. Karşılaşma ilk aracın çıkışından dört, ikinci aracın çıkışından üç saat sonradır. Bağımsız yol kontrolü 60·4+40·3=240+120=360 kilometre verir. Yanlışlıkla ilk andan itibaren iki araç da hareket ediyor kabul edilseydi süre 360/100=3,6 saat çıkacak ve farklı başlangıç koşulu modellenmiş olacaktı.

Hareket problemlerinde sonuç denetiminin son aşaması sayının birimini ve gerçek anlamını sınamaktır. Hesaplanan süre saatte mi dakikada mı ifade edilmiştir; iki aracın aldığı yollar başlangıç aralığını gerçekten kapatmakta mıdır; belirtilen duraklama sırasında yol alınmış gibi sayılmış mıdır; trenin kendi boyu geçişe dâhil edilmiş midir; gidiş-dönüşte ortalama sürat yanlışlıkla aritmetik ortalama mı alınmıştır? Bu kontroller çözümün ayrılmaz parçasıdır.

Hız ve hareket problemlerinde model seçimi

Metindeki durum	Temel ilişki	Kritik denetim
Sabit süratle tek araç	Yol=sürat·süre	Uzunluk ve zaman birimleri eşleştirilir
Farklı sürat dönemleri	Toplam yol=$\Sigma(v_i \cdot t_i)$	Her dönemin süresi ayrı bulunur
Karşılıklı yaklaşma	$D=(v_1+v_2)t$	Yol parçaları başlangıç D'yi tamamlar
Aynı yönde yetişme	D=(v_hızlı−v_yavaş)t	Geridekinin gerçekten daha hızlı olması gerekir
Geç başlayan hareket	Önce başlangıç avantajı hesaplanır	Süre hangi hareketlinin çıkışından sayılıyor?
Eşit uzunlukta gidiş-dönüş	Ortalama sürat=$2v_1v_2/(v_1+v_2)$	Molalar ve yönlü yer değiştirme ayrıdır
Köprü/tünel tam geçişi	Yol=tren+geçit uzunluğu	Başlangıç ve bitiş uçları doğru seçilir
Akıntılı su	u±c	Akıntıya karşı net sürat pozitif olmalı
Dairesel pist	Bir tur için bağıl sürat	İlk yeniden karşılaşma ile t=0 ayrılır

Hareket problemlerinin ortak sınırları Yol ve sürat ilişkileri, sabit sürat ya da hızın ayrı sabit dönemlere ayrılması varsayımıyla kullanılır. Süratin sıfır olduğu molada zaman ilerler, yol artmaz. Başlangıç saatleri farklıysa karşılaşma sürelerinin referansı da farklıdır. Sonuçlar cebirsel olarak değil, yol parçalarının toplamı ve hareketin gerçek yönüyle birlikte kontrol edilmelidir.

Hız, hareket ve yol problemleri aynı temel eşitlikten hareket etse de her problemde sorulan nicelik ve geçerli zaman aralığı farklıdır. Tek hareketli için yolun sürat ile süreden oluşması, birden fazla hareketli için uzaklığın bağıl süratle kapanması, trenin tam geçişinde uzunlukların eklenmesi ve ortalama süratin toplam yol/toplam süre üzerinden hesaplanması ortak bir düşünme biçimine dayanır: Önce gerçekte hangi mesafenin ne kadar sürede kapatıldığı belirlenir. Böyle kurulan model, birim dönüşümleri, bağımsız yol toplamı ve uygunluk denetimiyle sağlamlaştırılır.

KONU 3.5

KÂR, ZARAR, İNDİRİM VE ALIŞVERİŞ PROBLEMLERİ

Bir alışveriş işleminde fiyatın artması veya azalması tek başına kâr ya da zarar sonucunu belirlemez. Ticari bakımdan önemli olan, satıcının ürünü elde etmek ve satışa hazırlamak için katlandığı toplam maliyet ile satıştan sağladığı gelir arasındaki farktır. Etiket üzerinden yapılan indirim, maliyet üzerinden hesaplanan kâr oranı ve tüketicinin ödediği tutar birbirine bağlı olsa da farklı büyüklüklerdir. Bu konudaki problemlerin matematiksel çekirdeği, doğru başlangıç tutarını seçmek ve birden fazla fiyat değişimini gerçekleştiği sırayla uygulamaktır.

1. Alış fiyatı, maliyet, etiket fiyatı ve gerçekleşen satış fiyatı

Alış fiyatı, ürünün edinilmesi için satıcı tarafından ödenen bedeldir. Maliyet, bu bedelle birlikte problemde açıkça belirtilen ve ilgili ürüne yüklenen taşıma, paketleme veya hazırlama gibi giderlerin toplamıdır. Ek gider verilmemişse alış fiyatı maliyet kabul edilebilir. Etiket fiyatı, ürün üzerinde belirtilen veya satış öncesinde ilan edilen tutardır; müşterinin gerçekten ödediği fiyatla aynı olmak zorunda değildir. Gerçekleşen satış fiyatı ise indirimlerin ardından satıcının elde ettiği satış bedelidir. Vergi, komisyon ve diğer kalemlerin dâhil edilip edilmediği soru metninden belirlenmelidir.

Örneğin bir ürünün edinme bedeli 720 TL, satılmaya hazır hâle getirilmesi için ürüne düşen ek gider 80 TL olsun. Toplam maliyet 800 TL'dir. Ürüne 1.100 TL etiket konulduğu hâlde müşteri 990 TL ödüyorsa gerçekleşen satış 990 TL'dir. Bu durumda satıcının kârı 990−800=190 TL olur. Yalnız alış bedeli esas alınarak 990−720=270 TL bulunması, belirtilen 80 TL giderin göz ardı edilmesidir. Kontrol için 800+190=990 eşitliği kurulabilir.

Alışveriş probleminde birbirinden ayrılması gereken tutarlar

Kavram	Matematiksel anlamı	Temsili işlemde değer
Alış fiyatı	Ürünü edinme bedeli	720 TL
Ek gider	Maliyete katılacağı belirtilen gider	80 TL
Toplam maliyet	Alış fiyatı + ek gider	800 TL
Etiket fiyatı	İndirim öncesi ilan edilen fiyat	1.100 TL
Satış fiyatı	Müşterinin fiilen ödediği tutar	990 TL
Kâr	Satış fiyatı − maliyet	190 TL

2. Kâr ve zararın parasal miktarı ile yüzdesi

Maliyet M ve gerçekleşen satış bedeli S olmak üzere S>M ise kâr, S<M ise zarar, S=M ise başabaş satış vardır. Kâr ya da zarar tutarı para birimiyle ölçülür. Kâr ve zarar yüzdesi ise standart matematiksel alışveriş problemlerinde maliyet tutarına göre belirlenir. Yüzde, belirli bir başlangıç büyüklüğünün yüzde kaçına karşılık gelindiğini anlattığı için başlangıç tutarı açıkça seçilmelidir. Yüzde ifadesi yeni tutarı mı, yalnız artış veya azalışı mı gösteriyor sorusu da ayrı değerlendirilir.

$$\text{Kâr} = S - M\ (S \geq M);\ \text{Zarar} = M - S\ (S \leq M);\ \text{Kâr oranı}\ (\%) = 100 \cdot (S-M)/M;\ \text{Zarar oranı}\ (\%) = 100 \cdot (M-S)/M.$$

Anlamı: Para tutarındaki farkın maliyete oranı kâr veya zarar yüzdesini verir.

Koşullar: Yüzde hesabında maliyet M>0'dır. Oranlar kâr ve zarar durumlarına göre ayrı kullanılır; sıfır fark başabaştır.

Maliyeti 640 TL olan bir ürün 800 TL'ye satıldığında kâr 160 TL'dir. Kâr yüzdesi 160/640·100=%25'tir. Aynı ürün 560 TL'ye satılsaydı zarar 80 TL, zarar oranı 80/640·100=%12,5 olurdu. İlk satışın ters denetimi 640·1,25=800, ikinci satışınki 640·0,875=560 eşitliğidir. Her iki sonuç da aynı maliyet üzerinden karşılaştırılmıştır.

Maliyete göre satış sonucunun yorumlanması

Maliyet	Gerçekleşen satış	Fark	Sonuç
640 TL	800 TL	+160 TL	Maliyete göre %25 kâr
640 TL	640 TL	0 TL	Başabaş
640 TL	560 TL	−80 TL	Maliyete göre %12,5 zarar

3. Bilinen kâr veya zarar oranından satış fiyatını bulma

Maliyet üzerinden %p kâr hedeflendiğinde maliyetin tamamına maliyetin p/100 kadarı eklenir. Maliyet üzerinden %q zararla satış yapıldığında ise maliyetin q/100 kadarı çıkarılır. Bu işlemlerde oranı 100'e bölmek yüzdeyi çarpan hâline getirir. Örneğin %30 kâr, maliyetin 1,30 katına satış demektir; %30 zarar ise maliyetin 0,70 katına satış demektir. Bir oranı fiyatla çarpmadan önce oranın hangi fiyata göre verildiğini belirlemek gerekir.

> Kârda $S=M\cdot(1+p/100)$; zararda $S=M\cdot(1-q/100)$.
>
> **Anlamı:** Kâr oranında 1'den büyük; zarar oranında 0 ile 1 arasında bir fiyat çarpanı kullanılır.
>
> **Koşullar:** $M>0$; $p\geq 0$; zarar oranında $0\leq q\leq 100$ ve negatif olmayan satış fiyatı varsayılır.

Bir ürünün toplam maliyeti 1.250 TL, hedeflenen kâr oranı %24 olsun. Kâr $1.250\cdot 24/100=300$ TL, satış fiyatı 1.550 TL'dir. Kısa yöntem de $1.250\cdot 1{,}24=1.550$ sonucunu verir. Maliyeti 900 TL olan başka bir ürün %15 zararla satılırsa zarar 135 TL, satış bedeli 765 TL olur; $900\cdot 0{,}85=765$ ikinci denetimdir. Kâr miktarını bulmak ile satış fiyatını bulmak farklı işlemler olduğundan 300 TL ve 1.550 TL birbirinin yerine yazılamaz.

4. Satış fiyatı bilinirken maliyeti ve ilk fiyatı geri bulma

Bir fiyatın %20 artırılmasıyla 1.200 TL'ye ulaşılıyorsa başlangıç fiyatını bulurken 1.200'ün %20'si çıkarılmaz. Çünkü %20, 1.200 TL üzerinden değil önceki fiyat üzerinden hesaplanmıştır. İlk tutar x olursa $1{,}20x=1.200$ denklemi kurulur ve $x=1.000$ TL bulunur. Geriye gitme işleminde değişim miktarı, son tutarın değil başlangıç tutarının yüzdesidir. Yüzde indirimden önceki tutarı bulma işlemi de aynı mantığa dayanır.

Örneğin %35 kârla 2.025 TL'ye satılan bir ürünün maliyeti M için $1{,}35M=2.025$ yazılır; $M=1.500$ TL'dir. Kâr 525 TL olup $525/1.500=\%35$ kontrolünü sağlar. %20 zararla 1.080 TL'ye satılan başka bir ürünün maliyeti $1.080/0{,}80=1.350$ TL'dir; zarar 270 TL ve $270/1.350=\%20$'dir. Son fiyatın üzerinden aynı yüzdeyi ters işaretle uygulamak, farklı bir taban kullanacağı için hatalı sonuç verecektir.

> $M=S/(1+p/100)$ [kâr]; $M=S/(1-q/100)$ [zarar].
>
> **Anlamı:** Bilinen son satış bedeli, ilgili kâr veya zarar çarpanına bölünerek başlangıç maliyeti bulunur.
>
> **Koşullar:** $S\geq 0$; kârda $p\geq 0$; zarar hâlinde $q<100$ ve $M>0$ kabul edilir. %100 zarar durumunda $S=0$ olacağından yalnız satış değerinden tek maliyet belirlenemez.

5. Kâr yüzdesinin maliyete mi satış gelirine mi göre hesaplandığı

Maliyete göre kâr oranı ile satış tutarına göre kâr payı aynı yüzde değildir. İkinci hesaplamada farkın satışa oranı alınır. Matematik problemlerindeki standart “%x kâr” ifadesi, aksi açıkça belirtilmedikçe maliyete göre değerlendirilir. Buna karşılık “satış tutarının yüzde kaçı kârdır?” cümlesinin paydası satış tutarıdır. Paydanın farklılaşması, iki oranın da matematiksel olarak doğru ancak sorulan soruya göre farklı olmasına neden olur.

Maliyeti 300 TL ve satış fiyatı 375 TL olan ürünün kârı 75 TL'dir. Maliyete göre kâr oranı $75/300=\%25$, satış tutarı içindeki kâr payı ise $75/375=\%20$'dir. Aradaki fark yeni bir kazanç veya ek maliyet anlamına gelmez; yalnız ölçüm tabanı değişmiştir. İkinci kontrol, satışın $300/375=\%80$'inin maliyet ve kalan %20'sinin kâr olduğunun görülmesidir.

Aynı kârın iki farklı yüzde tabanıyla gösterimi

İfade	Pay	Payda	Sonuç
Maliyet üzerinden kâr yüzdesi	75 TL	300 TL	%25
Satış geliri içinde kârın payı	75 TL	375 TL	%20
Satış geliri içinde maliyetin payı	300 TL	375 TL	%80

6. Etiket fiyatı ve tek aşamalı indirim

Etiket fiyatı E olan ürünün etiket üzerinden %d oranında indirilmesiyle müşteri E·(1−d/100) öder. İndirim tutarı E·d/100, kalan tutar ise etiket ile indirim arasındaki farktır. Bir indirim yüzdesi, tek başına satıcının zarar ettiğini göstermez; etiket maliyetten yüksek belirlenmiş olabilir. İndirimin satış fiyatı üzerinde mi, önceki fiyat üzerinde mi, yoksa başka bir tutarda mı uygulandığı metinle belirlenir.

2.400 TL etiketli bir ürün %15 indirimle satıldığında indirim tutarı 360 TL, gerçekleşen satış 2.040 TL olur. İşlemin ikinci yolu 2.400·0,85=2.040'tır. Ürünün toplam maliyeti 1.700 TL ise buna rağmen 340 TL kâr elde edilir; maliyete göre kâr oranı 340/1.700=%20'dir. İndirimin %15 olması, kâr oranının %15 azaldığı veya kârın %15 olduğu anlamına gelmez.

$$\text{İndirim tutarı}=E\cdot d/100;\ \text{indirimli fiyat}=E\cdot(1-d/100);\ \text{başlangıç etiket fiyatı}=\text{indirimli fiyat}/(1-d/100).$$

Anlamı: İndirim oranı etiket veya soruda açıkça belirtilen güncel fiyat tabanına uygulanır.

Koşullar: $E\geq 0$; $0\leq d\leq 100$. Başlangıç fiyatını yalnız son fiyattan bulmak için $d<100$ olmalıdır.

7. Arka arkaya indirimler ve eşdeğer tek indirim

Bir ürüne önce %20, sonra indirimin ardından oluşan tutara %10 indirim yapılırsa toplam indirim %30 değildir. İkinci indirim daha küçük bir tutara uygulanır. Başlangıç fiyatı E ise son fiyat E·0,80·0,90=0,72E'dir; eşdeğer tek indirim %28 olur. İlk indirim %20E, ikinci indirim %10·0,80E=%8E tutarındadır. Toplam indirim %28E'ye karşılık gelir. Ardışık yüzdeler aynı tabana göre verilmediği için doğrudan toplama yapılamaz.

Örneğin 1.500 TL etiketli ürün önce %20, ardından oluşan fiyat üzerinden %10 indirilirse 1.500→1.200→1.080 TL olur. İlk indirim 300 TL, ikinci indirim 120 TL, toplam indirim 420 TL'dir. Etiket üzerinden eşdeğer oran 420/1.500=%28'dir. Bağımsız çarpım kontrolü 1.500·0,8·0,9=1.080 sonucunu verir. Her iki indirimin de özellikle “ilk etiket üzerinden” yapıldığı ayrı bir sözleşmede belirtilmişse bu örnekteki ardışık taban yaklaşımı kullanılmaz; iki ayrı indirim tutarı aynı ilk etiket üzerinden hesaplanır.

$$\text{Son fiyat}=E\cdot(1-d_1/100)\cdot(1-d_2/100);\ \text{eşdeğer indirim oranı }(\%)=d_1+d_2-d_1d_2/100.$$

Anlamı: İkinci indirimin tabanı, ilk indirim sonrası kalan tutardır.

Koşullar: Oranlar yüzde cinsindendir, $0\leq d_1,d_2\leq 100$; her indirim sırayla güncel tutara uygulanır.

Temsili ardışık indirim işleminde fiyatın değişimi

Aşama	İşlem	Aşama sonu fiyatı
Başlangıç	Etiket	1.500 TL
Birinci indirim	1.500·0,80	1.200 TL
İkinci indirim	1.200·0,90	1.080 TL
Toplam etki	1.080/1.500=0,72	Etikete göre %28 indirim

8. Önce fiyat artırma sonra indirim yapma ve ters sıralama

Etiket önce maliyetin üzerine belirli bir oranda artırılarak konulabilir ve daha sonra etiket indirimiyle satılabilir. Böyle bir işlemde iki ayrı yüzde vardır: artışın tabanı maliyet, indirimin tabanı etikettir. Başlangıç maliyeti M, etiket artış oranı %a ve indirim oranı %d ise gerçekleşen satış M·(1+a/100)·(1−d/100) olur. Son çarpanın 1'den büyük olması kâr, küçük olması zarar, 1'e eşit olması başabaş demektir. Maliyet ile etiket arasındaki farkı doğrudan kâr kabul etmek, gerçekten indirim yapıldıysa yanlış sonuç verir.

Maliyeti 800 TL olan ürünün etiketi maliyete göre %35 artırılarak 1.080 TL'ye konulsun. Etiket üzerinden %20 indirimle satış 1.080·0,80=864 TL olur. Maliyete göre kâr 64 TL, oran 64/800=%8'dir. İkinci doğrulama 1,35·0,8=1,08 çarpanından doğrudan %8 kâr bulunmasıdır. %35−%20=%15 hesabı aynı tabanda olmayan iki değişimi toplar ve geçerli değildir. Artışın ve indirimin sırası, yalnız iki sabit çarpanın aynı başlangıç tutarına art arda uygulanması koşulunda sayısal sonuca etki etmez; ancak metinde yüzdeler farklı tabanlara bağlanmışsa bu koşul ayrıca incelenmelidir.

$$\text{Satış} = M\cdot(1+a/100)\cdot(1-d/100);\ \text{kâr/zarar yönü Satış}-M\ \text{farkının işaretine bağlıdır.}$$

Anlamı: Etiket artışı ve etiket indirimi iki ayrı fiyat çarpanı olarak hesaplanır.

Koşullar: $M>0$; $a\geq 0$; $0\leq d\leq 100$; indirim etiketin belirli yüzdesidir.

9. Başabaş satış ve yapılabilecek en yüksek indirim

Bir malın etiket fiyatı maliyetinden yüksekse satıcı kâr etmeksizin satabileceği en düşük fiyatı, toplam maliyet tutarı olarak belirler. Etiketten hangi oranda indirimle başabaş noktasına geleceği, maliyetin etiket içindeki payından hesaplanır. Etiket E ve maliyet M için E≥M olduğunda, indirim oranı d=100·(E−M)/E olarak bulunur. Bu oran etiketin yüzdesidir, maliyete göre kâr yüzdesi değildir. Etiketten daha fazla indirim yapıldığında giderlerin tamamı aynı kalıyorsa zarar başlar.

Örneğin maliyeti 900 TL, etiketi 1.200 TL olan ürün için başabaş satış 900 TL'dir. Etiketten 300 TL indirim yapılması gerekir; 300/1.200=%25 bulunur. Etiket üzerinden %25 indirimle fiyatın 900 TL olması ilk yoldan kontrol edilir. Etiketin maliyete göre artışı ise 300/900=%33,33… düzeyindedir. Bu nedenle “%33,33 kârla etiketlenen ürün %33,33 indirimle başabaş satılır” sonucu doğru değildir. E=1.200, M=900 örneğinde başabaş indirim yalnız %25'tir.

$$\text{Başabaş indirim oranı}\ (\%) = 100\cdot(E-M)/E.$$

Anlamı: Etiket-maliyet farkı, indirim etiket üzerinden uygulanacağı için etikete bölünür.

Koşullar: $E>0$ ve $0\leq M\leq E$; hesaplanan yüzde, başka ek satış gideri bulunmadığı varsayımına dayanır.

10. Sabit tutarlı indirim, yüzde indirim ve ödeme karşılaştırması

Bir indirim bazen yüzdeyle değil, doğrudan TL cinsinden ifade edilir. Sabit indirimde başlangıç fiyattan belirtilen tutar çıkarılır; yüzde indirimde ise tutar başlangıç fiyatının belirli oranıdır. İki teklifin hangisinin daha avantajlı olduğu, aynı ürün veya aynı miktar için gerçekten ödenecek son fiyatların karşılaştırılmasıyla anlaşılır. Sadece ilan edilen yüzdeye ya da indirim tutarına bakmak, başlangıç etiketleri farklıysa yanlış yönlendirebilir.

2.000 TL etiketli ürün için bir satıcı 280 TL doğrudan indirim, başka bir kampanya ise %12 indirim önersin. Birinci seçenek 1.720 TL, ikincisi 2.000·0,88=1.760 TL ödeme gerektirir; sabit indirim 40 TL daha avantajlıdır. Bu sonuç 280/2.000=%14 ile %12'nin karşılaştırılmasıyla da denetlenir. Fakat ilk satıcının etiketi 2.000 TL, diğerinin etiketi 1.900 TL olsaydı aynı yüzdeleri doğrudan karşılaştırmak yeterli olmazdı: her teklif kendi etiketine uygulanmalıydı.

11. Birden fazla üründe toplam maliyet, toplam gelir ve net sonuç

Farklı ürünler aynı anda satıldığında her ürünün kâr oranını ayrı hesaplayıp yüzdeleri toplamak ya da ürün çeşidi sayısına bölmek, toplam kâr oranını genellikle vermez. Toplam kâr, tüm satış gelirinden tüm maliyetlerin çıkarılmasıyla bulunur. Toplam kâr oranı için de bu farkın toplam maliyete bölünmesi gerekir. Farklı maliyetlerin ağırlıkları göz önüne alınmış olur. Bir ürün kâr ederken diğeri zarar edebilir; bütün işlem sonucunu yalnız ürünlerin tek tek kâr/zarar yönlerinden çıkarmak mümkün değildir.

Bir işletme üç adet ürünü 200'er TL maliyetle alıp 250'şer TL'ye, iki adet farklı ürünü de 300'er TL maliyetle alıp 270'er TL'ye satsın. İlk grup maliyeti 600 TL, geliri 750 TL ve kârı 150 TL'dir. İkinci grup maliyeti 600 TL, geliri 540 TL ve zararı 60 TL'dir. Toplam maliyet 1.200 TL, toplam gelir 1.290 TL, net kâr 90 TL ve toplam kâr oranı %7,5 olur. Bağımsız kontrol 150−60=90 ve 1.200·1,075=1.290 eşitlikleridir. İlk ürün grubunun %25, ikincinin %10 zarar etmesiyle bulunan yüzde farkı %15 olsa da toplamdaki gerçek oran %7,5'tir.

Farklı ürün gruplarının birleşik alışveriş hesabı

Grup	Adet	Birim maliyet	Birim satış	Toplam sonuç
Birinci ürün	3	200 TL	250 TL	+150 TL kâr
İkinci ürün	2	300 TL	270 TL	−60 TL zarar
Birleşik işlem	5	Toplam 1.200 TL maliyet	Toplam 1.290 TL gelir	+90 TL, %7,5 kâr

12. Stok kaybı, satılmayan ürün ve birim maliyetin dağılımı

Ürünlerin bir bölümü ziyan olduğunda, satılamadığında veya iade alınmadan elde kaldığında toplam maliyetin kaybolmadığı unutulmamalıdır. Bir ürünü satmamak, o ürüne ait edinim giderinin matematiksel olarak sıfırlanması değildir. Bütün stoktan doğan kâr-zarar, toplam gelirle bütün stokun maliyeti üzerinden hesaplanabilir. Ziyan ürünler dikkate alınmadan yalnız satılmış ürünlerin birim maliyetine bakılması, toplam sonucun olduğundan iyi görünmesine yol açabilir. Henüz elde kalan fakat ileride satılabilecek stokun kesin zarar sayılıp sayılmayacağı ise problemin muhasebe varsayımına bağlıdır; tamamlanmış satış hesabıyla dönem sonu stok değerlemesi farklıdır.

Bir satıcı 20 aynı ürünü birim 120 TL maliyetle edinmiş ve toplam 2.400 TL ödemiş olsun. Ürünlerin ikisi kullanılamaz hâle gelir ve hiç bedel getirmezse kalan 18 ürünün her biri 150 TL'ye satıldığında gelir 2.700 TL olur. Bütün parti üzerinden net kâr 300 TL, kâr oranı 300/2.400=%12,5'tir. Bu işlemin ikinci hesabında kullanılabilir 18 ürünün her birine ortalama 2.400/18=133,333… TL parti maliyeti düştüğü, her birinden 16,666… TL fark sağlandığı görülür; 18 katı 300 TL eder. Yalnız 18·(150−120)=540 TL yazmak, iki kayıp ürünün 240 TL maliyetini ihmal eder.

13. Paket, miktar indirimi ve birim fiyat karşılaştırması

Bir alışverişte “iki al bir öde”, “üç al iki öde” ya da paket fiyatı gibi kampanyalar birim başına ödenen tutarı değiştirir. Kampanyanın sağladığı gerçek indirimi bulurken satın alınan toplam ürünlerin normal satış bedeli ile kampanya ödemesi karşılaştırılır. Ancak kampanya yalnız belirli tam gruplara uygulanıyorsa kalan ürünler ayrıca hesaplanmalıdır. Birim fiyat kıyaslaması yapılırken ürünlerin aynı nitelik, miktar ve ölçü birimine sahip olması gerekir.

Birim fiyatı 90 TL olan aynı ürünlerde “üç al iki öde” kampanyası bulunsun. Üç ürün alan kişi normalde 270 TL ödeyecekken 180 TL öder; bu üçlü paket için indirim 90/270=%33,333...'tür. Beş ürün alındığında bir üçlü paketin bedeli 180 TL, kampanya dışı iki ürünün bedeli 180 TL, toplam ödeme 360 TL'dir. Normal bedel 5·90=450 TL olduğu için beş üründeki eşdeğer indirim 90/450=%20'dir; ürün başı ortalama ödeme 360/5=72 TL olur. Bu nedenle kampanya başlığındaki indirim oranı her adet için otomatik aynı değildir. Ters kontrol normal toplam 450−kampanya tasarrufu 90=360 eşitliğidir.

Adede bağlı kampanyanın farklı miktarlarda etkisi

Alınan adet	Kampanya öncesi bedel	Gerçek ödeme	Eşdeğer indirim
3	270 TL	180 TL	%33,333...
5	450 TL	360 TL	%20
6	540 TL	360 TL	%33,333...

14. Farklı alışveriş seçeneklerinde eşit miktar ve koşul arama

Birbiriyle karşılaştırılan tekliflerin fiyatları farklı paket büyüklükleri için verildiyse yalnız etiket tutarını karşılaştırmak anlamlı değildir. Her teklif için aynı miktarın gerçek toplam bedeli veya tek birim başına düşen fiyat bulunmalıdır. Ürünlerin birim sayısı, toplam ağırlığı ve satışta belirtilen alt-üst miktar sınırı hesaba dâhildir. Kampanya, belirli tarihte veya belli adedin üzerindeki alışverişte geçerliyse şartı sağlamayan senaryoya uygulanamaz.

Aynı kalemden 12 adet alınacağını varsayalım. Bir mağaza adedi 24 TL'ye satıyor ve indirim vermiyor; ödeme 12·24=288 TL olur. Diğer mağaza altılı paketi 132 TL'ye satıyor; iki paket 264 TL tutar. Üçüncü mağaza dörtlü paketi 92 TL'ye satıyor; üç paket 276 TL eder. Her teklif 12 kaleme indirgenince en düşük toplam ödeme 264 TL'dir. İkinci denetimde birim fiyatlar sırasıyla 24 TL, 22 TL ve 23 TL olarak bulunur; en düşük birim fiyatın aynı zamanda 12 adet için en düşük toplamı vermesi beklenen sonuçtur.

Aynı miktar için üç temsili satın alma seçeneği

Teklif	Paket/ürün fiyatı	12 adet için gerekli miktar	Toplam ödeme
Tekli ürün	24 TL	12 adet	288 TL
Altılı paket	132 TL	2 paket	264 TL
Dörtlü paket	92 TL	3 paket	276 TL

15. Ek giderler ve toplam satışta başabaş adet hesabı

Bazı ticari işlemlerde her bir ürün için değişen gider ve ayrıca toplam satıştan bağımsız sabit gider bulunur. Birim satış bedeli P, birim değişken maliyet V, toplam sabit gider F ve satılan birim sayısı n olduğunda toplam gelir nP, toplam gider F+nV ve net sonuç n(P−V)−F biçimindedir. P−V farkı, bir ürünün sabit giderleri karşılamak için sağladığı katkıdır. Bu fark pozitif değilse yalnız satış adedini artırarak sabit giderlerin karşılanması beklenemez. Hesaplanan başabaş adet kesirli çıkarsa ve ürünler bölünemiyorsa en az tam adet yukarı yuvarlanmalıdır.

Örneğin bir satış dönemi için sabit gider 4.500 TL, birim satış 75 TL ve birim değişken maliyet 45 TL olsun. Her satış sabit giderlere 30 TL katkı yapar; başabaş adet 4.500/30=150'dir. Gerçekten 150 ürün satılırsa gelir 11.250 TL, gider 4.500+150·45=11.250 TL olur. 180 adet satılırsa gelir 13.500 TL, gider 12.600 TL, net kâr 900 TL olur. Alternatif hesap 180·30−4.500=900'dür. Başabaş adet, tüm ticari faaliyetlerde sabit gider bulunacağı anlamına gelmez; yalnız problem böyle bir gider modelini verdiğinde uygulanır.

> $$\text{Net sonuç}=n\cdot P-(F+n\cdot V)=n(P-V)-F;\ \text{başabaş } n=F/(P-V).$$
>
> **Anlamı:** Birim satışla birim değişken gider farkı, sabit giderleri karşılama katkısıdır.
>
> **Koşullar:** $F\geq 0$, $n\geq 0$, $P>V$; sonuç tam adet gerektiriyorsa en küçük yeterli tam sayıya yuvarlanır.

16. Karma alışveriş ilişkisinden eksik fiyatı belirleme

Birden fazla ürünün birim fiyatı bilinmiyorsa, ödenen toplam tutarlardan denklem kurulabilir. Böyle durumlarda ilk iş, her ödeme toplamının kaç adet hangi ürünü içerdiğini yazmaktır. Yüzde indirim yalnız belirli ürün grubuna uygulanmışsa diğer ürünlerin bedellerini aynı yüzdeyle değiştirmek doğru değildir. Problemin çözülebilmesi için bilinmeyenleri belirlemeye yetecek sayıda bağımsız bilgi bulunması gerekir. Tek denklemden iki bağımsız fiyat genellikle kesin belirlenemez.

Aynı kırtasiyede iki defterle üç kalemin toplam fiyatı 198 TL, üç defterle iki kalemin toplam fiyatı 222 TL olsun. Defterin birim fiyatı d, kalemin birim fiyatı k ile gösterilirse 2d+3k=198 ve 3d+2k=222 denklemleri elde edilir. İlk denklemi üç, ikincisini ikiyle çarpıp çıkarınca 5k=150, k=30 TL bulunur; yerine koyma ile d=54 TL olur. Ters kontrol 2·54+3·30=198 ve 3·54+2·30=222'dir. Bu örnekte fiyatların pozitif çıkması da sonuçların alışveriş bağlamına uygunluğunu destekler.

17. Maliyet, etiket, indirim ve adet bilgisini birleştirme

Çok adımlı bir alışveriş probleminde üretim veya edinim adedi, toplam nakliye gideri, etiket artışı ve satış indirimi aynı anda bulunabilir. Bu durumda birim maliyeti önce bütün giderler dâhil belirlemek, sonra etiketi ve son satış gelirini hesaplamak doğru sıradır. Toplam gelir adede bağlı olduğundan son fiyatla satılan miktarın çarpıldığı son aşama atlanmamalıdır. Aynı yüzde bazen birim maliyet bazen etiket bazen de satış geliri üzerinde kullanılır; her adımda taban yeniden kontrol edilir.

Bir satıcı 150 ürünü 90'ar TL'ye satın almış ve bütün parti için ayrıca 900 TL taşıma gideri ödemiş olsun. Toplam maliyet 13.500+900=14.400 TL, birim maliyet 96 TL'dir. Satıcı ürüne birim 144 TL etiket koysun ve her ürünü etiket üzerinden %20 indirimle satsın. Son birim satış bedeli 144·0,80=115,20 TL, 150 ürünün toplam satış geliri 17.280 TL'dir. Net kâr 17.280−14.400=2.880 TL ve maliyete göre kâr oranı 2.880/14.400=%20 olur. İkinci denetimde birim fark 115,20−96=19,20 TL olup 150 katı 2.880 TL eder. Etiket, maliyetten %50 yüksek olmasına rağmen etiket üzerinden %20 indirim sonrası net kârın %30 değil %20 olması, iki yüzde tabanının farklılığından kaynaklanır: 1,50·0,80=1,20.

Birleşik alışveriş senaryosunun aşama denetimi

Aşama	Birim değer	Parti toplamı
Ürünlerin edinimi	90 TL	13.500 TL
Taşıma dâhil maliyet	96 TL	14.400 TL
Etiket fiyatı	144 TL	21.600 TL
%20 etiket indirimi sonrası satış	115,20 TL	17.280 TL
Net kâr	19,20 TL	2.880 TL

> **İndirimin tabanı ile kârın tabanı farklıdır** “Etiketten %25 indirim” ifadesi etiket üzerinden, “maliyete göre %25 kâr” ifadesi maliyet üzerinden ölçülür. İki oran doğrudan birbirinden çıkarılmaz. Oranların aynı para birimindeki tutarlara çevrilmesi veya ardışık fiyat çarpanlarıyla uygulanması gerekir.

18. Modelin sınırları, tutarlılık ve sonuç denetimi

Kâr-zarar problemlerinde hesaplanan yüzde, seçilen maliyet kapsamıyla sınırlıdır. Soru metni KDV, komisyon, taşıma ya da başka bir gider belirtiyorsa bu kalemin hangi bedele eklendiği ve hesaplamaya dâhil olup olmadığı açıkça izlenmelidir. Bir fiyata vergi dâhil veya hariç hesap yapılması iki farklı sonuç verebilir; gerçek bir yasal vergi oranını veya muhasebe kuralını soru söylemediği sürece varsaymak uygun değildir. Vergi ve faizle ilgili ayrıntılı modeller sonraki GY-03.06 başlığında işlenecektir.

Bir ürünün satış fiyatının 0'dan küçük bulunması, bedelsiz veya zarar amaçlı satışla ilgili özel bir model kurulmadığı sürece gerçek alışveriş bağlamına uymaz. %120 indirim uygulandığı ileri sürülen sıradan fiyat senaryosu matematiksel olarak negatif bedel doğuracağı için tanıma açıklık getirilmesini gerektirir. Buna karşılık %100 indirim ürünün ücretsiz verilmesini, satıcının belirtilen tüm maliyetini gelirle karşılayamamasını anlatabilir. Kâr oranı %100'ü aşabilir; örneğin 100 TL maliyetli ürün 250 TL'ye satıldığında kâr %150'dir. Ancak toplam maliyeti pozitif ve satış fiyatı negatif olmayan bir işlemde maliyet üzerinden zarar oranı %100'ün üzerine çıkamaz.

Alışveriş problemlerinde kontrol listesi

Sorudaki ifade	Gerekli taban veya işlem	Yaygın yanlış yorum
Maliyete göre %k kâr	Maliyet·(1+k/100)	Kâr oranını satışa bölmek
Maliyete göre %z zarar	Maliyet·(1−z/100)	Son tutardan aynı yüzdeyi çıkararak maliyeti aramak
Etiketten %d indirim	Etiket·(1−d/100)	İndirimi maliyete uygulamak
Üst üste iki indirim	Güncel fiyatları sırayla kullanmak	Yüzdeleri her durumda toplamak
Birden fazla ürünün sonucu	Toplam gelir−toplam maliyet	Yüzdeleri ağırlıksız toplamak
Kayıp stok veya ek gider	Bütün parti maliyetini korumak	Satılamayan ürünün giderini yok saymak
Paket kampanyası	Alınan gerçek adede göre ödeme	Her alışverişe aynı indirim oranını atamak

Alışveriş problemlerinin tamamında temel çözüm, tek bir yüzde formülünü ezberlemekten çok niceliklerin gerçek ilişkisini korumaktır. Maliyet ürünün satıcıya neye mal olduğunu, etiket ilan edilen bedeli, satış tutarı

gerçekleşen geliri gösterir. Kâr veya zarar bu son iki kavramın değil, gerçekleşen satış ile toplam maliyetin karşılaştırılmasıyla belirlenir. Farklı yüzdelerin hangi tutara uygulandığı, ürünlerin kaçının satıldığı ve ek giderlerin kime ait olduğu netleştirildiğinde birden fazla işlem içeren sorular da tek bir tutarlı hesap modeline dönüşür.

KONU 3.6

YÜZDE, FAİZ VE ORAN-ORANTI PROBLEMLERİ

Yüzde, faiz ve oran-orantı problemlerinde aynı nicelik farklı zamanlarda, farklı gruplarda veya farklı karşılaştırma temellerinde ele alınır. Sayısal güçlük çoğu zaman çarpma ya da bölmenin kendisinden değil, hangi sayının yüzde hesabının tabanı olduğunun belirlenmesinden kaynaklanır. Bir grupta başarı oranının artması ile başarılı kişi sayısının artması aynı olay değildir; yıllık faiz oranının verilmesi ile faizin bir yıl için işletilmesi de aynı şey değildir. Problemler, miktar, karşılaştırma tabanı, zaman ve uygulanacak oran birlikte tanımlandığında çözümlenir. Yüzdenin temel işlemleri GY-02.03'te, maliyet ve satışa bağlı indirim-kâr ilişkileri GY-03.05'te açıklandığından bu konu bunları tekrarlamak yerine çok adımlı oran problemlerine ve faiz modellerine yoğunlaşır.

1. Yüzdeli bir ifadeyi doğru niceliğe bağlamak

Bir miktarın yüzde p'si, miktarın p/100 ile çarpımıdır. Bununla birlikte yüzde p'nin hangi miktara uygulandığı anlaşılmadan işlem belirlenmiş olmaz. Bir kurumda görev yapanların %35'inin belirli bir eğitime katıldığını söylemek, toplam görevli sayısının %35'ini belirtir. Eğitime katılanların %35'inin başka bir sertifika aldığı söylenirse ikinci oran yalnız katılımcılar kümesine uygulanır. Bu iki taban genellikle farklıdır.

Bir eğitim programına toplam 720 kişi başvurmuş ve başvuranların %35'i ilk değerlendirmeyi geçmiş olsun. Geçenlerin sayısı 720·35/100=252'dir. İlk değerlendirmeyi geçemeyen 720−252=468 kişi bulunur. Kontrol için 252/720=%35 ve 468/720=%65 olduğu görülür; iki grup yine 720 kişiyi oluşturur. Geçenlerin %25'i ikinci aşamayı da tamamladıysa sayı 252·25/100=63 olur. İkinci aşamayı tamamlayanlar toplam başvuranların 63/720=%8,75'idir; ikinci oranı doğrudan 720'ye uygulamak 180 kişi sonucunu verir ve farklı bir cümleyi hesaplamış olur.

Yüzdede doğru tabanın seçilmesi

İfade	Hesaba giren taban	Sonucun anlamı
Başvuranların %35'i	Tüm başvuranlar	İlk aşamayı geçenler
Geçenlerin %25'i	İlk aşamayı geçenler	İkinci aşamayı tamamlayanlar
Kalanların %40'ı	Önceki işlemden sonra kalanlar	Kalan kümenin seçilen bölümü
İki grubun birleşik başarı yüzdesi	İki grubun toplam kişi sayısı	Birleşik grubun başarılı kişi oranı

$$\text{Parça} = B\cdot(p/100);\ p = 100\cdot\text{Parça}/B$$

Anlamı: B pozitif toplamı ve p yüzde oranını gösterir; parça ile bütün arasındaki ilişkinin iki yönlü yazımıdır.

Koşullar: Yüzde için kullanılan bütün B sıfırdan farklı olmalıdır. Bir oran bulunurken parça ve bütün aynı birimle ölçülmelidir.

2. Birbirini izleyen yüzdelerde değişen taban

Bir nicelik önce artırılıp sonra azaltıldığında, ikinci işlem ilk sayıya değil güncellenmiş sayıya uygulanır. Bu nedenle artış ve azalış yüzdelerini işaretleriyle toplamak genellikle toplam değişimi vermez. Her aşamada oluşan çarpanları bir arada değerlendirmek, başlangıç değerinin geri bulunmasını da kolaylaştırır.

Bir hizmetin aylık işlem adedi önce %15 artmış, sonraki ay bu yeni adedin %10'u kadar azalmış olsun. Başlangıçtaki 600 işlem sayısı ilk aşamadan sonra 600·1,15=690, ikinci aşamadan sonra 690·0,90=621 olur. Başlangıç ile son durum arasındaki fark 21 işlem, başlangıç tabanına göre değişim 21/600=%3,5 artıştır. 15−10=%5 hesabı doğru değildir; çünkü %10'luk azalma 600'den değil 690'dan alınmıştır. Denetim için 1,15·0,90=1,035 olup 600·1,035=621 sonucunu verir.

$$\text{Son değer} = \text{İlk değer}\cdot(1+a/100)\cdot(1-b/100)$$

Anlamı: İlk değişimde yüzde a artış ve ardından güncel tutarda yüzde b azalma bulunur.

Koşullar: İlk değer pozitifse yüzde değişim tanımı açıktır. İşlemler sıralı uygulanır; a ve b'nin işaretleri sözel artış/azalış anlamına göre belirlenir.

Aynı oranda artış ve azalış birbirini de geri almaz. Bir miktar %20 artırılıp yeni değer %20 azaltılırsa çarpan 1,20·0,80=0,96'dır ve başlangıca göre %4 azalma vardır. Başlangıç 250 birimse önce 300'e çıkılır, sonra 240'a inilir; 250'ye dönülmez. Yüzde artışın tam tersini yapmak için son değeri 1,20'ye bölmek gerekir. Artışın tersindeki azalma oranı başlangıç artış yüzdesinden farklıdır.

3. Ters yüzde hesabı ve bilinmeyen başlangıç miktarı

Bir problemi yalnız son durum üzerinden okurken başlangıç miktarını bilinmeyen x ile göstermek gerekir. Yüzde değişimi nedeniyle oluşan çarpan, x'in önündeki katsayı olur. Son tutarı doğrudan belirtilen yüzdeye bölmek yerine bu katsayıya bölmek gerekir.

Bir çalışmadaki kayıt adedi önce %20 artırılmış, ardından yeni miktar %10 azaltılmış ve sonuç 864 kayıt olmuş olsun. Başlangıç x kayıt ise x·1,20·0,90=864 ve 1,08x=864 olur. Dolayısıyla x=800'dür. İleri yönde kontrol: 800'ün %20 fazlası 960, 960'ın %10 eksiği 864'tür. Sonucun 864 olması, başlangıçta 864 kayıt bulunduğu ya da net %10 değişim olduğu anlamına gelmez; doğru net değişim %8 artıştır.

Ters yüzde problemlerinde çarpan yaklaşımı

Verilen son durum	Başlangıç için denklem	İşlem
%30 artıştan sonra 780	1,30x=780	x=780/1,30=600
%25 azalıştan sonra 450	0,75x=450	x=450/0,75=600
%20 artış ve ardından %10 azalıştan sonra 864	1,08x=864	x=864/1,08=800
Art arda %10 ve %10 artıştan sonra 121	1,21x=121	x=100

4. Birden fazla grupta yüzde ile toplam sayı arasındaki ayrım

Farklı büyüklükte grupların yüzdeleri karşılaştırıldığında mutlak kişi sayısı ve yüzde oranı birlikte incelenmelidir. Büyük grubun daha düşük başarı oranına sahip olması, başarılı kişi sayısının da az olduğu anlamına gelmez. Gruplar birleştirildiğinde yüzdelerin basit aritmetik ortalaması ancak grup büyüklükleri eşitse toplam yüzdesini verir.

Birinci grupta 600 kişinin 180'i, ikinci grupta 400 kişinin 132'si bir uygulamayı başarıyla tamamlamış olsun. Birinci grubun oranı 180/600=%30, ikinci grubunki 132/400=%33'tür. İkinci grup oran bakımından 3 yüzde puan öndedir; buna rağmen birinci gruptaki başarılı kişi sayısı 48 daha fazladır. Birleşik başarı oranı (180+132)/(600+400)=312/1000=%31,2 olur. %30 ile %33'ün ortalaması olan %31,5 birleşik oran değildir; gruplar 600 ve 400 kişiyle farklı ağırlık taşımaktadır.

$$\text{Birleşik oran} = (B_1 \cdot p_1 + B_2 \cdot p_2)/(B_1 + B_2)$$

Anlamı: p_1 ve p_2 ondalık oran; B_1 ve B_2 ilgili grupların büyüklükleridir. Pay toplam parça sayısını verir.

Koşullar: B_1 ve B_2 sıfır veya pozitif; toplamları pozitif olmalı, oranlar aynı olay ve aynı tür birimler için tanımlanmalıdır.

Bu eşitliği bir tabloyla düşünmek mümkündür. Her grubun kendi yüzde değeri, kendi grup büyüklüğüyle çarpılıp sayı miktarına çevrilir. İlgili miktarlar toplanıp tüm kişi sayısına bölündüğünde tek bir birleşik yüzde bulunur. Oranların doğrudan toplanması veya ortalamasının alınması başlangıçtaki kişi sayılarını göz ardı eder.

5. Yüzdenin yüzdesi ve aşamalı alt gruplar

Bir grubun belirli yüzdesi seçilip seçilenlerin içinden ikinci bir yüzde ayrıldığında iki oran çarpılarak başlangıçtaki grubun ne kadarının son alt gruba girdiği bulunur. Bu, “toplamın yüzdesi” ile “önceden seçilmiş parçanın yüzdesi” ayrımının çok adımlı hâlidir.

Bir kurumda 2.400 kayıt bulunduğunu, kayıtların %35'inin denetlendiğini ve denetlenenlerin %40'ının ayrıntılı incelemeye alındığını düşünelim. İlk seçilen 2.400·0,35=840 kayıttır. İkinci işlem 840·0,40=336 kayıt verir. Başlangıç toplamına göre son oran 336/2.400=0,14, yani %14'tür. Oranların çarpımı 0,35·0,40=0,14 şeklinde de aynı sonucu gösterir. Buradaki %14, denetlenmeyenler hakkında bir bilgi içermez; yalnız denetlenenlerin içinden seçilen alt grubu belirtir.

İç içe grup oranlarının birleştirilmesi

Adım	Kişi veya kayıt miktarı	İlk bütüne göre oran
Başlangıç	2.400	%100
Denetlenen	840	%35
Ayrıntılı incelemeye alınan	336	%14
Denetlenip ayrıntılı incelemeye alınmayan	504	%21

6. Yüzde puan ile yüzde değişimin birbirinden ayrılması

Yüzdeyle ifade edilen bir oranın iki zaman arasındaki farkı yüzde puan cinsinden söylenebilir. Buna karşılık oranın kendi önceki değerine göre ne kadar değiştiği başka bir yüzdedir. Bu kavramların birbirinin yerine kullanılması verilerin yanlış yorumlanmasına yol açar.

Bir değerlendirmedeki başarı oranı %24'ten %30'a çıkmış olsun. Fark 30−24=6 yüzde puandır. Başlangıç oranına göre oransal artış ise (30−24)/24=6/24=%25'tir. “Başarı %6 arttı” cümlesi, hangi anlamda kullanıldığı belirtilmezse belirsizdir. Ayrım düşüşte de geçerlidir: %45'ten %36'ya inen bir oran 9 yüzde puan azalır; başlangıçtaki %45'e göre oransal düşüş 9/45=%20'dir.

$$\text{Yüzde puan farkı} = p_2 - p_1;\ \text{Oransal değişim yüzdesi} = 100\cdot(p_2-p_1)/p_1$$

Anlamı: p_1 ve p_2 yüzde birimiyle ifade edilmiş başlangıç ve son oranlardır. İlki yüzde puan, ikincisi eski orana göre yüzde değişim verir.

Koşullar: Oransal değişim formülünde p_1 sıfırdan farklı olmalıdır; $p_1=0$ ise standart göreli yüzde değişim tanımsızdır.

7. Oranla paylaştırma ve sonradan değişen grup dağılımı

İki veya daha fazla miktarın birbirine oranı verildiğinde önce aynı ortak çarpanla temsil edilen parçalar tanımlanır. Toplam verildiğinde parçaların katsayı toplamı ile ortak çarpan bulunur. Bundan sonra yüzdeli değişimler yeni miktarlara uygulanır; oran başlangıçta doğru olsa bile gruplar arasında aktarım olduğunda yeniden hesaplanması gerekir.

900 birimlik bir bütçe üç çalışma alanına 2:3:5 oranında ayrılmış olsun. Paylar 2k, 3k, 5k ise 10k=900 ve k=90'dır. Alanlar sırasıyla 180, 270 ve 450 birim alır. İkinci ve üçüncü alanların toplamı 720, tüm bütçenin %80'idir. Doğrulama: 180+270+450=900; oranları 180/90=2, 270/90=3, 450/90=5'tir.

Başlangıçta A grubunda 180, B grubunda 270 kişi bulunsun; iki grubun oranı 2:3'tür. B grubunun %10'u yani 27 kişi A grubuna aktarılırsa yeni sayılar A için 207, B için 243 olur. Toplam yine 450 kişidir; yeni oran 207:243=23:27'dir. A'nın tüm kişilere oranı başlangıçta %40 iken aktarım sonrasında 207/450=%46 olur. Grup içindeki %10'luk aktarımın tüm kişilerde %10'luk artış oluşturmadığı burada görülür.

Oran ve yüzde sorularında değişkenin seçimi

Koşul	Matematiksel gösterim	Denetim
A:B=2:3, toplam 450	A=2k, B=3k, 5k=450	A=180, B=270
B'nin %10'u A'ya aktarılıyor	Aktarım=270·0,10=27	Toplam hâlâ 450
Yeni A:B oranı	207:243=23:27	23+27=50 pay; k=9
A'nın toplam içindeki yeni yüzdesi	207/450·100	%46

8. Birleşik yüzde-oran problemini tek denklemde toplamak

Bir problemde hem yüzde hem de kalan miktarın kesri kullanılıyorsa önce grupların birbirinden ayrılıp ayrılmadığı saptanmalıdır. Ayrık gruplar varsa bunların toplamı başlangıçtaki bütünü verir. Kalanın payı ikinci kez başlangıç sayısı yerine kullanılırsa sonuç bozulur.

1.200 başvurunun %45'i A işlem türüne ayrılmış olsun. A grubunda 1.200·0,45=540 kayıt vardır; kalan 660 kaydın 2/5'i B işlem türüne girer. Böylece B sayısı 660·2/5=264, iki işlem türü dışında kalanlar 660−264=396 olur. Bu grupların toplamı 540+264+396=1.200'dür. Başlangıçtaki bütün üzerinden payları sırasıyla %45, %22 ve %33'tür. A:B oranı 540:264 olup 45:22'ye sadeleşir. Eğer B oranı yanlışlıkla 1.200'ün 2/5'i olarak okunursa 480 kayıt bulunur ve verilen “kalanın” sözcüğü göz ardı edilmiş olur.

9. Faiz problemlerinde anapara, oran ve zaman

Faiz, belirli bir anaparanın belirli süre boyunca kullanılmasına karşılık hesaplanan tutardır. Matematik problemlerinde anapara P, faiz tutarı F, dönemlik oran r ve süre t ile gösterilebilir. Faiz hesabındaki en önemli iki soru, oranın hangi süreye ait olduğu ve faizin her dönemde hangi tutar üzerinden hesaplandığıdır. Yıllık %12 oran, kendiliğinden aylık %12 anlamına gelmez. Ayrıca basit faizde her dönem ilk anapara esas alınırken bileşik faizde dönem sonunda oluşan tutar bir sonraki dönemin yeni tabanı olabilir.

Faiz getirisinin banka hesabındaki net ödeme ile her zaman aynı olması gerekmez. Vergi, kesinti, ek masraf, dönem içinde para yatırma veya çekme gibi unsurlar verilmişse ayrıca hesaba katılmalıdır. Bu kitapta oran ve tutarlar öğretici varsayımlar olarak ele alınır; gerçek bir bankanın güncel faiz teklifini veya yürürlükteki vergi oranını temsil etmez. Finansal koşulları belirtilmeyen bir soruda verilen bilgiden fazlası kendiliğinden eklenmez.

Faiz değişkenlerinin anlamı

Sembol	Nicelik	Ölçü ve sınır
P	Başlangıç anaparası	TL; standart örnekte P≥0
r	Bir faiz dönemi için ondalık faiz oranı	Örneğin yıllık %9 için 0,09
t	Faiz süresi	Faiz oranının dönemine dönüştürülmeli
F	Faiz geliri veya gideri	TL; modelin sonucudur
T	Dönem sonu toplamı	TL; P+F veya bileşik model sonucu

10. Basit faiz: anapara değişmeden dönemlik getiri

Basit faizde faiz, süre boyunca başlangıçtaki anapara üzerinden hesaplanır. Dönemlik faiz oranı r ise bir dönemde Pr, t dönemlik sürede Prt faiz oluşur. Süre bir yıl, oran yıllık %n olduğunda r=n/100 alınır. Örneğin 8.000 TL'nin yıllık basit %9 faizle 8 ay tutulduğunu varsayalım. Sekiz ay 8/12 yıl olduğundan F=8.000·0,09·(8/12)=480 TL'dir. Dönem sonunda anapara ve faiz toplamı 8.480 TL olur. Ters kontrol: bir yıllık faiz 720 TL, sekiz ay yıllık faizin 8/12'si olan 480 TL'ye karşılık gelir.

$$F=P\cdot r\cdot t;\ T=P+F=P\cdot(1+r\cdot t)$$

Anlamı: Basit faizde F faiz tutarı, T dönem sonu toplamı, r dönem başına ondalık oran, t aynı tür dönem sayısıdır.

Koşullar: Oran ile süre aynı dönem biriminde olmalı, faizin anaparaya eklenip yeniden faizlendirilmediği varsayılmalıdır.

Basit faiz modeli için süre birimi "Yıllık %n faiz" bir yıllık oranı belirtir. t ay için t/12, t gün için de sorunun açıkça benimsediği gün sayısı esas alınır. 360 günlük ticari yıl ile 365 günlük yıl farklı tutar üretir; sorunun vermediği banka kuralı varsayılmaz.

Basit faizde bir yılda oluşan faizi dört ayrı üç aylık döneme ayırmak, anapara ve yıllık oran değişmediği sürece toplam faizi değiştirmez. Ancak bu eşitlik bileşik faiz için geçerli değildir; bileşikte ilk dönemin faizi daha sonra yeniden getiri üretebilir.

11. Basit faizde bilinmeyen anapara, oran ve süre

Bir basit faiz probleminde dört nicelikten üçü verildiğinde dördüncüsü aynı eşitlikten bulunabilir. Dönem sonu toplamı veriliyorsa önce faiz tutarı ile toplam anapara ayrılmalıdır. Eğer faiz ve anaparanın her ikisi bilinmiyorsa yalnız toplamı bilmek tek başına yeterli olmayabilir; oran ve süre de gereklidir.

Yıllık basit %15 faiz uygulandığında bir yıl sonunda toplam 13.800 TL olduğu bilinen bir tutarın başlangıç değeri x olsun. T=x·1,15=13.800 olduğundan x=12.000 TL bulunur. Bir yıllık faiz 1.800 TL'dir; 12.000+1.800=13.800 kontrolü sağlanır. Yalnızca 13.800'ün %15'ini çıkarıp 11.730 bulmak hatalıdır; yüzde başlangıç anaparasına uygulanmıştır.

7.200 TL'nin yıllık basit %10 faizle işletildiğinde 1.080 TL faiz kazandığı bir örnekte 1.080=7.200·0,10·t ve t=1,5 yıl elde edilir. Bu süre 18 aydır. Bir yıllık faiz 720 TL, kalan yarım yıllık faiz 360 TL'dir; toplam 1.080 TL olduğundan süre hesabı ayrı yoldan doğrulanır.

Başlangıç 9.000 TL, faiz tutarı 480 TL ve süre 8 ay verilmişse yıllık faiz oranı r=480/[9.000·(8/12)]=0,08; yani yıllık %8 olur. Sekiz ay için yıllık %8'den üretilen faiz 9.000·0,08·8/12=480 TL'dir.

$$P=F/(r\cdot t);\ r=F/(P\cdot t);\ t=F/(P\cdot r)$$

Anlamı: Basit faizin üç bilinmeyeni, F=P·r·t eşitliğinin yeniden düzenlenmesiyle bulunur.

Koşullar: Bölmede kullanılan r, t veya P sıfır olmamalıdır. Sıfır faiz özel durumunda genel cebirsel bölme uygulanmadan olası nedenler incelenir.

12. Günlük faiz ve yılın kaç gün kabul edildiği

Yıllık oranla belirli sayıda gün için faiz hesaplandığında zaman, yılın seçilen gün sayısına bölünerek belirlenir. Eğitim amaçlı bazı sorular 360 gün, bazıları 365 gün kabul eder. İki hesaplama aritmetik olarak doğrudur; farklı sonuç doğurduklarından, öncelik metindeki açık kabuldedir. Gerçek finansal ürünlerde hesaplama takvimi ve sözleşme koşulları değişebilir.

36.000 TL'nin yıllık basit %12 oranla 30 gün değerlendirildiği bir örnekte 360 günlük yıl kabulüyle F=36.000·0,12·30/360=360 TL olur. Aynı örnek 365 günlük yıl kabul edilirse F=36.000·0,12·30/365≈355,07 TL'dir. İlk sonuç 30 günün yılın 1/12'si alınmasından, ikincisi 30/365 yıl alınmasından kaynaklanır. Her iki hesabın yıllık faiz tutarı 4.320 TL'dir; yalnız uygulanan yıl kesri değişir.

Günlük basit faiz için iki açık süre varsayımı

Varsayım	Kullanılan süre	36.000 TL, yıllık %12, 30 gün
360 günlük yıl	30/360 yıl	360,00 TL faiz
365 günlük yıl	30/365 yıl	Yaklaşık 355,07 TL faiz
Bir tam yıl	1 yıl	4.320,00 TL faiz

13. Farklı anapara, oran ve sürelerin karşılaştırılması

İki faiz seçeneğinde yalnız yüzde oranına bakmak, anapara veya süre farklıysa yanlış karşılaştırma doğurur. Basit faizde gerçek getiri, anapara, dönemlik oran ve aynı birime çevrilmiş sürenin çarpımıdır. Faiz tutarları karşılaştırılırken aynı dönem ve aynı şart altında hesaplandıkları doğrulanmalıdır.

Birinci seçenek 10.000 TL için yıllık %12 basit faizle 9 ay, ikinci seçenek 8.000 TL için yıllık %15 basit faizle 8 ay olsun. İlk getiri 10.000·0,12·9/12=900 TL, ikinci getiri 8.000·0,15·8/12=800 TL'dir. İkinci oran daha yüksek olmasına karşın birinci getirisi 100 TL daha fazladır. İlk tutarın bir yıllık faiz geliri 1.200 TL, ikinci tutarınki de 1.200 TL'dir; süreler 9 ve 8 ay olduğundan getiriler bu ortak yıllık tabanın sırasıyla 9/12 ve 8/12 kısmıdır.

14. Bileşik faizin basit faizden farkı

Bileşik faiz, belirlenmiş her faiz döneminin sonunda o dönemde oluşan faizin tutara eklenmesi ve sonraki faizin büyüyen taban üzerinden hesaplanmasıdır. Basit faizle temel fark burada bulunur. Yıllık r oranı ile n tam yıl boyunca yılda bir kez bileşikleştirme yapılırsa toplam P·(1+r)^n olur. Bileşikleştirme sıklığı değişirse bir döneme düşen oran ve toplam dönem sayısı da yeniden tanımlanmalıdır.

10.000 TL, yıllık %10 faizle iki yıl boyunca, faizin her yıl sonunda anaparaya eklendiği varsayımıyla değerlendirilsin. Birinci yıl 1.000 TL faiz eklenir ve 11.000 TL oluşur. İkinci yılın faizi bu yeni tutarın %10'u, yani 1.100 TL'dir. Toplam 12.100 TL, iki yıllık bileşik faiz 2.100 TL olur. Formülden $10.000 \cdot (1{,}10)^2 = 12.100$ TL aynı sonucu verir. Aynı ilk anapara ve yıllık %10 oran için basit faizle iki yıllık faiz $10.000 \cdot 0{,}10 \cdot 2 = 2.000$ TL, toplam 12.000 TL olur. İki modelin 100 TL'lik farkı birinci yılın 1.000 TL faizinin ikinci yılda doğurduğu 100 TL faizdir.

$$T = P \cdot (1+r)^{n};\ F = T - P$$

Anlamı: r, bileşikleştirmenin yapıldığı her dönem için ondalık oran; n toplam bileşikleştirme dönemi sayısıdır.

Koşullar: Oran her dönemde aynı kabul edilir; dönem sonunda elde edilen faiz sonraki dönemin hesabına katılır. Kesinti, ara ödeme ve oran değişikliği bulunmaz.

Aynı örnekte basit ve bileşik faiz

Aşama	Basit faizle toplam	Yıllık bileşik faizle toplam
Başlangıç	10.000 TL	10.000 TL
Birinci yıl sonu	11.000 TL	11.000 TL
İkinci yıl sonu	12.000 TL	12.100 TL
İki yıllık faiz toplamı	2.000 TL	2.100 TL

15. Bileşikleştirme sıklığı ve nominal oranı yorumlama

Bir yıllık faiz oranı, her yıl yerine üç ayda bir bileşikleştiriliyorsa belirli varsayımlarla farklı dönemlere ayrılır. Yıllık nominal %12 oran ve üç ayda bir eşit bileşikleştirme açıkça verilmişse her üç aylık dönem oranı %12/4=%3'tür. Altı ayda iki dönem bulunduğundan toplam çarpan $(1{,}03)^2$ olur. Bu varsayım, yıllık %12'nin her üç ay doğrudan %12 olarak uygulanması anlamına gelmez.

20.000 TL'nin yıllık nominal %12 oranla üç ayda bir bileşikleştirildiği altı aylık örnekte ilk çeyrek sonunda $20.000 \cdot 1{,}03 = 20.600$ TL, ikinci çeyrek sonunda $20.600 \cdot 1{,}03 = 21.218$ TL elde edilir. Altı aylık faiz 1.218 TL'dir. Bir yıllık %12 basit faiz oranı aynı altı aylık süre için kullanılsaydı faiz $20.000 \cdot 0{,}12 \cdot 1/2 = 1.200$ TL olurdu. Fark 18 TL'dir; ilk üç ayın 600 TL faizinin ikinci üç ayda kazandığı %3, yani 18 TL, bileşikleştirmenin etkisini gösterir.

$$T = P \cdot (1+r_y/m)^{(m \cdot t)}$$

Anlamı: r_y yıllık nominal ondalık oran, m bir yıldaki eşit bileşikleştirme sayısı, t yıl cinsinden süredir.

Koşullar: Her dönemin oranı r_y/m olarak tanımlanmış; m pozitif tam sayı, m·t tam dönem sayısı ve dönem aralarında para hareketi yoktur.

Nominal oran ile bir yılda oluşan gerçek bileşik artış oranı da aynı sayı olmayabilir. Yukarıdaki yıllık nominal %12 ve üçer aylık dönem varsayımında bir yıldaki büyüme çarpanı $(1{,}03)^4 = 1{,}12550881$'dir. Yıllık bileşik artış oranı böylece %12,550881 olur. Bu değer, aynı oranın yalnız yılda bir kez eklendiği %12'den büyüktür. Burada amaç finansal ürünlerin gerçek yıllık maliyetini tüm kesintileriyle hesaplamak değil, aynı nominal orandan farklı bileşikleştirme sayılarıyla farklı matematiksel sonuç doğduğunu göstermektir.

Faiz oranı ve hesap şartları Basit faiz ile bileşik faiz sorularında sürenin ve oranın dönemi birlikte belirtilmelidir. Gerçek kredi ve mevduatlarda masraflar, vergiler, kesintiler, erken ödeme veya taksitli anapara değişimi bulunabilir. Bu kalemler verilmeden yalnız basit ya da bileşik faiz formülüyle "gerçek toplam maliyet" bulunduğu iddia edilmez.

16. Taksitli ödeme ile vade sonu tek ödemeyi karıştırmamak

Basit faiz sorularındaki P·r·t eşitliği, anaparanın bütün süre boyunca değişmeden kullanıldığı varsayımına dayanır. Kredi taksitleri her dönemde anaparadan ödeme içeriyorsa kalan borç azalabilir ve sonraki dönem faizi kalan borca göre hesaplanır. Bu durumda başlangıç anaparasını tüm süreyle çarpmak, taksitlerin etkisini dışarıda bırakır. Bir taksit probleminin doğru çözülebilmesi için ödeme sayısı, dönemlik oran, taksitlerin zamanlaması ve varsa giderler belirlenmelidir. Bu bilgiler verilmedikçe "aylık taksit" tutarına güvenilir bir değer atanamaz.

Matematiksel karşılaştırmanın açık olduğu sınırlı bir örnekte, 6.000 TL'nin yıllık %10 basit faizle bir yılın sonunda tek seferde ödeneceği ifade edilirse faiz 600 TL, son ödeme 6.600 TL'dir. Aynı 6.000 TL'nin yıl içine dağıtılmış taksitlerle geri ödeneceği söylendiğinde ise tek bir 6.600 TL sonucu zorunlu değildir; ödeme zamanları ve faiz hesabı farklı model gerektirir. Burada bilinmeyen veri bir hesaplama eksikliği değil, problemin tanımının eksik olmasıdır.

17. Yüzde ve faiz içeren çok adımlı karar problemleri

Yüzde hesabıyla faiz hesabı bir araya getirildiğinde iki işlem aynı zaman noktasında uygulanmayabilir. Önce bir miktarın belirli yüzdesinin kullanıldığı, kalan miktarın ise faizle değerlendirildiği bir durumda faiz anaparası başlangıçtaki bütçenin tamamı değildir. Örneğin 24.000 TL'nin %25'i bir gider için ayrılmış, kalan para yıllık %8 basit faizle altı ay değerlendirilmiş olsun. Gider 24.000·0,25=6.000 TL, faiz anaparası 18.000 TL'dir. Altı aylık getiri 18.000·0,08·6/12=720 TL, faizli bakiye 18.720 TL olur. Başlangıç bütçesine göre faiz kazancı 720/24.000=%3'tür. Faiz anaparasına göre altı aylık getiri ise 720/18.000=%4'tür. Her iki yüzde de doğrudur; farklı tabanlara aittir.

Başlangıçtaki bütçeye geri dönüş yapılmak istenirse elde kalan 18.720 TL ile ayrılan ve harcanan 6.000 TL birlikte düşünülür: 18.720+6.000=24.720 TL. Bu toplam, bütçenin nerelere ayrıldığını muhasebeleştiren varsayımsal bir bilanço eşitliğidir; 6.000 TL gerçekten harcanmışsa kullanılabilir nakit toplamı 18.720 TL'dir. Problemde "toplam değer", "nakit bakiye" ve "harcama" gibi ifadeler birbirinden ayrılmalıdır.

Yüzde, oran ve faiz problemlerinde son kontrol

Kontrol sorusu	Doğru yorum	Sık hata
Yüzde hangi miktara uygulanıyor?	İlgili aşamanın bütününe	Her yüzdeyi ilk sayıya uygulamak
Oranların grupları eşit büyüklükte mi?	Toplam başarı sayılarından birleşik oran bulmak	Yüzdeleri ağırlıksız ortalamak
Fark yüzde mi, yüzde puan mı?	Önceki oranı ayrıca belirlemek	İki yüzdeyi çıkardıktan sonra "yüzde artış" demek
Faiz oranı hangi döneme ait?	Süreyi aynı dönem birimine çevirmek	Yıllık oranı aynen aylık orana uygulamak
Faiz basit mi, bileşik mi?	Sabit anapara veya büyüyen tutarı ayırmak	Biriken faizi yanlış tabandan yeniden hesaplamak
Günlük faizde yıl kaç gün?	Sorudaki 360/365 kabulünü kullanmak	Belirtilmeyen kabulü kesin saymak
Ödeme koşulları tam mı?	Taksit ve masrafları verilerle modellemek	Her borcu vade sonu tek ödeme saymak

Bu tür problemlerde ortak yöntem, önce birim ve tabanı tanımlayıp ardından sözel değişimleri matematiksel eşitliklere çevirmektir. Yüzde ve oran karşılaştırmalarında parçaların gerçekten aynı bütüne ait olması; faiz problemlerinde ise aynı anapara, oran dönemi ve süre varsayımının korunması gerekir. Sonucu ters işlem, grup toplamı veya her dönem için ayrı faiz hesabıyla doğrulamak, yalnız işlem yanlışlarını değil sözel koşulun yanlış okunmasını da ortaya çıkarır.

KONU 3.7

KARIŞIM PROBLEMLERİ

Karışım problemleri, birden fazla maddenin bir araya gelmesi veya mevcut bir karışımdan bir miktar alınması sonrasında bileşenlerin yeni toplam içindeki payını bulmaya dayanır. Sorular çoğunlukla tuzlu su, şekerli su, meyve suyu, metal alaşımı veya farklı fiyatlı ürünlerin birlikte değerlendirilmesi üzerinden anlatılır. Matematiksel bakımdan ortak düşünce aynıdır: Toplam miktar ile izlenen bileşenin miktarı ayrı kaydedilir; yeni oran, son bileşen miktarının son toplam miktara bölünmesiyle hesaplanır. Önceki konularda öğrenilen yüzde, oran ve birinci dereceden denklem bilgileri burada değişen bir karışımın korunmuş veya değişmiş bileşenlerini izlemek için kullanılacaktır.

1. Karışımın bütünü, bileşeni ve derişim oranı

Bir karışımın içindeki belirli bir maddeye, bu bölümde 'izlenen bileşen' denilecektir. Tuzlu su örneklerinde izlenen bileşen genellikle tuz, diğer bileşen sudur. Karışımın toplam kütlesi M gram, tuz kütlesi S gram ise tuzun kütlece oranı S/M'dir; yüzde değeri bu oranın 100 ile çarpılmasıyla elde edilir. M sıfırdan büyük, S ise 0 ile M arasında veya uç değerlere eşit olmalıdır. Örneğin 400 gramlık, kütlece %15 tuz içeren bir karışımda tuz 400·0,15=60 gram, tuz dışındaki miktar 340 gramdır. Geriye doğru 60/400=0,15 hesabı başlangıç yüzdesini doğrular.

$$r=S/M;\ p=100\cdot S/M;\ S=M\cdot p/100;\ M=S/(p/100)$$

Anlamı: M toplam kütle, S izlenen bileşenin kütlesi, r ondalık oran, p aynı oranın yüzde cinsinden değeridir.

Koşullar: $M>0$; $0\le S\le M$; $0\le p\le 100$. Formülde S'den toplam M bulunurken p sıfır olmamalıdır. Tüm nicelikler aynı kütle birimindedir.

'Yüzde 15 tuzlu su' ifadesindeki 15, 100 gram karışımda 15 gram tuz bulunması demektir; 100 gram suya 15 gram tuz eklenmesi demek değildir. İkinci durumda toplam 115 gram olur ve tuz oranı 15/115≈%13,04'tür. Sözel ifadenin hangi miktarı bütün kabul ettiği bu yüzden belirleyicidir. 'Kütlece yüzde' ile 'hacimce yüzde' de aynı kavram değildir; soru açık bir hacim modeli vermedikçe biri diğerinin yerine kullanılmaz.

Karışım yüzdesinde bütün ve parça ayrımı

Verilen durum	Toplam kütle	İzlenen madde	İzlenen maddenin yüzdesi
400 g karışımın %15'i tuz	400 g	60 g tuz	%15
100 g suya 15 g tuz eklenmesi	115 g	15 g tuz	Yaklaşık %13,04
250 g karışımın %0'ı tuz	250 g	0 g tuz	%0
250 g saf tuz	250 g	250 g tuz	%100

2. İki bileşenli ve çok bileşenli karışımlar

Bir karışım yalnız iki maddeden oluşuyorsa izlenen maddenin yüzdesi bilindiğinde diğerinin yüzdesi 100'den çıkarılarak bulunur. Üç ya da daha fazla maddede ise tüm yüzdelerin toplamı yine 100'dür, fakat tek bir bileşenin oranından diğer bileşenlerin ayrı ayrı oranları belirlenemez. Toplam ile parçaların açıkça yazılması bu tür çok bileşenli sorularda eksik veriyi fark etmeyi sağlar.

Örneğin 120 gram şeker ve 280 gram sudan oluşan karışımın toplamı 400 gramdır. Şeker oranı 120/400=%30, su oranı 280/400=%70'tir. Toplam kontrolü %30+%70=%100 verir. Bir başka karışımda 45 gram tuz, 75 gram şeker ve 180 gram su olsun. Toplam 300 gramdır. Tuz %15, şeker %25 ve su %60 olduğundan yüzdelerin toplamı %100 olur. Şekerin tuza oranı 75/45=5/3'tür; bu oran şekerin karışımdaki %25 payıyla karıştırılmamalıdır. 'Şekerin tuza oranı' ile 'şekerin bütüne oranı' farklı paydalar kullanır.

Üç bileşenli örnekte oran tabanı

İfade	Pay	Payda	Sonuç
Tuzun tüm karışıma oranı	45 g	300 g	%15
Şekerin tüm karışıma oranı	75 g	300 g	%25
Suyun tüm karışıma oranı	180 g	300 g	%60
Şekerin tuza oranı	75 g	45 g	5/3
Tuzun suya oranı	45 g	180 g	1/4

3. Karışımları birleştirirken ağırlıklı ortalama

Aynı izlenen maddeyi içeren iki karışım birleştirilirken her karışımdaki izlenen madde miktarları toplanır. Birinci karışımın toplam kütlesi M_1 ve bileşen yüzdesi p_1; ikinci karışımın toplam kütlesi M_2 ve bileşen yüzdesi p_2 olsun. İzlenen maddenin kütlesi sırasıyla $M_1 \cdot p_1/100$ ve $M_2 \cdot p_2/100$'dür. Karışım sırasında madde kaybı ve kimyasal dönüşüm olmadığı, kütlelerin toplandığı kabulüyle yeni toplam M_1+M_2 olur. Son yüzde, bu iki bileşen kütlesinin toplamının yeni toplam kütleye oranıdır. Farklı büyüklükteki karışımların yüzdelerinin aritmetik ortalaması doğrudan kullanılmaz.

$$p_{yeni}=(M_1\cdot p_1+M_2\cdot p_2)/(M_1+M_2)$$

Anlamı: p_1, p_2 ve p_{yeni} yüzde birimindedir; M_1 ile M_2 aynı kütle birimindedir. Yeni yüzde, kütlelerle ağırlıklandırılmış ortalamadır.

Koşullar: $M_1, M_2 \geq 0$; $M_1+M_2>0$. Her iki oran aynı maddenin aynı tür yüzdesidir. Bileşen kaybı, çökelme veya kimyasal değişim yoktur.

250 gramlık %12 şekerli karışım ile 150 gramlık %32 şekerli karışım birleştirilsin. İlkinde 30 gram, ikincisinde 48 gram şeker vardır. Toplam 400 gram karışımda 78 gram şeker bulunur; yeni yüzde 78/400·100=%19,5'tir. Ayrı bir yöntemle (250·12+150·32)/400=19,5 elde edilir. %12 ile %32'nin eşit ağırlıklı ortalaması %22'dir; karışımların kütleleri eşit olmadığından bu değer doğru değildir. Son yüzde, başlangıçtaki iki oran arasında kalmalıdır; %19,5 bu denetimi de karşılar.

İki karışımın birleştirilmesinde korunmuş miktarlar

Durum	Karışım kütlesi	Şeker yüzdesi	Şeker kütlesi
Birinci karışım	250 g	%12	30 g
İkinci karışım	150 g	%32	48 g
Yeni karışım	400 g	%19,5	78 g

4. Hedef yüzdeye ulaşmak için iki karışımdan gereken miktarlar

Karışımın toplamı yerine ulaşılması istenen bir yüzde verildiğinde iki başlangıç karışımından alınacak miktarlar bilinmeyen olarak yazılabilir. Örneğin %12'lik bir karışımdan x gram, %32'lik bir karışımdan y gram alınarak %18'lik karışım elde edilsin. İzlenen madde dengesi 0,12x+0,32y=0,18(x+y) eşitliğidir. Düzenlendiğinde 0,14y=0,06x, dolayısıyla x/y=14/6=7/3 bulunur. Düşük yüzdeli karışım daha fazla kullanılmalıdır; çünkü hedef %18, düşük oran olan %12'ye daha yakındır.

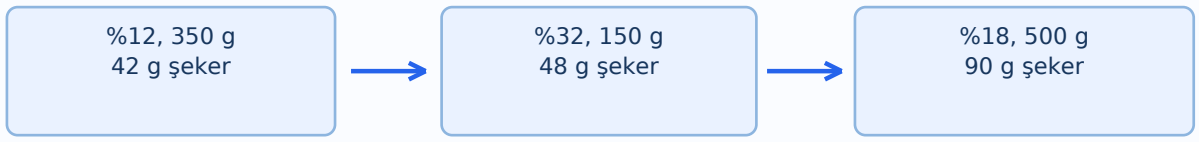
$$M_{düşük}/M_{yüksek}=(p_{yüksek}-p_{hedef})/(p_{hedef}-p_{düşük})$$

Anlamı: İki başlangıç oranı arasındaki hedefe ulaşmak için karışım miktarlarının oranı, hedefe olan yüzde uzaklıklarının tersidir.

Koşullar: $p_{düşük}<p_{hedef}<p_{yüksek}$; her iki karışımın miktarı pozitiftir ve oranlar aynı izlenen bileşene aittir. Uç hedef yüzdelerde ilgili diğer karışıma ihtiyaç kalmaz.

Elde edilmek istenen toplam 500 gram olursa 7+3=10 payın her biri 50 gramdır. %12'lik karışımdan 350 gram, %32'lik karışımdan 150 gram alınır. Şeker kütleleri sırasıyla 42 ve 48 gramdır; toplam 90 gram şekerin 500 grama oranı %18'dir. Ters çözümde %18'lik 500 gram karışımın 90 gram şeker içermesi zorunludur; 350·0,12+150·0,32=90 eşitliği aynı sonuca ulaştırır. Oran yöntemi, yalnız aynı iki başlangıç karışımının kayıpsız birleştiği durumda denklem çözümünün kısa biçimidir; ayrı bir değişmez kural gibi uygulanmamalıdır.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

5. Bilinen karışıma başka yüzdede karışım eklenmesi

Bazen ilk miktar ve yüzde belli, eklenecek ikinci karışımın yüzdesi belli, fakat eklenecek miktar bilinmezdir. Böyle durumlarda yalnız başlangıç bileşen miktarını sabit almak yanlıştır; eklenen ikinci karışımın da izlenen maddesi vardır. Denklemin payına hem ilk maddenin miktarı hem ikinci karışımdan gelen miktar; paydasına ise toplam kütle yazılır.

240 gramlık %15 şekerli suya %45 şekerli sudan x gram katılarak %25 şekerli su elde edilsin. İlk şeker miktarı 36 gramdır. Yeni şeker miktarı 36+0,45x, yeni karışım miktarı 240+x olur. Denklem 36+0,45x=0,25(240+x) biçimindedir. Buradan 36+0,45x=60+0,25x, 0,20x=24 ve x=120 gram bulunur. Gerçekten eklenen karışım 54 gram şeker getirir; 90 gram şekerin 360 gram karışımdaki payı %25'tir. Ters yönden, toplam 360 gramın %25'i 90 gram olup ilk 36 gram çıkarıldığında 54 gram; bu da %45'lik karışımın 120 gramında bulunur. Eklenecek yüzde hedefin üstünde olduğundan sonuç fiziksel ve matematiksel açıdan uygundur.

6. Saf su ve saf madde eklenmesi

Saf su, tuz oranı açısından %0 tuz içeren karışımdır. Bu nedenle yalnız su eklenirse tuzun kütlesi değişmez, toplam kütle artar ve tuz yüzdesi düşer. Saf tuz eklenmesinde ise eklenen maddenin tamamı izlenen bileşendir; hem tuz kütlesi hem toplam kütle aynı miktarda artar ve tuz yüzdesi yükselir. Her iki durum, karışım birleştirme formülünün %0 ve %100 özel hâlleridir.

300 gramlık %24 tuzlu su 72 gram tuz içerir. Tuz oranını %18'e düşürmek için x gram saf su eklendiğinde 72/(300+x)=0,18 olur. Toplam kütle 400 gram, eklenen su 100 gramdır. Kontrol için 72/400=%18 bulunur. Aynı soruda '100 gram tuzlu su eklendi' denilseydi eklenecek suyun tuzsuz olduğu varsayılamayacak ve sonuç değişecekti.

200 gramlık %20 şekerli suya saf şeker eklenerek %50 şekerli su elde edilmek istensin. Başlangıçta 40 gram şeker vardır. x gram saf şeker eklenince (40+x)/(200+x)=0,50 yazılır. 40+x=100+0,5x olduğundan x=120 gramdır. Son karışımda 160 gram şeker, toplam 320 gram madde bulunur; oran %50'dir. Böylece su ekleme ile saf madde eklemenin pay üzerindeki etkisi karşılaştırılabilir.

Saf madde ekleme ve seyreltme farkı

İşlem	Tuzun yeni kütlesi	Karışımın yeni kütlesi	Yüzde yönü
x gram saf su ekleme	S	M+x	x>0 ve S>0 için düşer
x gram saf tuz ekleme	S+x	M+x	x>0 ve S<M için yükselir
Suyun bir kısmını buharlaştırma	S	M−x	S>0 ve uygun x için yükselir
Homojen karışımdan x gram çekme	S·(M−x)/M	M−x	Yüzde değişmez

7. Buharlaşma, yoğunlaşma ve kütle korunumu

Tuzlu su sorularında yalnız suyun buharlaştığı ve tuzun ortamda kaldığı açıkça kabul edilmişse tuz miktarı sabit kalır. Buharlaşmadan önceki toplam M, tuz miktarı S, buharlaşan saf su miktarı x ise sonraki oran S/(M−x)'tir. Burada 0≤x≤M−S olmalı; daha fazla suyun buharlaşması mevcut su miktarını aşar. Tuzun çökmesi, sıçraması veya birlikte taşınması anlatılmadıkça bu tür matematiksel modelde hesaba katılmaz; gerçek fiziksel durumların her ayrıntısını temsil ettiği de öne sürülmez.

500 gramlık %12 tuzlu su 60 gram tuz ve 440 gram su içerir. Yalnız 200 gram su buharlaşırsa toplam karışım 300 grama düşer, tuz 60 gram kalır ve oran %20 olur. İşlem tersten de kurulabilir: %20'lik son karışımda 60 gram tuz bulunduğuna göre toplam 60/0,20=300 gramdır; ilk 500 gramdan fark 200 gram buharlaşan sudur. Tuzun korunması ile suyun azalması birlikte sağlanır.

$$p_{son}=100\cdot S/(M-x);\ x=M-S/(p_{son}/100)$$

Anlamı: x yalnız su olarak ayrılan kütledir; S başlangıçtaki ve sondaki tuz kütlesidir.

Koşullar: 0≤x≤M−S, M−x>0, p_son>0. Tuzun buharlaşmadığı, dışarıdan başka madde girmediği ve toplam kütlenin yalnız x kadar azaldığı kabul edilir.

8. Homojen karışımdan bir miktar ayrılması

Bir karışımın iyice karıştığı ve her kısmının aynı oranda bileşen içerdiği kabul edildiğinde, karışımdan alınan her parça da aynı yüzdeye sahiptir. Bu nedenle yalnız bir kısmı alınıp dışarı bırakıldığında geriye kalan karışımın yüzdesi değişmez. Ancak alınan kısım yerine saf su veya başka yüzdeli karışım konulursa yeni toplam içindeki izlenen madde oranı değişir. 'Bir miktar karışım döküldü' ile 'bir miktar yalnız su boşaltıldı' ifadeleri bu bakımdan farklıdır.

600 gramlık %25 tuzlu sudan 200 gram homojen karışım dökülsün. İlk tuz 150 gramdır. Dökülen 200 gramın %25'i olan 50 gram tuz da gider. Kalan toplam 400 gram, kalan tuz 100 gram ve oran yine %25'tir. Dökülen 200 gram yerine 200 gram saf su konulursa son toplam yeniden 600 gram, tuz ise 100 gram olur; yüzde 100/600·100=%16⅔'tür. Denetim için başlangıçtaki tuzun üçte biri dışarı çıkmış, üçte ikisi yani 100 gram kalmıştır. Saf su eklemek tuzu geri getirmez.

$$S_{kalan}=S\cdot(1-x/M);\ p_{kalan}=p_{ilk};\ p_{suyla_tamamlanan}=p_{ilk}\cdot(1-x/M)$$

Anlamı: Homojen karışımdan x kütle alındığında izlenen madde aynı oranda azalır; alınan kadar saf su geri konursa yüzde öncekinin kalan kütle oranına iner.

Koşullar: 0≤x<M; karışım homojendir; geri eklenen sıvı izlenen maddeyi %0 içerir; tamamlama sonunda toplam yine M olur.

9. Karışımı art arda boşaltıp saf suyla tamamlama

Karışımın her seferinde belirli bir kesri dökülüp yerine aynı kütlede saf su eklenirse, her işlemden sonra kalan tuz oranı aynı çarpanla azalır. Toplam kütle başlangıç değerine dönse de tuz kütlesi dönmez. Her işlemin başlangıcında karışım yeniden homojen kabul edildiğinde bu süreç arka arkaya aynı kesirle çarpmaya eşdeğerdir. İşlem sayısı n, her tur çıkarılan miktarın toplam M'ye oranı f ise n turun sonunda tuz oranı ilk oranın (1−f)^n katıdır.

$$p_n=p_0\cdot(1-x/M)^n$$

Anlamı: Her turda aynı x kütlede homojen karışım alınır ve aynı x kütlede saf suyla tamamlanır; p_0 ilk, p_n son yüzde değeridir.

Koşullar: M>0; 0≤x<M; n sıfır veya pozitif tam sayıdır; her turda homojenlik ve sabit toplam kütle varsayılır.

Örneğin 800 gramlık %40 şekerli sudan her seferinde 200 gram alınıp yerine saf su eklensin ve bu işlem iki kez yapılsın. Başlangıç şekeri 320 gramdır. İlk tur sonunda şeker 320·(600/800)=240 gram, yüzde %30'dur. İkinci turda 240 gram şekerin dörtte biri olan 60 gram uzaklaşır; 180 gram kalır ve 800 gramın %22,5'ini oluşturur. Genel bağıntı da %40·(3/4)²=%22,5 verir. 'İki kez %25 şeker azalması' ifadesi, ilk şekerden iki kere 80 gram eksilmesi demek değildir; ikinci turdaki azalış güncel 240 gramın %25'i kadardır.

İki tur suyla tamamlama sürecinde şeker değişimi

An	Toplam karışım	Şeker kütlesi	Şeker yüzdesi
Başlangıç	800 g	320 g	%40
İlk dökme ve tamamlama sonrası	800 g	240 g	%30
İkinci dökme ve tamamlama sonrası	800 g	180 g	%22,5

10. Bir kaptan diğerine karışım aktarma

İki ayrı kap arasında aktarma yapıldığında hangi kaptan ne kadar karışım alındığı ve hangi orana sahip olduğu izlenmelidir. Kaynaktan alınan homojen karışımın oranı kaynağın o andaki oranına eşittir. Aktarılan miktar yalnız diğer kaba ekleniyorsa kaynak kabın oranı değişmez; yalnız miktarı azalır. İşlem iki yönlü veya birden fazla aşamalıysa her aktarım sonrasında miktarlar ve yüzdeler yeniden hesaplanır. Kapların izlenen madde toplamı dışarı madde çıkmıyorsa korunur.

Birinci kapta 300 gram %20 şekerli su, ikinci kapta 500 gram %36 şekerli su bulunsun. İkinci kaptan birinciye x gram aktarıldıktan sonra birincinin oranı %28'e çıksın. Birincide başlangıç şeker 60 gram, aktarılan şeker 0,36x gramdır. (60+0,36x)/(300+x)=0,28 eşitliğinden 60+0,36x=84+0,28x; 0,08x=24; x=300 gram bulunur. Birinci kapta artık 600 gram karışım, 168 gram şeker vardır ve 168/600=%28'dir. İkinci kapta 200 gramlık %36 karışım, yani 72 gram şeker kalır. İlk toplam şeker 60+180=240 gram, son toplam 168+72=240 gramdır. İkinci kaptan aktarılan 300 gram, başlangıçtaki 500 gramı aşmadığı için miktar koşulu da sağlanır.

11. Birden fazla işlemi doğru sırayla uygulama

Ekleme, dökme, buharlaştırma ve başka karışımla tamamlama art arda yapıldığında ara aşamaların her biri yeni bir başlangıç durumudur. Özellikle su ekleme öncesi ve sonrası oranlar farklı olacağı için daha sonra alınacak homojen kısmın bileşimi de değişir. İşlemleri aynı anda yapılmış gibi tek bir toplamda birleştirmek, doğru bir kütle dengesi kurulmadığında hataya neden olur.

240 gramlık %30 şekerli suya önce 60 gram saf su eklensin. Başlangıç 72 gram şeker, yeni toplam 300 gram ve yeni oran %24 olur. Bu karışımdan 75 gram ayrıldığında karışımın dörtte biri alınmıştır; beraberinde 18 gram şeker de gider. Kalan 225 gram karışımda 54 gram şeker bulunur. Sonra 75 gramlık %40 şekerli su eklenirse 30 gram daha şeker katılır. Son toplam 300 gram ve toplam şeker 84 gramdır; sonuç %28 olur. Bağımsız kontrol, su eklemeden sonraki 300 gramlık %24 karışımın dörtte üçünün 225 gram ve 54 gram şeker içerdiğini; son 75 gramlık eklemenin 30 gram şeker taşıdığını gösterir.

Çok aşamalı işlemde güncel karışım ve şeker takibi

Aşama	Toplam kütle	Şeker kütlesi	Şeker yüzdesi
Başlangıç	240 g	72 g	%30
60 g saf su eklenince	300 g	72 g	%24
75 g homojen karışım alınınca	225 g	54 g	%24
75 g %40 karışım eklenince	300 g	84 g	%28

12. Üç veya daha çok karışımın birleştirilmesi

İki karışıma ait ağırlıklı ortalama bağıntısı aynı bileşeni içeren üç veya daha çok karışıma da genişler. Her başlangıç karışımının kütlesi ile izlenen madde oranı çarpılır, bulunan bileşen kütleleri toplanır ve toplam karışım kütlesine bölünür. Karışım sayısının artması işlemin özünü değiştirmez; ancak ara yüzdeleri erken yuvarlamak daha büyük hatalar doğurabilir. Bu nedenle mümkün olduğunca madde miktarları tam kesir veya tam sayı biçiminde korunur.

100 gram %10, 200 gram %25 ve 300 gram %40 şekerli karışım birleştirilsin. Şeker miktarları sırasıyla 10, 50 ve 120 gramdır. Toplam şeker 180 gram, toplam karışım 600 gram, son oran %30'dur. Aynı sonuç (100·10+200·25+300·40)/(100+200+300)=30 biçiminde hesaplanır. Üç yüzdenin ağırlıksız ortalaması %25'tir; 300 gramlık %40 karışım daha büyük ağırlığa sahip olduğundan doğru sonuç %30'a yükselir. Şeker dışındaki bütün maddelerin toplamı 420 gramdır ve %70 eder.

$$p_{son}=(\Sigma_i\, M_i\cdot p_i)/(\Sigma_i\, M_i)$$

Anlamı: Her i karışımının M_i kütlesi ve p_i izlenen madde yüzdesi vardır; toplamlar bütün karışımları kapsar.

Koşullar: $M_i\geq 0$, $\Sigma_i\, M_i>0$; aynı bileşen ve aynı yüzde türü kullanılır, kayıp veya dönüşüm yoktur.

13. Reçete oranı ve içeriği bilinen ara karışım

Bazı anlatımlarda bir karışımın bileşenleri doğrudan verilmez; belirli bir konsantre karışım ile saf suyun belirli oranda katılacağı söylenir. Konsantre karışımın kendisi %100 izlenen madde değildir. Önce reçeteye göre konsantre karışımın kütlesi, sonra bu konsantrenin içindeki izlenen maddenin kütlesi bulunmalıdır. Katılan saf su yalnız toplamı değiştirir. Bu iki aşamalı ayrım, 'üç ölçü konsantre' ifadesindeki üç ölçünün üç ölçü saf şeker olduğu yanılgısını engeller.

Kütlece %60 şeker içeren şuruptan 3 pay, saf sudan 7 pay kullanılarak toplam 500 gram içecek hazırlansın. Toplam 10 eşit kütle payının biri 50 gramdır. Şurup 150 gram, eklenen saf su 350 gram olur. Şurubun şeker miktarı 150·0,60=90 gramdır; son 500 gram karışımın şeker oranı %18'dir. Şurubun kendi içindeki 60 gram su ile dışarıdan eklenen 350 gram su birlikte 410 gram eder. Denetim olarak 90+410=500 ve 90/500=%18

hesapları hem kütleyi hem oranı doğrular. Ölçülerin kütleye göre eşit olduğu özellikle varsayılmıştır; yalnız hacim ölçeği verilseydi yoğunluklar bilinmeden aynı sonuca varılamazdı.

14. Kütle, hacim ve fiziksel modelin sınırları

Genel yetenek karışım soruları çoğunlukla hesapları sadeleştirmek için kütlelerin toplandığını veya hacimlerin doğrudan toplanabildiğini açıkça varsayar. Kütle üzerinden kurulan yüzde hesabı, farklı maddelere ait gramları toplamakla yapılabilir; ancak mililitre cinsinden bir hacmi gram cinsinden bir kütleye doğrudan eklemek doğru değildir. Hacim-kütle dönüşümü için yoğunluk bilgisi gerekir. İki sıvının hacimce birleşiminde son hacim her zaman tek tek hacimlerin aritmetik toplamına eşit olmak zorunda değildir. Bu yüzden 'hacimler toplanabilir' kabulü yoksa hacimce son yüzdeyi, yalnız başlangıç hacimlerinden kesin çıkarmak mümkün olmayabilir.

Örneğin kütlece %20 olan 100 gram karışım ile kütlece %50 olan 200 gram karışım birleştiğinde 20+100=120 gram izlenen madde, toplam 300 gram ve kütlece %40 elde edilir. Aynı sayılar 100 mL ve 200 mL olarak verilse, hacimler toplanır varsayımı açıkça konulmadan son karışım hacmi için 300 mL yazılamaz. Özellikle kütlece %20 ile hacimce %50 gibi iki farklı tür oranı aynı ağırlıklı ortalama denklemine koymak, birimlerin ortak olmaması nedeniyle geçersizdir. Sorunun hedefi gerçek çözelti kimyasını modellemek değilse, açıklanmayan yoğunluk ve hacim değişimi hakkında varsayım üretilmemelidir.

> **Modelleme sınırı** 'Kütlece yüzde', izlenen maddenin kütlesinin toplam kütleye oranıdır. 'Hacimce yüzde' farklı bir büyüklüktür. Gram ile mililitre ancak uygun yoğunluk bilgisiyle ilişkilendirilebilir. Karışım sırasında hacimlerin toplanması her fiziksel durumda otomatik doğru değildir; ders probleminin açık varsayımı esas alınır.

15. Farklı fiyatlı ürünlerden ortalama birim maliyet oluşturma

Karışım düşüncesi yalnız sıvılara uygulanmaz. Kalitesi veya birim fiyatı farklı fakat aynı kütle biriminde ölçülen ürünlerin birleştirilmesinde de yeni birim maliyet ağırlıklı ortalamadır. Bu benzerlik, karışım yüzdelerinin aritmetik ortalamasını almak yerine miktarları hesaba katmanın neden gerekli olduğunu gösterir. Ancak maliyet hesabında 'izlenen madde kütlesi' yerine 'toplam ödeme' korunur; fiziksel derişim yüzdesi ile parasal birim fiyat aynı nicelik değildir.

Kilogramı 45 TL olan üründen 4 kilogram ve kilogramı 75 TL olan üründen 6 kilogram birlikte alınsın. İlk gruba 4·45=180 TL, ikinci gruba 6·75=450 TL ödenir. Toplam 630 TL'nin 10 kilograma bölünmesiyle kilogram başına ortalama 63 TL bulunur. Doğrulama için 10·63=630 TL tutarına geri dönülür. Eğer kilogram başına 65 TL ortalama istenseydi 45 TL'lik ürünün miktarının 75 TL'lik ürüne oranı (75−65)/(65−45)=1/2 olurdu. Toplam 9 kilogram için 3 ve 6 kilogram seçimi 3·45+6·75=585 TL, 585/9=65 TL/kg verir. GY-03.05'teki satış kârı hesabından farklı olarak bu aşamada satış geliri değil yalnız ortak ortalama maliyet bulunur.

16. Hedefin mümkünlüğü, uç değerler ve eksik veri

Kütleleri negatif olmayan iki karışımın ağırlıklı ortalaması, başlangıç yüzdelerinin en küçüğü ile en büyüğü arasında kalır. Her iki karışımdan da pozitif miktar katılıyorsa ve yüzdeler birbirinden farklıysa yeni yüzde bu iki değer arasında kesin olarak bulunur. Bu sonuç, uzun bir denklemi çözmeden önce sorunun mümkün olup olmadığını değerlendirmeye yarar. Örneğin yalnız %10 ve %35 şekerli sulardan birleştirme yoluyla %40 şekerli su elde edilemez; izlenen maddenin oranını %35'in üstüne çıkaran ayrı bir işlem verilmemiştir.

İki başlangıç yüzdesi eşitse karıştırılan miktarların oranı son yüzdeyi değiştirmez; bu nedenle yalnız son yüzdenin verilmesi miktarları belirlemeye yetmez. Örneğin %25 ve %25 karışımlardan 400 gram elde etmek için 100+300 gram veya 200+200 gram kullanılabilir; her durumda yeni yüzde %25'tir. Buna karşılık %12'lik

ve %32'lik iki karışımdan toplam 500 gram %20'lik karışım istendiğinde miktarlar belirlenebilir. Düşük yüzdeli miktar x ve yüksek yüzdeli 500−x olsun: 0,12x+0,32(500−x)=0,20·500. Buradan 160−0,20x=100, x=300 gram ve ikinci miktar 200 gram olur. Başlangıç bileşen miktarları 36 ve 64 gram, toplam 100 gramdır; 100/500=%20 kontrolü sağlanır.

Karışımın mümkünlüğünü etkileyen koşullar

Başlangıç koşulu	Hedefin durumu	Gerekçe
%10 ve %35 karışım; yalnız karıştırma	%40 olanaksız	Ağırlıklı ortalama başlangıç üst sınırını aşamaz
%12 ve %32 karışım; ikisi de pozitif	%20 olanaklı	%20 iki başlangıç oranı arasındadır
%25 ve %25 karışım	%25 zorunlu	Eşit yüzdeler kütle oranından bağımsızdır
%10 ve %35 karışım; ikisi de pozitif	Tam %35 olanaksız	Düşük oranlı karışım katılınca yeni oran %35'in altında kalır
%25 tuzlu sudan homojen bir kısım ayrılır	Kalan %25	İzlenen bileşen ve toplam aynı oranda azalır

17. Birleştirme, buharlaştırma, ayırma ve saf madde eklemeli bütünleşik örnek

Çok adımlı bir karışım problemini tüm aşamalarıyla izlemek, yöntemin neden çalıştığını gösterir. Önce 250 gram %12 şekerli su ile 150 gram %28 şekerli su karıştırılsın. İlkinden 30 gram, ikincisinden 42 gram şeker gelir. Toplam 400 gram karışımda 72 gram şeker bulunur; başlangıçtaki yeni oran %18'dir. Bu karışımdan yalnız 40 gram su buharlaştığında toplam 360 gram, şeker 72 gram ve oran %20 olur. Sonra homojen karışımdan 90 gram dökülürse dörtte biri çıkarılmış olur; 18 gram şeker de dışarı gider. Geriye 270 gram karışım, 54 gram şeker ve yine %20 oran kalır. Son olarak 30 gram saf şeker eklenirse 300 gram karışımda 84 gram şeker bulunur ve nihai yüzde %28'e yükselir.

Burada dört farklı olayın korunum niteliği değişir. İki karışımı birleştirme toplamı da şekeri de toplar; su buharlaştırma yalnız toplamı azaltır; homojen karışımdan parça çıkarma toplam ile şekeri aynı oranda azaltır; saf şeker ekleme ise her ikisini eşit kütlede artırır. Başlangıçtaki toplam şeker 72 gramken son şeker 84 gram olmuştur; 18 gram şeker dışarı çıkarılmış ve 30 gram saf şeker eklenmiştir. Nitekim 72−18+30=84 gramdır. Toplam kütle için de 400−40−90+30=300 gram eşitliği sağlanır. Hem izlenen madde hem toplam kütle denetimi yapılmadığında, tek başına son yüzdenin makul görünmesi işlem hatasını gizleyebilir.

Bütünleşik örnekte aşama aşama madde dengesi

Aşama	Toplam kütle	Şeker kütlesi	Şeker yüzdesi
250 g %12 ile 150 g %28 birleşimi	400 g	72 g	%18
40 g saf su buharlaşması	360 g	72 g	%20
90 g homojen karışımın ayrılması	270 g	54 g	%20
30 g saf şeker eklenmesi	300 g	84 g	%28

18. Karışım problemlerinde sonucun denetlenmesi

Bir karışımın doğru modellenip modellenmediği üç ayrı soruyla anlaşılır: Bileşen miktarı her aşamada nereden geldi ve nereye gitti? Toplam kütle yalnız verilen ekleme ve çıkarma kadar mı değişti? Son oran, son izlenen madde miktarının son bütüne oranıyla gerçekten eşit mi? Bu kontroller özellikle saf suyun izlenen maddeyi değiştirmediği, homojen dökme işleminde izlenen maddenin de çıktığı ve yüzde karşılaştırmalarında ilgili bütünün güncellendiği noktalarda önem kazanır.

> **Sık karıştırılan durumlar** Karışım yüzdesi, izlenen madde miktarının tüm karışıma oranıdır; yalnız çözücü miktarına oranı değildir. Farklı kütleli karışımların yüzdeleri doğrudan ortalanmaz. Saf su ekleme ve yalnız su buharlaştırma tuz miktarını korurken homojen karışımdan dökme tuz miktarını da azaltır. Aynı karışım art arda seyreltildiğinde her tur güncel miktarlar üzerinden hesaplanır. Kütlece ve hacimce yüzdeler açık veri olmadan birbirine dönüştürülmez.

Karışım problemlerinin ortak matematiksel iskeleti 'başlangıçtaki parça ve bütün — işlemle giren veya çıkan parça ve bütün — son parça ve bütün' sırasıdır. Denklem kurmak, fark yöntemi uygulamak veya ağırlıklı ortalama almak bu iskeleti farklı biçimde kullanır. Uygun yöntem seçilirken problemin açık varsayımları korunur; hesap sonunda izlenen bileşen miktarı ve yeni karışım toplamı ayrı ayrı doğrulanır.

KONU 3.8

GÜNLÜK YAŞAM VE ÇOK ADIMLI MUHAKEME PROBLEMLERİ

Gerçek yaşamda tek bir işlemle sonuçlanmayan durumlar yaygındır. Bir iş için önce kullanılabilir kaynakların belirlenmesi, ardından miktarların çeşitli kurallara göre ayrılması ve son olarak elde edilen sonucun sınırlarla karşılaştırılması gerekebilir. Çok adımlı problem, yalnız arka arkaya çok işlem yapılması demek değildir. İşlemlerin sırası, her niceliğin hangi aşamada geçerli olduğu, koşulların birlikte sağlanıp sağlanmadığı ve sonuçtan hangi kararın çıkarılabileceği de çözümün birer parçasıdır. Bu konuda daha önce öğrenilen aritmetik, kesir, denklem, yüzde ve ölçme bilgileri ayrı bir problem türünü yeniden öğretmek için değil, birden fazla koşulu tutarlı biçimde bir araya getirmek için kullanılacaktır.

1. Çok adımlı problemde verileri, hedefi ve koşulları ayırma

Bir metin, çözüme doğrudan yarayan miktarları, yalnız bağlamı açıklayan bilgileri ve sonucu sınırlayan şartları birlikte içerebilir. Bu üç tür bilgi birbirinin yerine kullanılmamalıdır. Örneğin bir toplantı için 12 sıra hâlinde dörder sandalye hazırlanmış, sonradan 9 sandalye başka salona taşınmış ve salona 5 yeni sandalye eklenmiş olsun. Kullanılabilir sandalye sayısı $12 \cdot 4 - 9 + 5 = 44$'tür. Salonun hangi katta olduğu, kapasiteye ilişkin hesapta başka koşul verilmedikçe gerekli değildir. Buna karşılık 'bir sıranın boş bırakılması' şartı varsa 44 sonucu doğrudan kullanılabilir kapasiteyi göstermez; o sıra için ayrılan sandalye de düşülmelidir.

Çözüm başlamadan önce istenenin bir sayı mı, bir miktar aralığı mı, belirli koşulları sağlayan en küçük tam sayı mı yoksa mümkünlük kararı mı olduğu belirlenir. 'En az', 'en çok', 'tam', 'kalan' ve 'yalnızca' gibi sözcükler işlemi veya eşitsizliği değiştirebilir. 44 sandalyeli bir salona 45 kişi alınamayacağı gibi 44 kişinin tamamının yerleşmesi için her sandalyenin kullanılabilir olması gerekir. Metindeki koşul, bulunan sayının hangi anlamda kullanılacağını belirler.

Çok adımlı bir metindeki bilgi türlerinin ayrılması

Bilgi türü	Örnek	Matematiksel işlevi
Başlangıç verisi	12 sıra, her sırada 4 sandalye	Başlangıç sayısı 48
Değişiklik	9 sandalye çıkarılıp 5 ekleniyor	Net değişim −4
Ek koşul	1 sıra kullanılmayacak	Kullanılabilir miktarı ayrıca sınırlar
Hedef	Kaç kişi oturabilir?	Son kapasiteyi belirler
Bağlam bilgisi	Salonun katı	Başka ilişki yoksa hesabı etkilemez

2. Durum değişkeni ve işlem sırasını izleyen aşama tablosu

Çok adımlı süreçlerde başlangıç miktarını sürekli yeniden hesaplamak yerine her işlemin çıktısı bir sonraki işlemin girdisi olarak alınabilir. Bunu göstermek için S_0 başlangıç stoku, S_1 ilk işlem sonrası stok, S_2 ikinci işlem sonrası stok olsun. Önce 240 dosya bulunan bir arşive 36 dosya gelir, daha sonra 58 dosya başka birime aktarılırsa $S_1=240+36=276$, $S_2=276-58=218$ bulunur. Kontrol, toplam giriş ve çıkışın başlangıçla uzlaştırılmasıdır: $240+36-58=218$. Bu sayısal ilişki bir muhasebe veya envanter kaydı gibi görünse de özünde sıralı durum güncellemesidir.

Aşamaların yerini değiştirmek her zaman aynı sonucu vermez. Örneğin ilk miktarın dörtte biri ayrılıp sonra 30 birim eklenmesi ile önce 30 birim eklenip sonucun dörtte birinin ayrılması farklı işlemlerdir. İlkinde 200 birimden 50 ayrılır ve 30 eklenince 180 kalır. İkincisinde 200+30=230 birimin dörtte biri, yani 57,5 ayrılır ve 172,5 kalır. Bütün birimler bölünebilir nicelik ise ikinci sonuç anlamlıdır; dosya ya da sandalye gibi bölünemez nesnelerde 'dörtte biri' ifadesi bu başlangıç koşuluyla ayrıca yorumlanmalıdır. Bu ayrım, işlem sırasının yalnız cebirsel değil, gerçek bağlama ilişkin bir kısıt olduğunu gösterir.

$$S_i = S_{i-1} + \text{giriş}_i - \text{çıkış}_i$$

Anlamı: Her adımın sonundaki durum, bir önceki durum ile o adımdaki giriş ve çıkışın net sonucudur.

Koşullar: Aynı türde ve aynı birimde miktarlar kullanılmalı; çıkışın o anda mevcut stoktan karşılanabildiği ayrıca kontrol edilmelidir.

Bir stok değişiminin adım adım kaydı

Aşama	İşlem	Dosya sayısı
Başlangıç	Verilen stok	240
1	36 dosya eklenmesi	276
2	58 dosya aktarılması	218
Genel denetim	Başlangıç + toplam giriş − toplam çıkış	218

3. İşlem şeması kurmak: önce ne bilinir, sonra ne bulunur?

Birden fazla nicelik birbirine bağlıysa çözüm, bilgi bağımlılıklarına göre planlanır. Örneğin bir etkinliğin toplam katılımcısı, katılımcı başına verilen malzeme miktarı ve geriye kalan malzeme biliniyorsa önce dağıtılan toplamı, sonra eldeki başlangıç miktarını bulmak gerekebilir. Ancak toplam katılımcı bilinmiyorsa ve yalnız koltuk sayısı verilmişse kapasite ile gerçekten katılan kişi sayısı eşit kabul edilemez. Başlangıçtan sonuca uzanan bir işlem şeması, her ok için gerekli veriyi görünür kılar.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

4. Ters yönde düşünme ve son durumdan başlangıcı bulma

Bazen metin, işlemlerin son sonucunu verir; başlangıçtaki miktar bilinmez. Bu durumda işlemler geriye doğru ve ters sırada geri alınır. Bir depo, başlangıçtaki ürünlerin üçte birini gönderiyor, sonra 24 ürün daha gönderiyor ve 96 ürün kalıyorsa ikinci sevkiyat öncesi miktar 96+24=120'dir. Bu, başlangıçtaki ürünlerin üçte ikisine eşit olduğundan başlangıç miktarı 120÷(2/3)=180 üründür. İleri yönde denetimde 180'in üçte biri 60; 180−60−24=96 olur.

'Üçte biri gönderildi' ifadesinde kesrin paydası başlangıç miktarıdır. Buna karşılık 'kalanın üçte biri gönderildi' ifadesi, işlemin yapıldığı andaki güncel miktara uygulanır. Çok adımlı problemlerde aynı kesri farklı aşamalara gelişigüzel uygulamak, cebir doğru yürütülse bile yanlış model kurar. Geriye dönme yöntemi yalnız işlemler tersine çevrilebiliyorsa tek bir başlangıç verir. Örneğin bir süreç 'eldekinin yarısı atıldı, kalan aşağı yuvarlandı' biçimindeyse aşağı yuvarlama tek bir başlangıcı belirlemeyebilir.

$$\text{Son} = (1 - p)\cdot\text{Başlangıç} - c \Rightarrow \text{Başlangıç} = (\text{Son} + c)/(1 - p)$$

Anlamı: Başlangıcın p oranı ayrıldıktan sonra sabit c miktarı daha çıkarılıyorsa son durumdan ilk miktar bulunabilir.

Koşullar: p oranı 1'e eşit olmamalı; miktarlar aynı birimde olmalı; fiziksel adetlerde çözüm uygun tam sayı vermelidir.

5. Bölünemeyen miktarlarda tam sayı, paket ve kapasite koşulu

Günlük yaşamda ortalama veya kesir sonucu ile kullanılabilir tam adet aynı şey değildir. 137 belgenin her biri en fazla 12 belge alan dosyalara yerleştirileceği durumda 137÷12=11 tam dosya ve 5 belge artığı bulunur. Belgelerin tamamının yerleşmesi için 12 dosya gerekir. Buradaki son dosyanın yalnız beş belge taşıması, bütün dosyaların tam dolu olması şartı verilmedikçe bir sorun değildir. Buna karşılık 'her dosyada tam 12 belge bulunacak' koşulu varsa 137 belgeyi eksiksiz ve koşulu bozmadan dağıtmak mümkün değildir.

Bölünemeyen nesneler için matematiksel üst tam sayıya yuvarlama, yalnız ihtiyaç duyulan asgari kap sayısını bulurken kullanılır. Örneğin en fazla 12 belge alan dosyalardan 12 adet hazırlandığında toplam kapasite 144 ve boş yer 144−137=7'dir. Kapasiteyi sayısal olarak aşmamak yetmez; ayrıca dosya sayısı negatif veya kesirli

olamaz. 'En az' ifadesi sonucu belirleyen ek ölçüttür; 13 dosya da bütün belgeleri sığdırır ama asgari çözüm değildir.

$$\text{Gerekli en az kap sayısı} = \lceil N/k \rceil$$

Anlamı: N adet nesne, kapasitesi en fazla k olan kaplara eksiksiz yerleştirilecekse bölme sonucundan küçük olmayan en küçük tam sayı alınır.

Koşullar: N negatif olmayan tam sayı, k pozitif tam sayıdır. Kapların başka bir kısıt olmadan kullanılabildiği varsayılır.

Bölme sonucunun koşula göre farklı yorumu

Verilen durum	Aritmetik hesap	Geçerli yorum
137 belge, dosya başına en çok 12	137 ÷ 12 = 11 kalan 5	En az 12 dosya
137 belge, her dosyada tam 12	137 ÷ 12 tam sayı değil	Eksiksiz eşit dağıtım mümkün değil
144 belge, dosya başına tam 12	144 ÷ 12 = 12	Tam 12 dosya
10,5 metre kumaş, her parça 3,5 metre	10,5 ÷ 3,5 = 3	Uzunluk kesirli olabilir; 3 tam parça

6. Birden fazla kaynağı ortak sınır altında planlama

Bir etkinlikte kullanılabilecek bütçe, zaman ve malzeme birbirinden farklı sınırlardır. Örneğin her katılımcı için 2 dosya ve 3 kalem ayrılan bir toplantıda 86 dosya ve 120 kalem varsa, dosya kısıtı en fazla 86÷2=43, kalem kısıtı en fazla 120÷3=40 katılımcıya izin verir. Birlikte sağlanabilecek en yüksek sayı 40'tır; çünkü her katılımcının her iki malzemeyi de alması gerekir. 40 katılımcı için 80 dosya ve 120 kalem tüketilir; geriye 6 dosya, 0 kalem kalır. 41 katılımcı 123 kalem gerektirir ve mümkün değildir.

Bir kısıt tek başına yeterli görünse de diğerinin daha dar sınır vermesi çözümü değiştirir. Dosyalar 100'e çıkarılsa bile kalemler 120 olduğu sürece en çok 40 katılımcı kabul edilebilir. Buna darboğaz veya bağlayıcı kısıt denebilir. Bir kaynağın kullanılmadan kalması, çözümün mutlaka yanlış olduğunu göstermez; amaç bütün kısıtlar altında en büyük uygulanabilir sayıyı bulmaktır.

$$n \le \min(\lfloor D/d \rfloor, \lfloor K/k \rfloor)$$

Anlamı: D dosya ve K kalem mevcutken kişi başı d dosya, k kalem kullanılıyorsa kabul edilebilecek kişi sayısı her iki kaynak sınırını da karşılar.

Koşullar: D,K negatif olmayan; d,k pozitif tam sayıdır. Bütün katılımcılar için aynı dağıtım, kaynakların bölünememesi ve ikame olmaması varsayılmıştır.

Ortak kaynak sınırı için temsili dağıtım

Kaynak	Mevcut	Kişi başı tüketim	Tek başına kişi üst sınırı
Dosya	86 adet	2 adet	43 kişi
Kalem	120 adet	3 adet	40 kişi
İki kaynak birlikte	Her ikisi gerekli	Ortak kullanım	40 kişi

7. Sabit gider ile birim başına değişen gideri birlikte hesaplama

Bazı planlamalarda bir defalık sabit gider ile her birim için artan değişken gider ayrılmalıdır. Temsili bir baskı hizmetinde hazırlık bedeli 150 TL, basılan her sayfanın bedeli 2 TL olsun. Toplam 480 TL sınırı altında en fazla kaç sayfa basılabileceğini bulurken $150+2n \le 480$ eşitsizliği kurulur. Buradan $2n \le 330$ ve $n \le 165$ elde edilir. Sayfa sayısı tam sayı olduğu için en çok 165 sayfa basılır. Kontrol için $150+2\cdot165=480$ TL, 166 sayfada ise 482 TL bulunduğundan sınırın aşıldığı görülür.

Eğer '480 TL'den az harcanacak' denilseydi eşitlik dışlanır ve en fazla 164 sayfa mümkün olurdu. İlk durumda 'en fazla' ifadesi bütçe sınırının kendisini kullanılabilir kılar; ikinci durumda 'kesinlikle altında' koşulu aynı noktayı dışarıda bırakır. Sabit giderin sayfa başına maliyete dâhil edilmemesi, sonucu olduğundan fazla gösterecekti. Bu örnek satış kârını değil, bir kısıt altında üretilebilecek en büyük tam sayı adedini açıklamaktadır.

$$T(n) = F + un;\ F + un \le B$$

Anlamı: F sabit gider, u birim başına gider, n adet, B bütçe sınırıdır. Toplam gider bütçeyi aşamaz.

Koşullar: $F \ge 0$, $u > 0$, $B \ge 0$; n negatif olmayan tam sayı; bedellerin belirtilen aralıkta sabit olduğu varsayılır.

8. Parçalı fiyat veya eşik kuralını doğru aralıkta uygulama

Bazen bir niceliğin tümüne tek fiyat uygulanmaz; belirli eşiğin altındaki ve üstündeki kısımlara farklı bedeller uygulanır. Tamamen temsili bir depolama tarifesinde ilk 20 günün her biri 5 TL, 20 günü aşan her ek gün 8 TL olsun. 27 günlük bedel ilk 20 gün için $20\cdot5=100$ TL, sonraki 7 gün için $7\cdot8=56$ TL, toplam 156 TL'dir. Yanlış yöntem, 27 günün tümünü 8 TL'den hesaplamak veya ilk 20 günü ikinci kez eklemektir.

Aynı kural eşik aşılınca bütün günlere yeni fiyat uygulanacak şekilde de tanımlanabilirdi. O durumda $27\cdot8=216$ TL bulunurdu. İki fiyatlandırma birbirinden farklıdır; doğru yöntem yalnız metindeki 'ek günler' veya 'toplam günlerin tamamı' ayrımına göre seçilir. Gerçek işletmelerin tarifesiymiş gibi sunulan bir fiyat veya vergi oranı olmadığı için rakamlar öğretici ve temsilidir. Fiyat kuralı değiştiğinde matematiksel model de değişir.

Eşiğe bağlı iki farklı temsili fiyat kuralı

Kural	27 gün için hesap	Sonuç
İlk 20 gün 5 TL, ek günler 8 TL	$20\cdot5 + 7\cdot8$	156 TL
Eşik aşılınca bütün günler 8 TL	$27\cdot8$	216 TL
Yalnız ilk 20 gün kullanılırsa, ilk kural	$20\cdot5$	100 TL

9. Zaman çizelgesi, sıralı randevu ve gerçek süre ayrımı

Takvim veya saatle ilgili bir işlemde süreler ortak birimle hesaplanmalıdır. Örneğin 09.20'de başlayan bir etkinlikte 35 dakikalık sunum, 10 dakikalık ara ve 45 dakikalık ikinci oturum sırasıyla yapılıyorsa bitiş saati 09.20+35 dakika=09.55; aradan sonra 10.05; ikinci oturumdan sonra 10.50 olur. Toplam geçen süre 35+10+45=90 dakikadır; bu da 1 saat 30 dakikaya eşittir. Başlangıca 90 dakika eklemek aynı 10.50 sonucunu verir.

Bir programın toplam süresi ile aktif çalışma süresi aynı değildir. Yukarıdaki örnekte aktif sunum süresi 35+45=80 dakika, etkinliğin başlangıcından bitişine kadar geçen süre 90 dakikadır. İki olayın aynı anda yürüdüğü durumda süreler her zaman toplanmaz; örtüşmenin hesaba katılması gerekir. Bu fark, etkinlik düzenleme, sıra bekleme ve çalışma takvimi gibi günlük yaşam durumlarında önemlidir. Zaman birimi saat, dakika veya gün olabilir; tarihin değişmesi gerektiğinde ise takvim sınırı da dikkate alınır.

Sıralı programda başlangıç ve bitişin izlenmesi

Aşama	Başlangıç	Süre	Bitiş
İlk sunum	09.20	35 dakika	09.55
Ara	09.55	10 dakika	10.05
İkinci oturum	10.05	45 dakika	10.50
Toplam geçen zaman	09.20	90 dakika	10.50

10. Eşzamanlı yürüyen faaliyetlerde süreyi iki kez saymama

Bir görevde bekleme ile çalışma ya da iki ayrı ekip faaliyeti aynı zaman diliminde yürütülebilir. Örneğin bir kayıt masasının 09.00–09.40 arasında belge kabul ettiği, aynı sırada 09.15–10.05 arasında başka bir masanın belge kontrol ettiği düşünülsün. İlk faaliyet 40, ikinci faaliyet 50 dakika sürer. Herhangi bir masanın çalıştığı toplam zaman aralığı ise 09.00–10.05, yani 65 dakikadır; 40+50=90 dakika değildir. Çünkü 09.15–09.40 arasındaki 25 dakika iki faaliyetin ortak zamanıdır. İki sürenin toplamından çakışan süre bir kez çıkarıldığında 40+50−25=65 bulunur.

Bu çıkarma kuralı, aynı anda yapılabilen faaliyetler için toplam zaman aralığının hesabıdır; iki ayrı kişinin emek süresi toplamı ise başka bir niceliktir. İki masanın toplam çalışma süresi emek-dakika olarak 90'dır; programın gerçek takvimde kapladığı aralık 65 dakikadır. Sonucun hangisi olduğu, 'toplam çalışma emeği' ile 'başlangıçtan bitişe geçen süre' arasındaki farkı doğru okumaya bağlıdır. Aynı ayrım, birbirinin üzerine binen katılım gruplarında toplam kişi sayısını hesaplarken de ortaya çıkar.

$$\text{Toplam kapsanan süre} = \text{Süre}(A) + \text{Süre}(B) - \text{Ortak süre}(A \cap B)$$

Anlamı: Zaman aralıkları çakışıyorsa ortak geçen zaman iki kez sayılmamalıdır.

Koşullar: Her iki etkinliğin süreleri ve ortak kısmı aynı zaman ölçüsündedir; sonuç, iki faaliyetten en az birinin sürdüğü zamanın toplam uzunluğudur, kişi-saat veya emek toplamı değildir.

11. Aynı nesnenin iki kez sayıldığı durumlarda doğru toplam

İki gruba ilişkin sayılar verildiğinde grupların ayrık olup olmadığı önemlidir. Örneğin bir eğitim programında 46 kişi yazılı materyali, 38 kişi dijital materyali, 17 kişi her iki materyali kullanmış olsun. En az birini kullanan benzersiz kişi sayısı 46+38−17=67'dir. Çünkü 17 kişi iki alt toplamda da yer almıştır. Kontrol için yalnız yazılı kullanan 46−17=29, yalnız dijital kullanan 38−17=21 ve her ikisini kullanan 17 kişi toplanır: 29+21+17=67.

Tüm katılımcıların sayısı ayrıca 75 olarak verilmişse hiçbir materyali kullanmayan kişi sayısı 75−67=8 olur. Ancak toplam katılımcı sayısı verilmemişse yalnız iki gruptan 'hiçbirini kullanmayan' sayı çıkarılamaz. 'Yalnız' ve 'en az biri' ifadeleri aynı kümeyi anlatmaz. Bu başlıkta amaç ilerideki kümeler modülünün bütün işlemlerini öğretmek değil, günlük sayımda ortak öğelerin iki defa sayılmasını önlemektir.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Anlamı: İki grubun toplam benzersiz eleman sayısı, ayrı grup sayılarına ortak grubun bir kez çıkarılmasıyla bulunur.

Koşullar: A ve B aynı evren içinde tanımlanmış sonlu kümelerdir. Hiçbir grupta olmayanları bulmak için evrenin toplam eleman sayısı ayrıca bilinmelidir.

12. Uygun çözümün birden fazla olabildiği dağıtım durumları

Bir problemin sonucu her zaman tek bir sayıya indirgenmeyebilir. Örneğin aynı oturum için toplam 34 kişilik kapasite sağlayan iki salon kullanılacak; büyük salona en az 20, küçük salona en az 8 kişi yerleşecek olsun. Büyük salondaki kişi sayısı x, küçük salondaki kişi sayısı 34−x alınır. x≥20 ve 34−x≥8 olduğundan x≤26 elde edilir. İki salona ayrılan kişi sayısı tam sayıysa x, 20 ile 26 arasındaki yedi tam sayıdan biri olabilir. Ek bilgi bulunmadığından bir tek dağılım seçmek için gerekçe yoktur.

Büyük salona 24, küçük salona 10 kişi yerleştirmek koşulları sağlar; 20 ve 14 de sağlar. Bütün çözümler toplamı 34 yapar. Eğer büyük salon 'en fazla 23 kişi alır' koşulu eklenirse geçerli x değerleri 20, 21, 22 ve 23 ile sınırlanır. Matematiksel çözüm, verilen kısıtları sağlayan değerlerin tamamını belirtir. Birden fazla çözüm olduğunda problemi tek çözümlü göstermek, eksik veriyi fark etmemekten kaynaklanır.

İki salonlu dağıtımın koşul denetimi

Büyük salon	Küçük salon	En az 20 ve en az 8 koşulu
19	15	Uygun değil; büyük salon alt sınırı bozuluyor
20	14	Uygun
24	10	Uygun
26	8	Uygun
27	7	Uygun değil; küçük salon alt sınırı bozuluyor

13. Eksik, fazla veya birbiriyle çelişen verileri tanıma

Her metnin bütün sayıları çözüm için zorunlu değildir; bazı metinler de tek cevap üretmeye yetecek bilgi içermez. Bir depoda 90 paket bulunduğu ve bunların bir kısmının mavi, kalanının kırmızı olduğu verilmiş, fakat iki renk arasındaki oran veya adet farkı söylenmemişse mavi paket sayısı bulunamaz. 20 mavi 70 kırmızı veya 55 mavi 35 kırmızı dağılımları aynı toplamı sağlar. Tek bir mavi paket adedi yazmak, verilmeyen ilişkiyi varsaymak olur.

Öte yandan toplam 90 paketin 50'sinin mavi ve 45'inin kırmızı olduğu, bütün paketlerin yalnız bu iki renkten oluştuğu belirtilirse bilgiler çelişir: 50+45=95, toplam 90 değildir. Çelişkiyi çözmek için 5 paketi kendiliğinden çıkarmak veya toplamı 95 olarak değiştirmek doğru değildir. Problemin bu biçimde tutarlı çözümü yoktur; ancak renk sınıflarının örtüşebileceği gibi farklı bir model açıkça verilirse veri yeniden yorumlanabilir. Birden çok yorum mümkün olduğunda hangi varsayımın kullanıldığı saklanmadan belirtilmelidir.

Problem verisinin yeterliliği Tek bir sonuç istenmesi, metindeki verilerin tek bir çözüm verdiğini garanti etmez. Eksik veri birden fazla sonucu mümkün kılabilir; çelişen veriler hiçbir sonucu mümkün kılmayabilir. Bu iki durum 'hesap yapılamadı' adı altında birbirine karıştırılmamalıdır.

14. Mümkünlük, en küçük değer ve tercih kriteri arasındaki fark

Bir kararın mümkün olması, onun en iyi veya en küçük maliyetli karar olduğu anlamına gelmez. Örneğin 94 kişilik bir topluluğu taşımak için her biri en fazla 30 kişi alan araçlar kullanılacaksa, asgari araç sayısı 4'tür. Üç aracın toplam kapasitesi 90 olduğu için yeterli değildir; dört araç 120 kişilik üst kapasite sunar. Ancak en düşük ücretli seçeneği bulabilmek için araç başına maliyet, araç türleri veya başka kısıtlar da bilinmelidir. Salt kapasite bilgisiyle 'en ucuz taşıma planı' tek başına belirlenmez.

'En az araç' ve 'en düşük maliyet' hedefleri farklıdır. Dört aracın her biri için 500 TL sabit ücret verildiği varsayılırsa dört aracın bedeli 2.000 TL'dir; fakat başka araç kapasitesi ve tarifesi bulunmadıkça bu bedelin bütün olası alternatifler içinde en düşük olduğu söylenemez. Problem çözümlerinde amaç fonksiyonunu ve kısıtları ayrı tanımlamak, sayısal doğru bir değerden yanlış bir karar çıkarılmasını önler. Bu bölümde ileri optimizasyon tekniklerine girilmeden hedef koşulunun açık olması gerektiği vurgulanmaktadır.

15. Çok adımlı hesapta tahmin, karşılaştırma ve bağımsız kontrol

Sonuç tam hesaplanmadan önce makul büyüklük aralığı belirlenebilir. Örneğin 18 paketlik bir siparişte her pakette 24 birim ürün bulunduğunu, 35 ürünün ayrıldığını ve ardından 17 ürün eklendiğini varsayalım. Başlangıç miktarı 18·24=432'dir; son miktar 432−35+17=414'tür. Kabaca 18·25≈450 düşünülürse sonuç 400 dolayında beklenir. 4.140 gibi bir sayı bu kaba beklentiyle uyuşmadığından işlem veya basamak hatası işareti olabilir.

Bu sonucu ikinci bir yoldan denetlemek mümkündür: Net değişim −35+17=−18 birimdir. Demek ki sonuç başlangıçtan 18 eksik, yani 432−18=414 olmalıdır. Ayrıca geriye dönük hesapla 414−17+35=432 elde edilir. Bağımsız denetim, aynı hesabı yalnız yeniden yazmak değildir; farklı bir ilişkiyi, ters işlemi veya sınır koşulunu kullanmaktır. Özellikle çok adımlı metinlerde tek bir yanlış ara işlem sonraki aşamaların hepsini etkileyebilir.

Hesabın üç farklı yoldan denetlenmesi

Denetim türü	Uygulama	Sonuç
İleri işlem	18·24−35+17	414 ürün
Net değişim	432+(−18)	414 ürün
Ters işlem	414−17+35	432 ürün başlangıcı
Kaba büyüklük	Yaklaşık 450'den küçük bir değer	414 makul aralıkta

16. Birden fazla koşulu birleştiren bütünleşik örnek

Bir eğitim etkinliği için toplam 180 adet boş çalışma dosyası ve 420 adet kalem bulunmaktadır. Her katılımcıya 2 dosya ve 3 kalem verilecektir. Ayrıca kayıt işlemi öncesinde 12 dosya yedek olarak ayrılacak ve kullanılabilir kalemlerin 24 adedi arızalı olduğu için dağıtılamayacaktır. Salonun oturma kapasitesi 95 kişidir. Etkinliğe alınabilecek en yüksek katılımcı sayısı, bütün bu sınırlara birlikte bakılarak bulunur.

Önce yedek dosyalar ayrılır: 180−12=168 kullanılabilir dosya kalır. Bu miktar, kişi başına 2 dosya verildiği için en fazla 84 kişiyi destekler. Kalemlerin dağıtılabilir sayısı 420−24=396'dır; kişi başına 3 kalem hesabıyla bu miktar 132 kişiye yeter. Salonun üst sınırı ise 95 kişidir. Üç sınırın en küçüğü 84 olduğundan en yüksek katılımcı sayısı 84'tür. Burada bağlayıcı kısıt dosyadır; diğer iki koşul daha geniş bir üst sınır verir.

84 kişi için 168 dosya ve 252 kalem kullanılır. Başta yedek ayrılmış 12 dosya dağıtıma girmediğinden, kullanılabilir dosyalardan geriye 0 kalır; yedekler ise 12 adet olarak korunur. Kullanılabilir kalemlerden 396−252=144 adet kalır; arızalı 24 kalem bunlardan ayrı tutulur. Salonda 95−84=11 sandalye boş kalır. Eğer

kayıt yaptırmak isteyen 89 kişi varsa bunların yalnız 84'ü tüm malzemeyi alarak içeri girebilir; kalan 5 kişi için kapasite engeli salon değil, dosya stokudur.

Bütünleşik planlamanın kısıt ve sonuç tablosu

Kısıt	Düzeltilmiş kullanılabilir miktar	Kişi başı ihtiyaç	Kişi sınırı
Dosya	180−12=168 adet	2 adet	84
Kalem	420−24=396 adet	3 adet	132
Salon	95 koltuk	1 koltuk	95
Birleşik sınır	Üçü birlikte karşılanmalı	Tüm ihtiyaçlar	84

Bu örnekte yalnız en küçük sınırı bulmak yeterli görünse de her aşama ayrıca yorumlanmıştır: Arızalı malzeme dağıtıma giremez, yedek ürünler amaç gereği kullanılamaz, kapasite kişi cinsindendir ve tüm kişi sayıları negatif olmayan tam sayı olmalıdır. İleri doğrulamada $84 \cdot 2 = 168$ dosya, $84 \cdot 3 = 252 \leq 396$ kalem ve $84 \leq 95$ koltuk koşullarının üçü de sağlanır. Bir kişi daha kabul edilirse $85 \cdot 2 = 170 > 168$ olduğundan plan koşullara aykırı hâle gelir. Böylece 84 yalnız mümkün bir sayı değil, gerçekten en büyük mümkün katılımcı sayısıdır.

17. Çok adımlı sonuçların gerçek yaşama uygun biçimde sunulması

Çok adımlı problemde doğru cevap bir rakamdan ibaret olmayabilir. '12 dosya gerekir' sonucunun, 'tam dolu 12 dosya olur' anlamına gelmediği; 'en fazla 84 kişi' sonucunun, etkinliğe mutlaka 84 kişinin katılacağı anlamına gelmediği; 'en düşük maliyet' hedefinin yalnız kapasite bilgisiyle belirlenemeyeceği açıkça ifade edilmelidir. Mümkün olan en yüksek sayı, gerçekleşen sayı ve beklenen sayı farklı kavramlardır.

Bir sonucun okunabilirliği için sayı, birim, koşul ve gerekirse yuvarlama yöntemi birlikte verilmelidir. Dakika ile saat, gram ile kilogram, adet ile paket; tüm bunlar birbirine dönüştürülebilir veya farklı kapsamları anlatabilir. Dönüştürme yapıldığında oran korunmalı; dönüştürülmeyen birimler gelişigüzel toplanmamalıdır. Bölünemeyen nesnelerde kesirli sonuç elde edilirse otomatik yuvarlama yapmak yerine problemin asıl koşulu yeniden incelenmelidir. Gerçek hayatta uygulanabilirlik denetimi, aritmetik denetim kadar gereklidir.

> **Sonucun kapsamı** Bir sonuç her sayısal koşulu sağlıyor olsa bile istenen 'en az', 'en çok' veya 'tam olarak' ölçütünü karşılamayabilir. Eksik bilgiyle kesin karar verilmez. Varsayımsal fiyat, süre ve kapasite sayıları bu bölümde öğretici amaçlıdır; gerçek kurum veya hizmet tarifesi olarak değerlendirilmez.

Bu bölümle birlikte matematik problemlerinin temel türlerinden çok adımlı günlük yaşam muhakemesine kadar uzanan GY-03 modülü tamamlanmaktadır. Sonraki ana modülde sayısal diziler, kuralla tanımlanan işlemler, koşullu çıkarımlar ve yerleştirme ilişkileri ayrıca ele alınacaktır. Buradaki yöntem, bilinmeyeni ve birimi tanımlama, sıralı işlemleri açıkça gösterme, bütün kısıtları birlikte denetleme ve sonucunu bağlama göre yorumlamadır.

BÖLÜM 04

SAYISAL MANTIK VE ANALİTİK DÜŞÜNME

KONU 4.1

SAYI DİZİLERİ VE ÖRÜNTÜLER

Sayı dizilerinde temel amaç, yan yana yazılmış sayıları yalnız hesaplamak değil, terimlerin sırası ile aralarındaki ilişkiyi birlikte açıklayan bir kural belirlemektir. Sayısal mantık açısından bu işlem, gözlenen düzeni sınanabilir bir modele dönüştürmeyi gerektirir. Kural bazen her adımda aynı miktarı eklemek, bazen aynı çarpanı kullanmak, bazen de iki ayrı düzeni iç içe geçirmek olabilir. Birden çok kısa kuralla açıklanabilen bir başlangıç dizisi varsa yalnız ilk birkaç terimi görerek tek ve zorunlu devamın bulunduğu ileri sürülemez. Bu ayrım, özellikle sayısal muhakemenin bütün aşamalarında önemlidir.

1. Dizi, terim, sıra numarası ve örüntü kavramları

Dizi, terimleri belirli bir sıraya göre verilen sayısal yapıdır. Bir dizide 8 sayısının iki kez yer alması bu iki terimin aynı konumda bulunduğu anlamına gelmez; aynı değer farklı sıra numaralarında tekrar edebilir. Terimler genellikle a_1, a_2, a_3, ... biçiminde adlandırılır. Buradaki küçük alt indis terimin değerini değil, dizide kaçıncı sırada olduğunu gösterir: a_4 dördüncü terimdir. Genellikle bu kitapta ilk terimin indisi 1'dir; farklı bir başlangıç açıkça belirtilirse o başlangıç esas alınacaktır.

Örüntü, terimler arasındaki düzenli ilişkiyi anlatır. Her sayı listesi açıkça belirtilmiş bir kurala bağlı olmak zorunda değildir. Bir dizinin sonlu olarak verilen ilk terimlerinden hareketle aday bir kural oluşturulabilir, ancak kuralın gerçekten geçerli sayılması için metindeki tüm bilgilerle uyumlu olması gerekir. Dizinin bir terimi ile komşusu arasındaki farkın ne olduğuna, terimlerin oranına, sıralı konumlara veya adımları belirleyen başka ilişkilere bakılır. Dizi tanımı yalnız sonlu sayıda terim içerebileceği gibi sonsuz sayıda terim için de kural verebilir.

Diziyi okumada temel ayrımlar

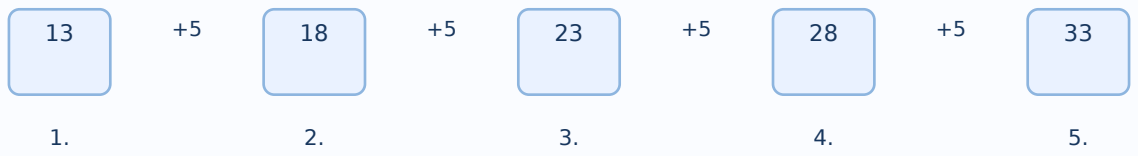
Gösterim	Anlamı	Yorum
$a_1 = 8$	Birinci terimin değeri 8	Alt indis değerle karıştırılmaz
$a_5 = 8$	Beşinci terimin değeri 8	Aynı değer başka konumda tekrarlanabilir
a_n	n'inci terimin değeri	n, izin verilen sıra numarasıdır
$a_{n+1} - a_n$	İki ardışık terim farkı	Sabitse aritmetik ilişki olabilir
a_{n+1} / a_n	İki ardışık terim oranı	Payda sıfır olmamalıdır

2. Bir dizide kural aramanın güvenilir sırası

Önce terimler ve sıra numaraları dikkatle eşleştirilir. Ardından her ardışık terimden önceki çıkarılarak birinci farklar hesaplanır. Bu farklar aynıysa sabit farkla ilerleyen bir aritmetik dizi vardır. Farklar değişiyorsa ve önceki terimler sıfır değilse ardışık terim oranları incelenebilir. Farkların kendisinde düzen bulunup bulunmadığına, sayının karesi veya başka basit konumsal ilişkiye, tek ve çift sıralardaki terimlerin ayrı davranıp davranmadığına daha sonra bakılır. Bütün terimleri açıklamayan bir kural, yalnız son iki terimde çalışıyor diye kabul edilmez.

Örneğin 13, 18, 23, 28, 33 dizisinde farklar art arda 5, 5, 5, 5'tir. Bir terimin iki katından bir sonraki elde edilmiyor, çünkü 13·2 ≠ 18'dir. Dolayısıyla bu örüntüde 'her adımda 5 ekle' açıklaması bütün gözlemleri tek işlemlerle karşılar. Sıra numarası ve fark birlikte kullanıldığında, sadece sıradaki terim değil daha ilerideki bir terim de doğrudan bulunabilir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

3. Sabit farkla ilerleyen aritmetik diziler

Aritmetik dizi, her terimden sonraki terime geçerken aynı d kadar ekleme yapılan dizidir. d'ye ortak fark denir; pozitif, negatif veya sıfır olabilir. a_1 ilk terimi ve n pozitif tam sayı sıra numarasını göstermek üzere n'inci terime ulaşmak için n−1 geçiş yapılır. Bu nedenle ilk terime d farkını n defa değil n−1 defa eklemek gerekir.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Anlamı: Birinci terimi a_1 ve ortak farkı d olan aritmetik dizinin n'inci terimi.

Koşullar: n = 1, 2, 3, ...; bütün ardışık terim farkları aynı d değerinde olmalıdır. Terimlerin birimi varsa d de aynı birimdedir.

Özgün bir örnek olarak 11, 17, 23, 29, ... dizisi ele alınsın. Ortak fark 6'dır. Bu dizinin 18. terimi a_{18} = 11+(18−1)·6 = 11+102 = 113 olur. Sonucu ikinci yoldan denetlemek için a_{10} = 11+9·6 = 65 hesaplanır; onuncu konumdan on sekizinci konuma sekiz geçiş vardır ve 65+8·6=113 bulunur. Aynı dizide 71'in kaçıncı terim olduğu araştırılırsa 71=11+(n−1)·6 yazılır; 60=6(n−1), n−1=10 ve n=11 elde edilir. Yerine koyma kontrolü 11+10·6=71'dir. Ters işlemde n'nin pozitif tam sayı çıkması, gerçekten bir dizi konumunun bulunması için zorunludur.

4. Azalan, sabit ve sıfırdan geçen örüntüler

Ortak farkın negatif olması aritmetik dizinin niteliğini değiştirmez; yalnız terimlerin azalarak ilerlediğini gösterir. 42, 35, 28, 21, 14, 7, 0, −7, ... dizisinin ortak farkı −7'dir. Sekizinci terim 42+7·(−7)=−7'dir. Bağımsız denetim, yedinci terimin 0 olması ve bir sonraki terim için 0−7=−7 işleminin yapılmasıdır. İlk terimin pozitif olması, bütün dizinin pozitif kalacağını garanti etmez.

Ortak fark d=0 ise bütün terimler aynıdır. Örneğin 9, 9, 9, ... dizisi hem sabit hem de aritmetiktir. Sabit bir dizide artış ya da azalış yoktur. 'Her terim öncekinin iki katı' gibi pozitif ortak oranlı durumlarda ise değerler başlangıç işaretine ve çarpana göre artabilir veya azalabilir; kuralın büyüme yönü ayrı incelenmelidir.

Ortak farkın etkisi

İlk terim	Ortak fark	İlk dört terim	Nitelik
4	+3	4, 7, 10, 13	Artan aritmetik dizi
12	−5	12, 7, 2, −3	Azalan aritmetik dizi
−2	0	−2, −2, −2, −2	Sabit aritmetik dizi
−6	+4	−6, −2, 2, 6	Artan; ikinci geçişten sonra sıfırı aşar

5. İki uzak terimden ortak farkı ve ilk terimi bulma

Aritmetik dizinin komşu olmayan iki terimi verildiğinde aralarındaki değer farkı, aradaki adım sayısına bölünür. Örneğin dördüncü terimi 19, onuncu terimi 49 olan bir aritmetik dizide sıra farkı 10−4=6, değer farkı 49−19=30'dur. Ortak fark 30/6=5 olur. Dördüncü terime ulaşmak için ilk terimden üç geçiş yapılacağından $a_1 = 19−3·5=4$ bulunur. Buna göre on beşinci terim $a_{15}=4+14·5=74$'tür. Geri kontrol: $a_4=4+15=19$, $a_{10}=4+45=49$ ve $a_{15}=49+5·5=74$. Burada iki konum arasındaki fark altı iken arada görülen terim sayısının beş olması, adım sayısı ile 'arada kalan' terim sayısının farklılığını gösterir.

$$d = (a_j−a_i)/(j−i) \; ; \; a_j = a_i+(j−i)·d$$

Anlamı: Aritmetik dizide i ve j sıra numaralı iki terimden ortak fark veya başka terim bulunur.

Koşullar: i ve j pozitif tam sayı, i≠j; verilen terimler aynı aritmetik dizinin elemanlarıdır. Paydadaki j−i sıfır olamaz.

6. Sabit çarpanla ilerleyen geometrik diziler

Geometrik dizide bir terimden sonraki terime geçilirken aynı r çarpanı uygulanır. İlk terim a_1, sıra numarası n ve ortak çarpan r ile gösterilirse ilk terimden n'inci terime n−1 çarpma geçişi yapılır. Sıfır olmayan ardışık terimler için $a_{n+1}/a_n=r$ oranı gözlemlenebilir. Sıfırdan farklı değerlerin böyle bir oranı vermesi, sınırlı listedeki bir kuralı saptamaya yardımcıdır; ancak olası devamlar arasında hangisinin esas alınacağı verilen koşullara bağlıdır.

$$a_n = a_1·r^(n−1)$$

Anlamı: İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan geometrik dizinin n'inci terimi.

Koşullar: n pozitif tam sayıdır. Her adımda aynı r uygulanır. Ardışık terimlerden oran hesaplanırken payda olan önceki terim sıfırdan farklıdır; r=0 durumu ancak çarpma tanımıyla ayrıca ele alınır.

Örneğin 3, 9, 27, 81, ... geometrik dizisinin ortak çarpanı 3'tür. Yedinci terim $3·3^6=3^7=2.187$'dir. Farklı yoldan beşinci terim 243, altıncı 729 ve yedinci 2.187 olarak doğrudan üçle çarparak aynı sonuca varılır. Burada ilk terim 3 olduğundan yedinci terimde toplam yedi tane 3 çarpanı görülse de ilk terimden sonra yapılan geçiş sayısı altıdır.

Sabit fark ve sabit çarpan arasındaki ayrım

Dizi	Ardışık farklar	Ardışık oranlar	Saptanan yapı
6, 10, 14, 18	4, 4, 4	Sabit değil	Aritmetik; d=4
5, 15, 45, 135	10, 30, 90	3, 3, 3	Geometrik; r=3
7, 7, 7, 7	0, 0, 0	1, 1, 1	Sabit; hem aritmetik hem geometrik
0, 0, 0, 0	0, 0, 0	Oranlar 0/0, tanımsız	Aritmetik sabit dizi; ortak oran doğrudan hesaplanamaz

7. Kesirli, negatif ve sıfır çarpan durumları

Ortak çarpanın 0 ile 1 arasında olması ve ilk terimin pozitif seçilmesi, terimlerin küçülmesine yol açar; değerlerin her biri aynı kesirle çarpılır. 192, 96, 48, 24, 12, 6, 3, ... dizisinde r=1/2'dir. Yedinci terim $192 \cdot (1/2)^6 = 192/64 = 3$'tür. Adım adım ikiye bölerek de 192→96→48→24→12→6→3 elde edilir. Sekizinci terim 1,5 olur; bu, gerçek sayı dizilerinde terimlerin tam sayı olmasının zorunlu olmadığını gösterir.

Negatif ortak çarpanda terimlerin işareti sırayla değişebilir. 2, −6, 18, −54, 162, −486, ... dizisinde ortak çarpan −3'tür. Altıncı terim $2 \cdot (-3)^5 = -486$'dır. Beşinci terim 162'nin −3 ile çarpılması da −486 sonucunu verir. 'Her seferinde büyüyor' ifadesi burada dikkat gerektirir: mutlak değer artarken sayısal değerler sırayla pozitif ve negatif olduğu için dizi her adımda artan değildir.

Ortak çarpan 0 ise ilk terimden sonraki bütün terimler 0 olur: 8, 0, 0, 0, ... bu çarpma kuralını sağlar. Fakat 0/0 tanımsız olduğu için iki sıfır terimi birbirine bölerek ortak oran çıkarılamaz. İlk terimi de 0 olan sıfır dizisi için çarpan herhangi bir sayı seçilse bile terimlerin tamamı sıfır kalır; yalnız terimlere bakılarak çarpan tek olarak belirlenmez.

> **Geometrik dizide oran ve işaret denetimi** Ortak çarpanı ardışık iki terimin bölümünden çıkarmak için bölen sıfır olmamalıdır. Negatif çarpan işareti değiştirebilir; $0<r<1$ ile $r>1$ durumlarında artış/azalış yorumu ilk terimin işaretine bağlıdır. Sabit sıfır dizisinden tek ve zorunlu bir ortak çarpan hesaplanamaz.

8. Farkların farkı ve karesel örüntüler

Birinci farklar sabit olmasa bile onların farklarında bir düzen olabilir. 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... dizisinin ilk farkları 5, 7, 9, 11, 13'tür; ikinci farkları ise 2, 2, 2, 2 olur. Terimler aynı zamanda 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ... biçimindedir. Bu nedenle sıra numarası 1'den başladığında n'inci terim $(n+1)^2$ olarak yazılır. Yedinci terim $(7+1)^2 = 64$'tür. Bağımsız doğrulamada altıncı terim 49'dan sonraki fark 15 olacağından 49+15=64 elde edilir.

Birinci farkların sabit olmaması, dizinin mutlaka 'rastgele' olduğu anlamına gelmez. Yalnız sabit fark modelinin uygun olmadığını gösterir. İkinci farkın sabit olması birçok karesel kuralla uyumludur; ancak sınırlı terimlerden yola çıkıldığında başka kuralların da aynı başlangıcı verebileceği unutulmamalıdır. Kare örüntüsü 1, 4, 9, 16, ... ve küp örüntüsü 1, 8, 27, 64, ... gibi bilinen sayı yapılarını tanımak, ilişkinin kısa biçimde açıklanmasına yardım eder.

Fark tablosu ile karesel düzen

Sıra n	Terim $(n+1)^2$	Bir önceki terime göre fark
1	4	Başlangıç
2	9	5
3	16	7
4	25	9
5	36	11
6	49	13
7	64	15

9. Artış miktarının kendisi değişen örüntüler

2, 5, 9, 14, 20, ... dizisinde artışlar sırayla 3, 4, 5, 6'dır. Artış her yeni adımda bir büyüdüğü için altıncı terim 20+7=27, yedinci terim 27+8=35 olur. Burada sayılar 'önceki terime artan büyüklükte bir sayı eklenerek' üretildiğinden, doğrudan her terimi bir öncekinin iki katı yapmak veya sabit fark eklemek uygun değildir.

Bu örüntü n'inci terim için de ifade edilebilir: n=1'de değer 2, sonraki artışlar 3'ten başlayıp n+1'e kadar sürer. Bu toplam düzenlenince $a_n=n(n+3)/2$ elde edilir. Birinci terim için 1·4/2=2, dördüncü terim için 4·7/2=14 ve yedinci terim için 7·10/2=35 bulunur. Artış hesabı ve genel terim hesabının uyuşması, iki ayrı kontrol sağlar.

$$a_n = n(n+3)/2$$

Anlamı: İlk terimi 2 ve ardışık artışları 3, 4, 5, ... olan bu özel örüntünün n'inci terimi.

Koşullar: n pozitif tam sayı; bağıntı genel bir örüntü yasası değil, yalnız burada tanımlanan örneğin kuralıdır.

10. Tek ve çift sıralarda ayrı ilerleyen diziler

Bazı dizilerde bütün terimleri tek bir sabit fark veya sabit çarpanla açıklamak mümkün değildir; ancak tek sıralardaki terimler ayrı, çift sıralardaki terimler ayrı bir örüntü oluşturur. Örneğin 6, 13, 8, 17, 10, 21, 12, 25, ... dizisinde birinci, üçüncü, beşinci ve yedinci terimler 6, 8, 10, 12; ikinci, dördüncü, altıncı ve sekizinci terimler 13, 17, 21, 25'tir. Birinci alt dizinin ortak farkı 2, ikincinin ortak farkı 4'tür.

Tek sıradaki a_{2k-1} terimleri, k pozitif tam sayı olmak üzere 2k+4; çift sıradaki a_{2k} terimleri ise 4k+9 olarak verilir. Böylece on birinci terimin tek sırada k=6'ya karşılık geldiği görülür: $a_{11}=2\cdot6+4=16$. On ikinci terim çift sıradaki altıncı terimdir: $a_{12}=4\cdot6+9=33$. Kontrol için dokuzuncu ve onuncu terimler sırasıyla 14 ve 29; ardından 16 ve 33 gelmelidir. Her art arda gelen iki sayıyı aynı kurala sokmaya çalışmak bu yapıyı gizler.

İç içe geçen iki alt dizinin okunması

Genel sıra	Alt dizide sıra k	Kural	Değer
1	Tek sıranın 1.'si	2k+4	6
2	Çift sıranın 1.'si	4k+9	13
5	Tek sıranın 3.'sü	2k+4	10
6	Çift sıranın 3.'sü	4k+9	21
11	Tek sıranın 6.'sı	2k+4	16
12	Çift sıranın 6.'sı	4k+9	33

11. Tekrarlanan bloklar ve döngü uzunluğu

Bir örüntü artmak veya azalmak yerine belirli sayıda terimden sonra başa dönebilir. 4, 1, 7, 4, 1, 7, ... dizisinde tekrar eden blok (4, 1, 7) ve blok uzunluğu 3'tür. Hangi konumun hangi blok öğesine karşılık geldiği sıra numarasının 3'e bölümünden kalanla belirlenir: kalan 1 ise 4, kalan 2 ise 1, kalan 0 ise 7 alınır. Örneğin 20=3·6+2 olduğundan yirminci terim bloktaki ikinci değer 1'dir. Sayarak denetleme için 18. terim yedinci değil, altıncı bloğun sonundaki 7'dir; 19. terim 4, 20. terim 1 olur.

Döngü uzunluğu ile bloktaki değerlerin mutlaka farklı olması gerekmez. Örneğin 2, 2, 5, 2, 2, 5, ... örüntüsünün üçlü bloğunda iki eşit değer vardır. Döngünün metinde açıkça verilmesi veya tüm terimleri açıklayan en kısa düzenin gerekçelendirilmesi önemlidir. Tekrarın kendisi ile sayının toplam frekansı aynı kavram değildir.

12. Önceki iki terime bağlı öz yinelemeli kurallar

Her örüntü yalnız tek bir önceki terim üzerinden açıklanmaz. Bazılarında yeni terim, önceki iki veya daha fazla terimin birleşimiyle elde edilir. İlk iki terimi 2 ve 5 olan ve üçüncü terimden itibaren her terimi önceki iki terimin toplamı olarak tanımlanan bir dizi düşünelim. Terimler 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, ... biçiminde ilerler. Yedinci terim 19+31=50'dir; ters denetimle altıncı terim 31 ve beşinci terim 19 kullanıldığında aynı toplam elde edilir.

Bu tür bağıntıya öz yinelemeli veya yinelemeli tanım denir. Kuralı belirlemek kadar başlangıç terimlerini bilmek de gerekir; yalnız 'önceki iki terimi topla' cümlesi ilk iki sayı verilmeden tek bir diziyi belirlemez. Benzer biçimde 'öncekini ikiyle çarp ve iki ekle' kuralı, ilk terim 1 ise 1, 4, 10, 22, 46, 94, ... dizisini üretir. Altıncı terim 46·2+2=94'tür. Bu ikinci dizide ilk terim de tanımlı olduğundan 3·2^(n−1)−2 genel ifadesi aynı terimleri verir; n=6 için 3·32−2=94 ile doğrulanır.

$$a_1 = 2;\ a_2 = 5;\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 3)$$

Anlamı: Üçüncü ve sonraki terimleri önceki iki terimin toplamıyla üretilen örneğin öz yinelemeli tanımı.

Koşullar: n pozitif tam sayı; başlatıcı iki terim verilmelidir. Bu kural her sayı dizisi için geçerli değildir.

13. Terim konumu, atlanan adım ve eksik terimi belirleme

Kuralın bilinmesi eksik bir terimi bulmayı kolaylaştırır. Örneğin sabit farkı 4 olan ve üçüncü terimi 17 olan aritmetik dizinin beşinci terimi 17+2·4=25'tir; ikinci terimi ise 17−4=13'tür. Bilinen iki konumun arasında kaç geçiş bulunduğu gözden kaçırılmamalıdır. İkinci terimden beşinci terime üç geçiş, üçüncüden beşinciye iki geçiş yapılır.

Geometrik dizide benzer işlem çarpmayla yürür. Bir dizinin ikinci terimi 12, ortak çarpanı 2 ise beşinci terim $12 \cdot 2^3 = 96$'dır. Ters yönde birinci terime gidilirken $12/2 = 6$ bulunur. Bununla birlikte ortak çarpan sıfırsa ters çarpma yapılamaz; 0'a bölme yasağı sonuç bulmak için kuralın tersinin her durumda kullanılamayacağını gösterir. Negatif veya kesirli çarpanlarda ters işlem yapılırken işaret ve payda ayrıca kontrol edilir.

14. Terimlerin toplamı ile tek terimin farkı

'Son terim' ve 'ilk n terimin toplamı' farklı sonuçlar verir. Aritmetik dizide n terimin toplamı S_n sembolüyle gösterilsin. İlk ve son terim bir çift yapılırsa, ikinci ile sondan bir önceki terimin toplamı da aynıdır. Bu simetri, toplamın terim sayısı ile ilk ve son terimin aritmetik ortalamasının çarpımı olduğunu gösterir.

$$S_n = n \cdot (a_1 + a_n)/2 = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]/2$$

Anlamı: İlk n terimi alınan aritmetik dizinin toplamı; a_1 ilk, a_n son terim, d ortak farktır.

Koşullar: n pozitif tam sayı; bütün terimler tek bir aritmetik dizinin ardışık n terimidir.

Örneğin 5, 8, 11, ... aritmetik dizisinin ilk on iki teriminin sonuncusu $5 + 11 \cdot 3 = 38$'dir. Toplam $12 \cdot (5 + 38)/2 = 6 \cdot 43 = 258$ olur. Bağımsız kontrolde ilk ve son terimi $5 + 38 = 43$, ikinci ve sondan bir önceki terimi $8 + 35 = 43$ biçiminde eşleştiririz. Toplam altı çiftin her biri 43 olduğundan $6 \cdot 43 = 258$ çıkar. Sadece son terim 38'i toplam olarak vermek yanlıştır.

Geometrik dizide sonlu toplam için ilk terimin ortak çarpanın kuvvetlerine göre çoğaltıldığı bir bağıntı kullanılabilir. Örneğin 2, 6, 18, 54, 162 dizisindeki ilk beş terimin toplamı doğrudan 242'dir. Genel toplam bağıntısıyla $2 \cdot (3^5 - 1)/(3 - 1) = 2 \cdot 242/2 = 242$ elde edilir. Böylece formül ve doğrudan toplama birbirini denetler. Ortak çarpan 1 olduğunda bu bölme biçimi kullanılamaz; bütün terimler a_1 olduğu için toplam $n \cdot a_1$'dir.

$$S_n = a_1 \cdot (r^n - 1)/(r - 1)\ (r \neq 1);\ S_n = n \cdot a_1\ (r = 1)$$

Anlamı: İlk n terimi alınan geometrik dizinin toplamı.

Koşullar: n pozitif tam sayıdır; bütün terimler ortak r çarpanıyla ilerler. İlk ifadede r−1 sıfır olamaz; r=1 için ayrı eşitlik kullanılmalıdır.

Terim, son terim ve toplamın ayrılması

Dizi ve kapsam	İstenen büyüklük	Hesap	Sonuç
5, 8, 11, ...; ilk 12 terim	12. terim	$5 + 11 \cdot 3$	38
5, 8, 11, ...; ilk 12 terim	İlk 12 terimin toplamı	$12 \cdot (5 + 38)/2$	258
2, 6, 18, 54, 162	5. terim	$2 \cdot 3^4$	162
2, 6, 18, 54, 162	İlk 5 terimin toplamı	$2 + 6 + 18 + 54 + 162$	242

15. Günlük yaşamda adım sayısı ile zaman başlangıcını ayırma

Dizi kurallarında ilk ölçümün hangi ana ait olduğu sayısal sonucu değiştirir. Temsili bir uygulamada 0. gün sayılan başlangıç anında 200 kayıt bulunduğu ve her tam gün sonunda 25 yeni kayıt eklendiği kabul edilsin. Gün numarası $t = 0,1,2,\ldots$ olursa $R(t) = 200 + 25t$ bağıntısı kullanılır. Sekizinci günün sonunda kayıt sayısı $R(8) = 200 + 8 \cdot 25 = 400$'dür. Doğrudan kontrol: 200 başlangıç kaydına sekiz günün 200 kaydı eklenmiştir.

Başka bir ifadede 'birinci günün sonunda 200 kayıt vardı, her sonraki gün 25 kayıt ekleniyor' denilirse sekizinci günün sonu $200 + 7 \cdot 25 = 375$ olur. İki durumda formül birbirine benzer görünür, ancak ilk durum t=0

başlangıç durumunu; ikinci durum n=1 birinci terimi esas alır. Dolayısıyla sayı dizilerinde yanlış sonucun nedeni bazen işlem değil, başlangıç konumunun yanlış belirlenmesidir.

> **İlk konum ve geçiş sayısı** İlk terim n=1 ise n'inci terime n−1 geçişle ulaşılır. İlk gözlem t=0 anına aitse t'inci ana t geçiş yapılır. Metin hangi başlangıcı veriyorsa o kabul edilir; farklı başlangıçla elde edilen iki doğru işlem aynı durumu anlatmayabilir.

16. Eksik, belirsiz veya çelişkili kuralın ayırt edilmesi

İlk dört terimi 2, 4, 6, 8 olan sayı listesi için her adımda iki ekleme kuralı uygundur ve sıradaki değer 10 olur. Ancak yalnız bu dört değerin verilmesi, dizinin devamının mutlaka 10 olacağını matematiksel olarak kanıtlamaz; dizinin ilk dört konumunda aynı, beşinci konumundan itibaren farklı davranan başka kurallar tanımlanabilir. Bu nedenle 'olağan örüntüyü sürdürme' ile 'verilen kesin kurallardan zorunlu sonuç çıkarma' ayrıdır. Kuralı açıkça verilmiş bir dizideyse bu belirsizlik bulunmaz.

Verilen bütün terimleri aynı anda açıklayamayan yorum çelişkilidir. Örneğin 4, 8, 12, 17 dizisi için 'her terimde dört artıyor' denilemez; son fark 5'tir. Veri hatalı olabilir ya da daha karmaşık bir kural olabilir; son sayıyı 16 olarak keyfî değiştirmek çözüm sayılmaz. Bir kuralın güvenilirliği, yalnız baştaki iki değere uymasından değil verilen bütün konumları, varsa ek koşulları ve tanım alanını karşılamasından anlaşılır. Kural metinde yoksa tercih edilen sade modelin bir varsayım olduğu belirtilmelidir.

17. Modellerin aynı tablo üzerinde karşılaştırılması

Kural arama sırasında hangi aritmetik denetimin ne zaman anlamlı olduğunu ayırt etmek hesap yükünü azaltır. Sabit fark aritmetik diziye; sıfır olmayan komşu terimler arasında sabit oran geometrik diziye; artan birinci farklar karesel veya başka değişken artışlı düzene; tek ve çift konumlarda ayrı düzen ise iç içe geçmiş dizilere işaret edebilir. Bunlar kesin sınıflandırma için yeterli tek başına ipuçları değildir: gerçek kural tüm terimleri ve belirtilmiş koşulları doğrulamalıdır.

Sayı örüntüsünde yöntem seçimi

İlk gözlem	İncelenecek ilişki	Özgün örnek	Denetim noktası
Farklar eşit	$a_{n+1}-a_n$	3, 8, 13, 18	Bütün farklar +5 mi?
Oranlar eşit	a_{n+1}/a_n	4, 12, 36, 108	Bölme tanımlı ve tüm oranlar 3 mü?
Farklar düzenli artıyor	İkinci fark ve konum	4, 9, 16, 25	Kare bağıntısı tüm terimlere uyuyor mu?
Terimler sırayla farklı davranıyor	Tek/çift alt dizi	6, 13, 8, 17, 10, 21	İki alt sıra ayrı ayrı tutarlı mı?
Değerler tekrar ediyor	Döngü uzunluğu ve kalan	4, 1, 7, 4, 1, 7	Tekrar bloğu aynı sırayla mı geliyor?
Önceki iki değer etkili	Öz yineleme	2, 5, 7, 12, 19	İlk değerler ve geçiş kuralı belirli mi?

18. Sonucun bağımsız denetimi ve sayısal muhakeme sınırları

Bir örüntünün devamını bulurken yalnız sıralı listeye bir sayı eklemek, neden o sayıya ulaşıldığını göstermez. Önce kural belirtilmeli; ardından hem listede bilinen birkaç terim yeniden üretilmeli hem de istenen terim farklı bir yoldan kontrol edilmelidir. Aritmetik dizide genel terim ile ardışık toplama, geometrik dizide kuvvet ile ardışık çarpma, döngüsel dizide bölüm-kalan ile blokların doğrudan sayılması böyle bir denetim çiftidir. Alt indisin başlangıç değeri ve olası sıfır bölenler, hesap sonuçlarından önce açıklığa kavuşturulmalıdır.

Diziler matematikte yalnızca sayılar arasında biçimsel benzerlik kurmak için kullanılmaz; eşit miktarda artış, sabit oransal değişim, planlı tekrar ve bir önceki duruma bağımlılık gibi ayrı süreçleri modeller. Bununla birlikte matematiksel düzen, kendi başına bir olayın gerçekten o biçimde gerçekleşeceğini kanıtlamaz. Dizi modelinin dayandığı varsayım veya gözlem geçerli olduğu sürece sonuç anlam taşır. Sonraki konularda sayı-şekil eşleştirmeleri ve başka mantık ilişkileri incelenirken de bu üçlü yaklaşım korunacaktır: kuralı açıkça ifade etme, bütün verilenleri denetleme ve zorunlu sonuç ile yalnızca mümkün yorumu ayırma.

KONU 4.2

ŞEKİL VE SAYI İLİŞKİLERİ

Sayı dizilerinde kural, ardışık terimler arasındaki değişimden hareketle incelenir. Şekil ve sayı ilişkilerinde aynı muhakeme iki temsile birden uygulanır: Görseldeki nesnelerin sayısı, dizilişi, bağlantıları ve konumları belirlenir; ardından bu özelliklerin sayı ile nasıl ifade edildiği açıklanır. Önemli olan, bir şekle yalnız bakarak sonuç tahmin etmek değil, hangi özelliğin sayıldığını ve kuralın bütün adımlarda neden geçerli olduğunu göstermektir.

Bir görselin içinde üçgen, kare, nokta, çizgi veya farklı renkte birim kutular bulunabilir. Aynı görselin nokta sayısı, toplam kenar parçası, çevrede kalan kenarı ve boyalı kutu sayısı birbirinden farklı olabilir. Bu nedenle çözümün başlangıcında şeklin adı kadar, sayılacak özelliğin tanımı da kesinleştirilmelidir. Bu konuda geometrik alan ve hacim bağıntılarının ayrıntılarına değil, görsel veriyi sayısal ilişkiye dönüştürmeye odaklanılacaktır.

1. Görselin sayısal karşılığını seçme

Örnek olarak birbirine eş üç küçük kareden oluşan ve tek sıra hâlinde dizilmiş bir şerit düşünelim. Şeritte üç kare vardır; ancak karelerin üst ve alt kenarları ile uçları birlikte sayıldığında şeridin dış sınırında sekiz birim kenar uzunluğu bulunur. Ayrı ayrı karelerin toplam dört kenarı sayılırsa $3 \cdot 4 = 12$ kenar elde edilir. Bu iki toplamdan hiçbiri sırf sayı olarak yanlış değildir; farklı özellikleri ölçmektedir. Görselden 3, 8 veya 12 sonuçlarından hangisinin çıkarılacağı, neyin sayıldığının açıklanmasına bağlıdır.

Şekil-sayı ilişkisinin güvenilir olması için birim, bütün ve sınır tanımı gerekir. 'Üç kare', 'sekiz dış kenar birimi' ve 'on iki kare kenarı' birbirinin yerine geçmez. Şeklin ölçeği bilinmiyorsa bir çizginin gerçek uzunluğu yerine eş uzunluktaki parçaların sayısı incelenebilir. Yan yana iki kare tek bir ortak kenarı paylaştığında ortak kenarın bağımsız çizim parçası olarak bir kez, karelerin ayrı kenar toplamı içinde iki kez sayılmasının nedeni budur.

Aynı kare şeridinde farklı sayma türleri

İncelenen özellik	Üç karelik şeritte değer	Sayma açıklaması
Birim kare adedi	3	Üç kapalı küçük kare
Kare başına dört kenarın toplamı	12	Ortak kenarlar iki kareye de aittir
Çizilmiş farklı birim kenar parçaları	10	12−2 ortak sınırın birer fazlası
Dış sınırın birim kenar sayısı	8	Üst 3, alt 3, uçlar 1+1

2. Sayma birimini, örtüşmeyi ve ortak sınırı belirleme

Noktalar, kareler ve çizgiler için 'bir tane daha eklemek' her zaman aynı sayısal değişimi oluşturmaz. Bir kareyi önceki karenin yanına eklemek, bir yeni kare üretir; fakat çizimde dört ayrı yeni kenar ortaya çıkmaz. Önceden çizilmiş ortak sınır zaten bulunduğundan üç yeni çizgi parçası eklenir. İlk kare dört farklı kenar parçası gerektirir; iki kare yedi, üç kare on, dört kare on üç parça gerektirir.

Burada kuralın nedeni, sayı dizisindeki 'üç artıyor' gözleminden daha somuttur: Her yeni kare, öncekine bir kenardan bitişir ve tam bir ortak kenarı yeniden çizmez. Bağlanma şekli değişirse artış da değişebilir. Örneğin kare yalnız bir köşede temas ediyorsa ortak çizilmiş kenar yoktur; yeni kare için dört kenar gerekir. Bu nedenle çizimde yan yana durma, sınır paylaşma ve üst üste gelme durumları ayırt edilmelidir.

$$K(n) = 4 + 3\cdot(n-1) = 3n+1$$

Anlamı: Aynı doğrultuda yan yana dizilen n birim karenin bütün farklı birim kenarlarını çizmek için gerekli çizgi parçası sayısı.

Koşullar: n pozitif tam sayıdır; her yeni kare önceki şekille tam olarak bir kenarı paylaşır, kenarlar eş birimlidir ve üst üste çizim parçası tekrar sayılmaz.

K(1)=4, K(2)=7, K(5)=16 ve K(9)=28 değerleri bulunur. Dokuz kare için bağımsız sayımda üstte dokuz, altta dokuz, dikey doğrultuda soldan sağa on birim çizgi parçası vardır: 9+9+10=28. Böylece 3·9+1 sonucu doğrulanır. Uzun bir sıra yerine iki boyutlu bir blok oluşturulursa aynı bağıntıyı koşulsuz kullanmak doğru olmaz.

3. Adım numarası ile görünür öğe sayısı arasındaki ilişki

Görsel örüntünün ilk adımı her zaman bir öğeden oluşmaz. Örneğin birinci şekilde iki nokta yan yana, ikinci şekilde dört nokta iki satırda, üçüncü şekilde altı nokta üç satırda gösterilsin. Her yeni adımda iki noktalı bir satır eklenmektedir. Buna göre n'inci şekilde n satır ve satır başına iki nokta vardır; toplam nokta sayısı 2n'dir. Altıncı şekilde 12, on birinci şekilde 22 nokta yer alır.

İlk adım dört noktayla başlatılmış olsaydı aynı satır ekleme yöntemi farklı bir genel kural verecekti. Görselin kaçıncı adımı temsil ettiği ile üzerinde kaç öğe bulunduğu eşdeğer bilgiler değildir. Birinci şekilden n'inci şekle n−1 ekleme yapılır, ancak ilk şeklin başlangıç öğeleri ayrıca hesaba katılır.

$$T(n) = T(1) + (n-1)\cdot k$$

Anlamı: Birinci şeklin T(1) adet öğe içerdiği ve her geçişte k adet yeni öğe eklendiği görsel örüntüde n'inci şeklin toplam öğesi.

Koşullar: n pozitif tam sayıdır; her adımda aynı türden k öğe eklenir ve öncekiler kaldırılmaz. k negatifse öğe sayısının negatif olmayacağı adımlarla sınırlı bir model gerekir.

4. Birim karelerden büyüyen dikdörtgen ve kare bloklar

Görselde her satırın ve her sütunun aynı sayıda birim kareden oluştuğu kare bloklar ele alındığında öğe sayısı satır ile sütun sayısının çarpımıdır. Birinci adımda 1 satır ve 1 sütun, ikinci adımda 2 satır ve 2 sütun, üçüncü adımda 3 satır ve 3 sütun olsun. Böylece şekillerin birim kare sayıları 1, 4, 9, 16, ... biçiminde ilerler. n'inci adım n satır ve n sütun içerdiği için toplam n^2 birim karedir. Burada amaç önceki derste yalnız sayı olarak incelenen kareler dizisinin görsel nedenini ortaya koymaktır.

Bir kare blok n×n boyutundan (n+1)×(n+1) boyutuna büyürken eklenen kareler tek tek sayılabilir. Önce mevcut n satırın sağına birer kare konur; n yeni kare gelir. Sonra alt tarafa n+1 karelik yeni bir satır eklenir. Toplam yeni kare sayısı 2n+1 olur. Örneğin 4×4 bloktan 5×5 bloka geçişte 4+5=9 kare eklenir; 16+9=25 sonucu doğrudan 5·5 ile aynıdır.

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

Anlamı: n×n birim karelik bloktan (n+1)×(n+1) bloka geçerken eklenen birim kare sayısı.

Koşullar: n pozitif tam sayıdır; birimler eş karelerdir ve yeni blok önceki blokla aynı ızgaraya hizalı biçimde büyütülür.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

5. Üçgensel nokta dizilişlerinin katmanlı sayımı

Her yeni satırda bir önceki satırdan bir nokta fazla bulunan üçgen biçimli nokta düzeninde, n'inci adımın satırları 1, 2, 3, ..., n noktadan oluşur. Dördüncü adımda 1+2+3+4=10 nokta vardır. Altıncı adımda ise 1+2+3+4+5+6=21 nokta bulunur.

Bu toplamı ikinci bir aynı nokta üçgeniyle yan yana düşünmek, iki üçgenin n satır ve n+1 sütunlu bir dikdörtgeni doldurmasını sağlar. Dikdörtgenin toplam birim konumu n(n+1) olduğundan ilk üçgendeki nokta sayısı bunun yarısıdır. Şeklin görsel simetrisi formülü gerekçelendirir; son satırdaki n noktayı bütün şeklin toplamı sanmak yanlıştır.

$$U(n) = 1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$$

Anlamı: Birinci satırda bir, her sonraki satırda bir fazla nokta bulunan n satırlı üçgensel nokta düzeninin toplam nokta sayısı.

Koşullar: n pozitif tam sayıdır; satır uzunlukları 1'den n'ye kadar bütün pozitif tam sayılardır.

Kare ve üçgensel blokların görünür öğe sayıları

Adım n	n×n kare bloğu	1+2+…+n nokta üçgeni
1	1	1
2	4	3
3	9	6
4	16	10
5	25	15
6	36	21

6. Dış çerçeve ile iç bölgeyi ayırma

Kare bir ızgaranın kenarlarındaki hücreler ayrı renkle boyandığında toplam boyalı hücre sayısı, bütün hücre sayısından iç kısımda kalanların çıkarılmasıyla bulunabilir. Kenar uzunluğu hücre cinsinden n olan bir n×n kare tabloda, n en az 2 ise dışta yalnız bir hücre kalınlığında çerçeve bulunur. İçte kalan boyasız kare blok (n−2)×(n−2) boyutundadır.

n=6 için bütün ızgarada 36 hücre, içte 4×4=16 hücre olduğundan çerçeve 20 hücredir. Başka bir yolla üstte 6, altta 6, bu iki satır dışındaki dört ara satırın her birinde solda ve sağda ikişer değil, toplam iki kenar hücresi bulunduğu görülür: 6+6+4·2=20. İki sayımın eşit olması köşelerin iki kez sayılmadığını kanıtlar.

$$C(n) = n^2 - (n-2)^2 = 4n-4$$

Anlamı: n×n kare ızgaranın yalnız bir hücre kalınlığındaki dış çerçevesinde bulunan hücre sayısı.

Koşullar: n tam sayı ve n≥2'dir; dıştaki hücreler birer kez sayılır. n=1 için formül uygulanmaz; tek hücre çerçeve olarak kabul edilirse sonuç 1'dir.

Örneğin sekiz hücre kenarlı bir kare ızgarada 4·8−4=28 çerçeve hücresi vardır. Diğer yöntemle $8^2-6^2=64-36=28$ bulunur. n=2 olduğunda 4 hücrenin tamamı dış sınırdadır; bağıntı 4·2−4=4 verir. Bu sınır durumu, formülün tanımlandığı alanın parçasıdır.

7. Bitişik çokgenlerde ortak kenar ve bağımsız parça hesabı

Kare dizisi dışında eşkenar üçgen gibi şekillerin de bir kenarı ortak kullanılabilir. Bir eşkenar üçgen üç eş doğru parçasından çizilsin. İlk üçgenden sonra her yeni üçgen, var olan bir üçgenin tam bir kenarını paylaşacak biçimde ve başka çakışma oluşturmadan eklensin. İlk şekil için üç, her yeni üçgen için iki yeni çizgi parçası gerekir. Dolayısıyla n üçgen için 3+2(n−1)=2n+1 farklı doğru parçası çizilir.

Örneğin yan yana bağlanan yedi üçgen için 2·7+1=15 çizgi parçası gerekir. Kontrol amacıyla başlangıçtaki üç çizgiye sonraki altı üçgenin her birinin getirdiği ikişer çizgi eklenir: 3+6·2=15. Fakat yeni üçgen iki kenarı

birden başka parçalarla örtüşecek şekilde yerleştirilirse bu artış geçerli değildir. Nesnelerin yalnız türü değil, bağlantı düzeni de kuralın bir parçasıdır.

$$P = m \cdot n - s$$

Anlamı: Her biri m kenarlı n çokgenin kendi kenar toplamından, iki çokgenin ortak kullandığı her birim kenarın bir kez fazladan sayılmasını çıkararak farklı çizilmiş kenar parçalarını bulma.

Koşullar: Bütün kenarlar aynı birim parçalara göre sayılır; her ortak parça tam iki çokgene ait olur; s bu tür ortak kenar parçalarının adedidir. Üç veya daha fazla şeklin bir parçayı paylaşması ya da kısmi örtüşmeler için doğrudan kullanılmaz.

Bu genel ifadede s, yalnız n'den hesaplanamayabilir. Eş dört kare yan yana bir sırada ise n−1 ortak kenar bulunur ve 4n−(n−1)=3n+1 elde edilir. Aynı dört kare 2×2 blok hâline getirilirse yatay yönde iki, düşey yönde iki, toplam dört ortak kenar vardır; 4·4−4=12 farklı çizgi parçası elde edilir. Dört karelik düz şeritte ise 3·4+1=13 parça vardır. Eş kare adedine rağmen sayının değişmesi, biçimin bağıntıda gerçek bir değişken olduğunu gösterir.

8. Çevre sınırı ile bütün çizilmiş kenarların ayrılması

Bitişik karelerden oluşan şekillerde dış sınır, yalnız diğer kareyle paylaşılmayan kenarlardan oluşur. Her yeni kare, mevcut şekle tam bir kenarından eklendiğinde dış sınırdaki eski ortak kenar görünür dış kenar olmaktan çıkar; yeni karenin kalan üç kenarı dışa açılır. Net artış üç eksi bir, yani iki birim çevredir.

Dört karenin tek sıra dizildiği bir blok dışarıdan 1×4 dikdörtgendir; çevresi 2·(1+4)=10 birimdir. Aynı dört kare 2×2 blok hâlinde düzenlenirse çevre 2·(2+2)=8 birim olur. Kare adedi her ikisinde dört olmasına karşın çevre farklıdır. Bir şeklin bütün çizilmiş ızgara kenarlarını sayarken içerideki ortak kenarlar da hesapta bulunur; çevre hesabında ise bulunmaz.

$$D = 4n - 2s$$

Anlamı: n birim kareden ve s adet ortak kenardan oluşan bir düzlemsel şeklin dışta kalan birim kenarlarının toplam sayısı.

Koşullar: Ortak kenarların her biri tam olarak iki kareye aittir, karelerin iç bölgeleri çakışmaz ve kenarlar eş birimlidir; dışta kalan sınır, varsa iç boşluk sınırlarını da içerir.

Dört kare tek sıradaysa s=3, dış sınır 16−6=10'dur. 2×2 blokta s=4, dış sınır 16−8=8'dir. İlk bağıntıda ortak kenar bir kez çıkarılırken burada iki kez çıkarılmasının nedeni, ortak kenarın hem birinci hem ikinci karenin dış sınırına aday kenarı olması, gerçekte ise ikisinin de dış sınırında bulunmamasıdır.

Çizgi parçası ile dış sınır uzunluğunu karıştırmama Farklı çizilmiş kenar parçaları için ortak kenarlar toplamdan bir kez; yalnız dış sınır için ortak kenarlar iki kez çıkarılır. Formüller ancak eş birimli ve belirtilen örtüşme koşulları altında uygulanır. Boşlukların dışındaki çevre ile bütün sınır bileşenlerinin toplamı isteniyorsa ayrıca ayrım yapılır.

9. Görselde satır-sütun ilişkisi ve eksik bir hücre

Bir tablo ya da nokta dizilişinde her satırın aynı uzunlukta olması, toplamı satır sayısı ile sütun sayısının çarpımına dönüştürür. Dört satır ve yedi sütundan oluşan bir düzende 4·7=28 hücre vardır. Bunların üçü boş bırakılmışsa görünür dolu hücre sayısı 25'tir. Yalnız boşlukların yeri değişti diye dolu hücre sayısı değişmez; fakat çizgisel komşuluk ve çevre ilişkileri değişebilir.

Örneğin 5 satır ve 8 sütunluk tam bir noktalar ızgarasında 40 nokta yer alır. Birbirini izleyen iki satırın kesişme noktaları ayrıca sayılmaz; her noktanın tam olarak bir satır ve bir sütun konumu vardır. Ancak bu ızgarada oluşan yatay birim çizgi parçası sayısı 5·7=35, dikey birim çizgi parçası sayısı 4·8=32, toplam 67'dir. Aynı çizimin nokta sayısı 40, birim kenar parçası sayısı 67 olduğundan sorulan ölçüt sonucu belirler.

5×8 nokta ızgarasında farklı sayımlar

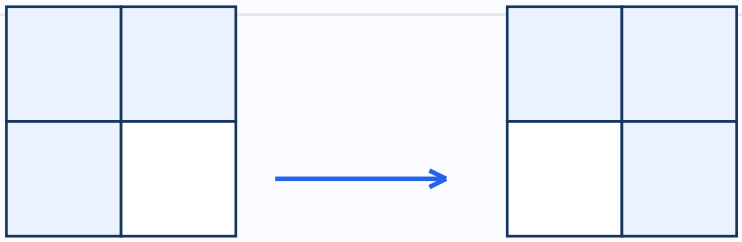
Sayılan öğe	Gerekçe	Sonuç
Nokta	5 sıra ve her sırada 8 nokta	40
Yatay birim çizgi	5 sırada 7 komşu nokta aralığı	35
Dikey birim çizgi	8 sütunda 4 komşu nokta aralığı	32
Toplam birim çizgi	35+32	67

10. Şeklin yönü, dönüşü ve aynadaki görünümü

Şekil-sayı ilişkilerinde kimi görseller aynı nesnenin yön değiştirmiş hâlidir. Bir L biçiminin döndürülmesiyle şeklin kapladığı birim kare sayısı değişmez; buna karşılık açık ucunun sağa, sola, yukarıya veya aşağıya bakması değişebilir. Örneğin üç birim kareden oluşan bir L'nin iki karesi üst sırada, üçüncüsü sol alt köşede bulunsun. Bu L, saat yönünde çeyrek tur döndürüldüğünde yine üç kare içerir. Nesne sayısının değişmemesi, yönün de değişmediği anlamına gelmez.

Bir şeklin 90° saat yönünde dönüşü ile yatay veya düşey aynalanması farklı işlemlerdir. Simetrisi olmayan bir şeklin ayna görüntüsü, yalnız döndürülerek elde edilemeyebilir. Üzerinde yön bildiren bir işaret varsa dönüşü yorumlamada bu işaretin konumu da taşınır. Görsel üzerindeki 2, 5 veya 8 gibi sayıların okunma yönü, dönmüş bir şeklin içindeki yazı biçiminden bağımsız kalabilir; eğer sayı da şekille birlikte döndürülüyorsa bu koşul açıkça belirtilmelidir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

11. Dönüşlerde tekrar süresi ve şeklin simetrisi

Saat yönünde her adımda 90° döndürülen ve dört ayrı yönü ayırt edilebilen bir ok dört adım sonra ilk durumuna döner. Birinci adım sağ yönünü gösteriyorsa ikinci aşağı, üçüncü sola, dördüncü yukarı, beşinci yeniden sağa yönelir. Buna göre on üçüncü konum, 13−1=12 tam dönüş adımı geçirmiştir; 12 dörde tam bölündüğü için ilk yön yeniden görünür.

Buna karşılık eşit kollu bir artı işareti 90° döndürüldüğünde görünüşünü hiç değiştirmez. Bir dikdörtgen, kare değilse, 180° dönünce aynı görünüme ulaşır; kare 90° dönüşte de aynı görünümü korur. Böylece uygulanan dönüş sayısı ile birbirinden ayırt edilebilen görünüş sayısı farklı olabilir. Örüntünün asıl tekrarlama süresi, yalnız dönüş açısına değil şeklin kendi simetrisine bağlıdır.

Dönüş adımı ve görünen durum ilişkisi

Başlangıç şekli	Her adımda dönüş	İlk görünüşe dönüş için asgari adım
Tek yönlü ok	Saat yönünde 90°	4
Kare	Saat yönünde 90°	1
Kare olmayan dikdörtgen	Saat yönünde 90°	2
Eşit kollu artı işareti	Saat yönünde 90°	1

Buradaki sayılar, şekillerin çevresindeki işaretler veya renklerle farklılaştırılmadığı kabulüne dayanır. Köşeler numaralandırılırsa, üzerinde yazı bulunan karenin 90° dönüşte aynı *etiketli* görünüşü üretmesi gerekmeyebilir. Bu nedenle simetri, yalnız dış çizgiye mi, bütün işaretli görsele mi uygulandığı belirtilerek değerlendirilmelidir.

12. Renkli parçalarla kurulan şekil-sayı bağıntıları

Bir görselde bütün öğeleri saymak yerine yalnız belirli renkte veya belirli biçimde olanları saymak gerekebilir. Her adımda üç mavi ve iki kırmızı kareden oluşan beşli bir blok eklendiğini, ilk adımın da bu bloktan meydana geldiğini kabul edelim. Dördüncü adımda toplam 20 kare, bunların 12'si mavi ve 8'i kırmızıdır. Mavi karelerin tüm karelere oranı 12/20=3/5 olur; adım sayısı değişse de blok bileşimi sabitse oran değişmez.

Buna karşılık birinci adımda tek kırmızı kare sabit tutuluyor, her yeni adımda iki mavi kare ekleniyorsa n'inci adımdaki kırmızı sayısı 1, mavi sayısı 2(n−1), toplam kare sayısı 2n−1'dir. Kırmızı kare oranı 1/(2n−1) olur ve n büyüdükçe azalır. Görselde bir rengi daha fazla görmek, o rengin oranının da arttığı anlamına gelmez. Toplamın hangi sayıya göre kurulacağı açık olmalıdır.

$$M(n)=3n,\ R(n)=2n,\ T(n)=5n;\ M(n)/T(n)=3/5$$

Anlamı: Her adımda üç mavi ve iki kırmızı öğelik ayrı bir beşli blok eklenen, birinci adımı bir bloktan oluşan düzen.

Koşullar: n pozitif tam sayı; her adımda aynı beşli blok eklenir, renklere sonradan dönüşüm uygulanmaz; oranın paydası toplam öğe sayısıdır.

13. Şekil adından sayı üretme: özelliklerin sabit ve değişken olması

Şekiller sayıya dönüştürülürken şeklin köşe sayısı, kenar sayısı, köşegen sayısı veya işaretli bölge adedi gibi farklı özellikler kullanılabilir. Tek bir kare dört köşe ve dört kenar taşır; üçgen üç köşe ve üç kenar taşır. Ancak 'kare=4' eşleştirmesi, sayının kenar sayısını gösterdiği koşulu açıklanmadan tek başına matematiksel bir zorunluluk değildir; dört köşe de aynı sonucu verir.

Örneğin bir tabloda üçgen için 3, dörtgen için 4, beşgen için 5 yazılmış ve açıklamada her çokgenin kenar adedinin kodlandığı belirtilmiş olsun. Bu kural altında altıgenin karşılığı 6'dır. Aynı şeklin içine çizilmiş nokta sayısı temel alınsaydı farklı sonuçlar mümkün olacaktı. Şekle ait özellik ile görselin üzerine sonradan eklenmiş işaret birbirinden ayrılmalıdır.

Şekil-kod eşleştirmesinde tek anlamlılık Şekil ile sayı eşlemesi verilen bir kural veya açık bir sayma özelliği üzerine kurulmalıdır. Az sayıda örnek üzerinden birden fazla ilişki kurulabiliyorsa, hangisinin zorunlu sonuç olduğu belirtilen koşullara bağlıdır.

14. Birden fazla görsel özelliğin birlikte değişmesi

Görsel örüntüler kimi zaman tek bir ölçüyle açıklanamaz. Birinci adımda iki satırlı ve üç sütunlu bir dikdörtgen nokta blok, ikinci adımda üç satırlı ve dört sütunlu blok, üçüncü adımda dört satırlı ve beş sütunlu blok olsun. Her adımda hem satır hem sütun sayısı bir artar. n'inci adımda satır sayısı n+1, sütun sayısı n+2 olur; toplam nokta sayısı (n+1)(n+2)'dir.

Üçüncü adımda 4·5=20, yedinci adımda 8·9=72 nokta vardır. Ardışık toplamlar 6, 12, 20, 30, ... olduğundan artışlar sabit değildir. Bu durum düzensizliği değil, görselin iki boyutunun birlikte değişmesini gösterir. Sonuç, görselin satır ve sütun ilişkisini okuyarak doğrudan bulunur; sayılar arasında gelişigüzel fark örüntüleri aramaya gerek kalmaz.

$$N(n) = (n+1)(n+2)$$

Anlamı: n'inci adımı n+1 satır ve n+2 sütundan oluşan nokta dikdörtgeninin toplam nokta sayısı.

Koşullar: n pozitif tam sayı; her satır ve sütun kesişiminde birer nokta vardır ve herhangi bir eksik/çift sayılan nokta bulunmaz.

İki boyutu birlikte büyüyen nokta dikdörtgeni

Adım	Satır	Sütun	Toplam nokta	Önceki adıma göre artış
1	2	3	6	Başlangıç
2	3	4	12	+6
3	4	5	20	+8
4	5	6	30	+10
7	8	9	72	6. adımdaki 56'dan +16

15. Gizli veya eksik çizilmiş öğelerin denetlenmesi

Bir şeklin bir bölümü silinmiş veya başka bir nesnenin arkasında kalmış olabilir. Tamamlanmış 4×6 hücrelik bir tabloda 24 hücre konumu vardır. Bir çizimde bu konumların 20'si açıkça görünüyor ve diğer dört konum boş bırakılmışsa, görünür hücre sayısı 20'dir. 'Bütün konumlar başlangıçta doluydu, dört hücre kaldırıldı' koşulu varsa geriye kalan hücre sayısı yine 20 olur; ancak 'dört hücre kapatıldı' deniyorsa fiziksel toplam 24, görülebilir toplam 20 olabilir.

Görünmeyen her bölgeyi var kabul etmek de yok kabul etmek de gerekçesiz olabilir. Özellikle üst üste binen figürlerde, arkadaki parçanın devam edip etmediği görselden tek başına kesinleşmeyebilir. Sayı ilişkisi kurarken görünür, toplam, gizli ve varsayılan öğelerin ayrı tutulması gerekir. Aynı ilke, bir grafikte gösterilmeyen veriyle sıfır değerini karıştırmama açısından ileride de kullanılacaktır.

16. Ters yönden düşünme: verilen toplamdan adım bulma

Şeklin kaçıncı adımda belirli sayıda öğeye ulaştığı da görsel kuralın tersinden incelenebilir. Tek sırada yan yana dizilen eş karelerin bütün farklı birim kenarları 3n+1 bağıntısıyla sayılıyorsa 46 çizgi parçası için 3n+1=46, dolayısıyla 3n=45 ve n=15 bulunur. Doğrudan denetimle 15 karenin üstte 15, altta 15 ve dikeyde 16 çizgi parçası vardır; toplam 46'dır.

n satırdan oluşan üçgensel nokta düzeninde 45 nokta bulunması koşulu n(n+1)/2=45 eşitliğini verir. Buradan n(n+1)=90; ardışık 9 ve 10 sayılarının çarpımı 90 olduğundan n=9'dur. Ters hesapta n doğal sayı olmalıdır; birim kare veya nokta adedi gerektiren örüntü için kesirli adım sayısı kendiliğinden uygun kabul edilmez.

Şekilden sayıya ve sayıdan adıma geri dönüş

Görsel model	Verilen sonuç	Denklem veya ters denetim	Adım
Bir sırada bitişik karelerin çizgi parçaları	46	3n+1=46	15
Üçgensel nokta katmanları	45	n(n+1)/2=45	9
n×n birim kare bloğu	64	n^2=64, n pozitif	8
(n+1)×(n+2) nokta dikdörtgeni	42	6×7=42	5

17. Karma görsellerde kuralı sınama ve bütünleşik öğretici örnek

Bir düzenleme panosunda her adımda üst üste dizilmiş eş karelerden oluşan bir şerit uzatıldığını düşünelim. Birinci adımda yan yana iki kare, ikinci adımda üç kare, üçüncü adımda dört kare vardır. Her yeni adım, şeridin sağına bir kare ekler. n'inci adımda n+1 kare bulunur. Bu karelerin dış sınırı, 1 birim yüksekliğinde ve n+1 birim uzunluğunda dikdörtgenin çevresi olduğundan 2(n+2) birimdir. Aynı şeritte çizilmiş bütün farklı kenar parçaları 3(n+1)+1=3n+4 adettir.

Altıncı adımın kare sayısı 7, dış çevresi 2·(6+2)=16 birim ve farklı çizgi parçası sayısı 3·6+4=22'dir. Şimdi ayrıca her karenin merkezine bir mavi nokta konduğunu varsayalım. Bu durumda mavi nokta adedi de yedidir. Böylece aynı adım için dört ölçü oluşur: kare sayısı 7, nokta sayısı 7, dış çevre 16 birim, farklı çizgi parçası 22. Bu değerlerin farklı olması çelişki değildir; her biri aynı görselin başka bir özelliğine karşılık gelir.

Bağımsız kontrol için yedi karelik şeritte üst ve alt çizgiler 7+7, dikey çizgiler 8 olduğundan toplam 22 bulunur; yalnız dış sınır istenince uçlardaki iki dikey çizgi dikkate alınır ve 7+7+1+1=16 elde edilir. Her karenin merkezinde tek nokta bulunduğu için merkez noktaların sayısı kare sayısına eşittir. Önceki adımda altı kare için çevre 14 ve çizgi parçası 19 olduğundan yeni kare eklendiğinde çevre iki, farklı çizgi parçası üç artar. Bu değişimler hem görsel yerleşimle hem sayısal kuralla uyumludur.

Aynı şerit için dört farklı niceliğin kontrolü

Adım	Kare	Merkez nokta	Dış çevre birimi	Farklı çizgi parçası
1	2	2	6	7
2	3	3	8	10
3	4	4	10	13
6	7	7	16	22

Bu bütünleşik örnekte çıkarımın temeli dört ayrı sayısal diziyi ezberlemek değil, her sayı sütununu hangi fiziksel/görsel özelliğin ürettiğini göstermektir. Görsel bağıntı kurulduğunda yeni bir adımın değerleri hesaplanabilir; sayı değerleri verildiğinde de şeklin olası ölçüsü ters işlemle denetlenebilir.

18. Belirsiz görsel kurallar ve sonucun geçerlilik sınırı

İlk üç şeklin kare sayıları sırasıyla 2, 4 ve 6 ise en yalın yorum her adımda iki kare eklendiğidir. Fakat şekillerin yerleşimi verilmemişse bunların çizilmiş kenar sayıları veya dış sınırları kesin hesaplanamaz. İki kare bitişik de olabilir, birbirinden ayrı da; altı kare bir şerit, iki satırlı bir blok veya başka bir biçim oluşturabilir. 'Şekil adedi 6' bilgisinden 'dış çevre 14' sonucunu zorunlu çıkarmak için altı karenin tek sıra bitişik olduğu bilgisi de gerekir.

Ayrıca birkaç görsel örnek aynı anda birden fazla kuralla açıklanabilir. Üç adımda gözlenen artış, dördüncü adımda da aynı yapının sürdürüleceğini varsaymak için bir ipucu oluşturur; fakat açıkça tanımlanmamış kuralın tek olası devamı olduğunu matematiksel olarak kanıtlamaz. Güçlü çözüm, önce sorunun saydığı niceliği tanımlar; sonra şekillerin ortak ve değişen özelliklerini belirler; genel bağıntıyı kurar; son olarak bilinen bütün adımlarla ve bağımsız bir sayım yoluyla denetler.

Şekil ve sayı ilişkileri böylece yalnız çizimleri takip etme becerisi değildir. Görseli uygun ölçüye dönüştürmeyi, ortak öğeyi iki kez saymamayı, yerleşim değiştiğinde sayının neden değiştiğini ve sınırlı veriden hangi sonuçların zorunlu olmadığını öğreten bir muhakeme yöntemidir. Sonraki konuda, görsel düzenin sayısal özelliğinden farklı olarak açıkça tanımlanan işlemler ve bu işlemlerin kendi kuralları incelenecektir.

KONU 4.3

İŞLEM TANIMLAMA VE İŞLEM MANTIĞI

Matematikte +, −, × ve ÷ gibi alışılmış işlem işaretleri belli kurallarla kullanılır. Sayısal muhakemede ise bir işaretin anlamı o çalışma için yeniden tanımlanabilir. Örneğin iki sayının arasına yerleştirilen ★ işareti, çarpma anlamına gelmek zorunda değildir; “ilk sayının iki katına ikinci sayının üç katını ekleme” işlemini gösterebilir. Böyle bir tanımın doğru okunması, yeni bir aritmetik kural icat etmekten çok, verilmiş kuralı düzenli biçimde uygulamakla ilgilidir.

İşlem tanımlama konusunun belirleyici ayrımı, işaretin görünüşüyle işlevini birbirinden ayırmaktır. Özel işaret önce açık kurala, ardından belirlenmiş sayı çiftine çevrilir. İç içe işlemlerde hangi sonucun bir sonraki işleme girdi olduğu izlenir. Bazı kurallar yalnız belirli sayı kümelerinde geçerlidir; kimi tablolar ise işlemin değerini doğrudan verir. İşaretin tanımı, girdi sırası ve geçerlilik koşulları anlaşılmadan yapılan hesap, aritmetik yönünden doğru görünse bile yanlış bir işlemin hesabı olabilir.

1. Yeni bir işlemin tanımı ve girdilerin sırası

İki sayıya bağlı özel bir işlemi tanımlamak için bu sayıları temsil eden değişkenler kullanılır. a ve b birer gerçek sayı olmak üzere a ★ b = 2a+3b tanımlansın. Burada ★, çarpma veya başka bilinen bir işlemin kısaltması değil, sağ taraftaki bağıntının adıdır. İşleme soldan giren sayı a, sağdan giren sayı b yerine konur. Örneğin 4 ★ 5 = 2·4+3·5 = 8+15 = 23'tür. İkinci kontrolde önce birinci girdinin katkısı 8, ikinci girdinin katkısı 15 olarak ayrı hesaplanır; toplam 23 olur.

İşlemin girdileri yer değiştirirse sonuç değişebilir. Aynı tanımda 5 ★ 4 = 2·5+3·4=10+12=22'dir. Görünüşte aynı iki sayı kullanılmış olsa da işlem sırası farklıdır. Bu nedenle işlemi değerlendirirken sol ve sağ taraftaki girdileri ayrı yerlere yazmak, özellikle birden çok sembol bir arada kullanıldığında hatayı önler.

$$a \star b = 2a + 3b$$

Anlamı: Birinci girdinin iki katı ile ikinci girdinin üç katının toplamı olarak tanımlanan iki girdili işlem.

Koşullar: a ve b gerçek sayılardır; ★ işaretinin anlamı yalnız bu tanımda belirtilen bağıntıdır.

Girdilerin sırasına göre özel işlemin değerleri

İşlem	İlk girdinin katkısı	İkinci girdinin katkısı	Sonuç
4 ★ 5	2·4 = 8	3·5 = 15	23
5 ★ 4	2·5 = 10	3·4 = 12	22
0 ★ 6	2·0 = 0	3·6 = 18	18
6 ★ 0	2·6 = 12	3·0 = 0	12

2. Tanımı uygulama sırası: sembolden aritmetiğe

Özel işlemli bir ifadede üç ayrı aşama vardır: Sembolün hangi kuralla tanımlandığını belirlemek, girdileri doğru sırayla yerine koymak ve ortaya çıkan standart aritmetik ifadeyi işlem önceliğine göre hesaplamak. Bu aşamaların yer değiştirmesi gerekmez; özellikle tanımın içindeki eksi işareti veya parantez girdiye ait kabul edilmelidir.

Örneğin a ◇ b = 3a−2b+4 ve girdiler a=−2, b=5 olsun. Yerine koyma yapıldığında (−2) ◇ 5 = 3·(−2)−2·5+4 = −6−10+4 = −12 elde edilir. Denetim için −6 ile −10'un toplamı −16 bulunur; dört eklenince −12 çıkar. İkinci girdi −5 olsaydı aynı tanımın sonucu 3·(−2)−2·(−5)+4=−6+10+4=8 olurdu. Bu karşılaştırmada değeri değiştiren unsur, ikinci girdinin eksi işaretinin çıkarma işlemiyle çarpışmasıdır.

> **Tanım yerine koyma disiplini** İşlemin içinde a veya b yerine negatif sayı ya da cebirsel ifade yerleştirilirken parantez kullanmak işaret hatasını önler. Özel işlem, tanım verilmedikçe alışılmış çarpma veya toplama gibi okunmaz.

3. Tek girdili işlem ile iki girdili işlemi ayırma

Bütün özel işlemler iki sayı arasında gösterilmez. Bir sayının çevresine konan köşeli ayraç, yeni bir değer üreten tek girdili bir dönüşümü ifade edebilir. Örneğin T(x)=3x−4 tanımı, tek girdi alır. T(6)=18−4=14, T(−2)=−6−4=−10 olur. T(x) yazımı çarpma değildir; “x üzerinde T dönüşümünü uygulama” anlamına gelir.

İki girdili işlem ise a ★ b gibi ayrı iki girdi ister. Bir işlemin biçimi değişken sayısını belirler: T(x) tek girdili, a ★ b iki girdilidir. Bu fark, T(a ★ b) biçimindeki bileşik ifadelerde belirginleşir; önce iki girdiden bir sayı çıkarılır, sonra o sayı T'ye girdi olarak verilir. Önceki ★ tanımını kullanırsak T(2 ★ 3)=T(2·2+3·3)=T(13)=3·13−4=35 bulunur. Bağımsız olarak T(13)=39−4=35 olması, iç işlemden dışa doğru sıranın korunduğunu gösterir.

$$T(x) = 3x - 4;\ T(a \star b) = 3(2a+3b) - 4$$

Anlamı: Önce iki girdili ★ işlemi, ardından onun sonucu üzerinde T dönüşümü uygulanır.

Koşullar: a, b ve x gerçek sayılardır; ★ önceki bölümde a ★ b = 2a+3b olarak tanımlanmıştır.

4. İç içe işlemlerde parantezin belirleyici rolü

İki girdili bir işlemin sonucu başka bir işlemin girdisi olduğunda parantezler, önce hangi işlemin yapılacağını belirler. ★ işlemi a ★ b = 2a+3b ise (1 ★ 2) ★ 3 ile 1 ★ (2 ★ 3) aynı ifade değildir. İlkinde 1 ★ 2 = 2+6=8; bunun 3 ile işlemi 8 ★ 3 = 16+9=25'tir. İkincisinde 2 ★ 3=4+9=13; sonra 1 ★ 13=2+39=41 olur.

Bu farklılık hesap kusuru değildir. Özel işlem için birleşme özelliği tanımlanmış veya kanıtlanmış değildir. İşlem yönünü ve gruplamayı parantez belirler; parantezi atmak, matematiksel sorunun kendisini değiştirebilir.

Gerçekten a ★ b=2a+3b tanımı için (a ★ b) ★ c=4a+6b+3c, a ★ (b ★ c)=2a+6b+9c'dir. Bu iki cebirsel ifade her a, b, c üçlüsünde eşit olmadığından işlem genel olarak birleşmeli değildir.

$$(a \star b) \star c = 4a+6b+3c;\ a \star (b \star c) = 2a+6b+9c$$

Anlamı: Aynı tanımlı özel işlemde iki farklı parantez düzeninin ayrı sonuçlar verebildiğinin cebirsel gösterimi.

Koşullar: a ★ b=2a+3b ve a, b, c gerçek sayılardır. Eşitlik ancak 2a−6c=0, yani a=3c özel koşulunda sağlanır; genel birleşme özelliği yoktur.

5. Farklı sembollerin birlikte kullanılması

Bir metinde aynı anda birden fazla özel işaret tanımlanabilir. Bunların aynı kuralla çalıştığı varsayılamaz. Örneğin a △ b = a+b+2 ve a □ b = ab−1 tanımlansın. (3 △ 4) □ 2 ifadesinde önce 3 △ 4=9 elde edilir; ardından 9 □ 2=9·2−1=17 bulunur. Buna karşılık 3 △ (4 □ 2) için iç işlem 4·2−1=7, dış işlem 3+7+2=12'dir.

Bazen sembol tanımı, standart aritmetik işlem önceliğinden bağımsız olarak özel bir bağlanma kuralına sahiptir. Kullanılan metin yalnız a △ b ve a □ b biçimlerini açıklayıp “3 △ 4 □ 2” ifadesinin parantezini veya işlem önceliğini belirtmiyorsa 17 ile 12 arasında hangisinin istenildiği kesin değildir. Kitapta belirsiz ifadeyi tek sonuca zorlamak yerine, iki olası gruplayışın farklılığını görünür kılmak tercih edilir.

İki sembollü ifadede gruplama farkı

İfade	İlk hesap	Son hesap	Sonuç
(3 △ 4) □ 2	3+4+2=9	9·2−1	17
3 △ (4 □ 2)	4·2−1=7	3+7+2	12

6. İşlem sonucundan bilinmeyen girdiye ulaşma

Özel işlemde sonuç ve girdilerden biri biliniyorsa tanım, bilinmeyeni bulmak için bir denklem hâline getirilir. Örneğin a ★ b=2a+3b ve 4 ★ x=29 olsun. İlk girdi 4 olduğundan 2·4+3x=29 yazılır. Buradan 3x=21 ve x=7 bulunur. Doğrudan yerine koyarak 4 ★ 7=8+21=29 elde edilir.

Girdinin hangi konumda bilinmediği önemlidir. x ★ 4=29 için 2x+3·4=29, dolayısıyla 2x=17 ve x=8,5 olur. Aynı sonucun, aynı iki girdili kuralın farklı konumlarında farklı bilinmeyenler üretmesi beklenen bir durumdur. Her iki hesapta da denklem kurarken önce sabit girdi doğru katsayıyla çarpılır.

$$a \star b = 2a+3b = s;\ a = (s-3b)/2;\ b = (s-2a)/3$$

Anlamı: Sonucu s olan ★ işleminde girdilerden birini diğer girdi ve sonuç üzerinden bulma.

Koşullar: a, b, s gerçek sayılardır; tanımdaki 2 ve 3 sıfırdan farklıdır; kullanılan sayılar tanım kümesinde kalmalıdır.

7. Çözümün tanım kümesine uygunluğu

Bir denklem cebirsel olarak çözülebilir; ancak çıkan sayı işlemin kabul ettiği girdiler arasında bulunmayabilir. Örneğin a ⊙ b = (a+b)/2 işlemi yalnız pozitif tam sayılar a ve b için tanımlansın. 5 ⊙ x=4 eşitliği (5+x)/2=4 ve x=3 sonucunu verir; üç pozitif tam sayı olduğu için çözüm geçerlidir. 5 ⊙ x=4,5 eşitliğinde ise x=4 çıkar; o da pozitif tam sayıdır ve 5 ⊙ 4=4,5 sonucu doğru olur. Tanımın girdileri pozitif tam sayı istemesi, çıktıların da mutlaka tam sayı olmasını gerektirmez; işlemin hedef kümesi ayrıca belirtilmelidir.

Buna karşılık $5 \odot x=2{,}25$ için $x=-0{,}5$ elde edilir; bu sayı pozitif tam sayı olmadığından verilen işlem tanımına uygun çözüm yoktur. Cebirsel bağıntıyı sağlayan her gerçek sayının geçerli girdi sayılmaması, özel işlemlerin temel sınırlarından biridir. Tanım kümesi ve varsa görüntü kümesi, işlemin nasıl çalıştığı kadar önemlidir.

> **Cebirsel çözüm ile geçerli çözüm ayrımı** Önce işlem tanımından denklem kurulur; ardından bulunan sayı tanımın izin verdiği kümede mi kontrol edilir. Negatif, kesirli veya sıfır girdiler yasaklanmışsa bu değerler sonuç eşitliğini sağlasa bile kabul edilmez.

8. Kesirli işlem tanımlarında payda denetimi

Bazı özel işlemler kesir üretir. Örneğin $a \oslash b = (a+2b)/(a-b)$ olsun. Bu işlemin $a=b$ durumunda tanımsız olduğu baştan belirtilmelidir. $7 \oslash 3=(7+6)/(7-3)=13/4=3{,}25$'tir. Sonuç başka yoldan $13/4$ kesrinin dörtle çarpılmasıyla denetlenebilir: $(13/4)\cdot 4=13$; bu da paya eşittir.

Aynı tanımda $4 \oslash 4$ yazılamaz; payda $4-4=0$'dır. “Pay da sıfır olursa sadeleşir” düşüncesi burada geçerli değildir; sıfıra bölme tanımsızdır. Ayrıca $3 \oslash 7=(3+14)/(3-7)=17/(-4)=-4{,}25$'tir. Girdi sırası değişince yalnız payın değil paydanın da işareti ve değeri etkilenir. Negatif payda, sıfır paydadan farklıdır: Negatif payda tanımlı bir kesir oluşturabilir.

$$a \oslash b = (a+2b)/(a-b)$$

Anlamı: İlk girdinin ikinci girdinin iki katıyla toplamının, ilk ve ikinci girdinin farkına bölünmesi.

Koşullar: a ve b gerçek sayılardır; $a \neq b$ olmalıdır. Her işlemde bütün paydanın sıfırdan farklı olduğu yeniden denetlenir.

9. İşlem tablosunun satır ve sütunlarının okunması

Bir özel işlemin kuralı formülle değil tabloyla verilebilir. Tablo okurken sol başlık satırdaki birinci girdiyi, üst başlık sütundaki ikinci girdiyi gösterir. Aşağıdaki işlemde girdilerin her biri 0, 1 veya 2 olabilir; çıktı da aynı kümeden seçilir. Tablo, birinci ve ikinci girdinin toplamının 3'e bölümünden kalanını gösterir. Bu, bir öğretici tanımdır; alışılmış tam sayı toplamasıyla aynı işlemi her durumda vermez.

{0,1,2} kümesinde tablo ile tanımlanan ⊕ işlemi

⊕	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabloya göre $2 \oplus 1$, 2 satırı ve 1 sütununun kesişimi olduğu için 0'dır. Buna karşılık $1 \oplus 2$ de aynı sonuç 0'ı verir. Örneğin $2 \oplus 2=1$, çünkü $2+2=4$'ün 3'e bölümünden kalan 1'dir. Tablodaki sonuç 4 olarak yazılmaz; işlem tanımı gereğince kalan alınır. Tabloyu ikinci bir yoldan doğrularken 0, 1 veya 2 değerlerinin aynı satırda birer kez yer aldığını gözlemek de mümkündür.

$$a \oplus b = (a+b)\text{'nin 3 ile bölümünden kalan}$$

Anlamı: 0, 1 ve 2 girdilerini yeniden 0, 1 veya 2 değerlerinden birine dönüştüren özel işlem.

Koşullar: $a,b \in \{0,1,2\}$; kalan, sıfır veya pozitif olup 3'ten küçüktür. Bu tablo verilen tanımın tüm girdi çiftlerini kapsar.

10. Tabloyla tanımlanan işlemin iç içe uygulanması

Tabloda ardışık iki işlem gerektiğinde ilk işlemin sonucu yeni bir girdi olur. Örneğin (2 ⊕ 2) ⊕ 1 için ilk kesişim 2 ⊕ 2=1'dir; sonra 1 ⊕ 1=2 elde edilir. Doğrudan toplamın üçe bölümünden kalanına göre de 2+2+1=5 ve kalan 2'dir. Bu ikinci yöntem, kullanılan tablonun kuralından bağımsız değil, aynı kuralın farklı temsilidir; kontrol açısından yine de tablo kesişimlerini denetlemeye yarar.

İşlem tablosunun amacı yalnız örnek değeri bulmak değildir. Bir tablodan işlem özellikleri de değerlendirilebilir: ⊕ tablosu ana köşegene göre simetrik olduğundan her iki girdi için satır-sütun yer değiştirmesi sonucu değiştirmez. Ancak rastgele bir işlem tablosunun bu özelliği taşıdığı varsayılmaz. İşlem, hangi sayılar üzerinde tanımlandıysa özellik kontrolü de o küme üzerinde yapılır.

İç içe tablo işleminin sıra denetimi

İfade	Birinci tablo sonucu	İkinci tablo sonucu	Açıklama
(2 ⊕ 2) ⊕ 1	2 ⊕ 2=1	1 ⊕ 1=2	Sonuç 2
2 ⊕ (2 ⊕ 1)	2 ⊕ 1=0	2 ⊕ 0=2	Sonuç 2
(1 ⊕ 2) ⊕ 2	1 ⊕ 2=0	0 ⊕ 2=2	Sonuç 2

11. Değişme özelliği ve karşı örnekle denetim

Bir iki girdili işlemde girdilerin yer değiştirmesi hiçbir sonucun değerini değiştirmiyorsa işlem değişme özelliğine sahiptir. Bu özellik, alışılmış toplama ve çarpma için tanıdıktır; fakat özel semboller için ayrıca gösterilmelidir. Örneğin a ⋄ b = a+b+ab tanımı gerçek sayılarda simetriktir: b ⋄ a=b+a+ba aynı değeri verir. Bu nedenle her a ve b için a ⋄ b=b ⋄ a eşitliği doğrudur.

Buna karşılık a ★ b=2a+3b için 4 ★ 5=23 ve 5 ★ 4=22 bulundu. Tek bir karşı örnek, “her sayı çifti için değişme özelliği vardır” iddiasını çürütmeye yeter. Birkaç eşit sonuç örneği bulmak ise bütün sayılar için geçerli olduğunu kanıtlamaz. Örneğin a=b olduğunda a ★ b=b ★ a sağlanır; ancak bu özel durum genel değişme özelliğini göstermez.

$$a \diamond b = a+b+ab = b+a+ba = b \diamond a$$

Anlamı: ⋄ işleminin değişme özelliğini sağlayan simetrik tanım.

Koşullar: a ve b gerçek sayılardır; alışılmış toplama ve çarpmanın değişme özellikleri kullanılır.

12. Birleşme özelliği, birim eleman ve kapalılık

Değişme özelliği girdi yerlerinin değiştirilmesi, birleşme özelliği ise üç girdinin farklı gruplanmasıyla ilgilidir. Bunlar farklı sorulardır. Az önce tanımlanan a ⋄ b = a+b+ab işlemi için (a ⋄ b) ⋄ c açıldığında a+b+c+ab+ac+bc+abc elde edilir. a ⋄ (b ⋄ c) de aynı açılımı verir. Böylece ⋄ işlemi gerçek sayılar üzerinde birleşmelidir. İşlemin bu özelliği, iki ayrı parantezli ifadeyi bütün girdiler için cebirsel eşitliğe dönüştürerek kontrol edilir.

Birim eleman ise bir sayıyla işlem yapıldığında diğer sayıyı değiştirmeyen, aynı kümedeki özel bir değerdir. a ⋄ 0 = a+0+a·0=a ve 0 ⋄ a=0+a+0·a=a olduğundan 0 bu işlemin iki taraflı birim elemanıdır. Kapalılık ise a ve b girdileri seçilen kümedeyken işlemin sonucunun yine aynı kümede bulunmasıdır. Gerçek sayılarda a+b+ab gerçek olduğundan ⋄ işlemi bu kümede kapalıdır.

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) = a+b+c+ab+ac+bc+abc;\ a \diamond 0=0 \diamond a=a$$

Anlamı: $\diamond$ işleminin birleşme özelliği ve iki taraflı birim elemanı.

Koşullar: a,b,c gerçek sayılardır; $\diamond$ işlemi $a \diamond b=a+b+ab$ biçimindedir.

Birim eleman ve ters eleman aynı değildir. Ters eleman, bir girdinin işlem sonucunu birim elemana dönüştüren başka bir girdidir. $a \diamond b=0$ eşitliğinde $a+b+ab=0$ yazılır; $(1+a)b=-a$ olur. $a\neq -1$ ise $b=-a/(1+a)$ bulunur. $a=-1$ olduğunda $(-1) \diamond b=-1$ her b için geçerlidir; dolayısıyla -1'in birim eleman 0'a götüren tersi yoktur. İşlemin değişmeli, birleşmeli ve kapalı olması bütün elemanların mutlaka tersinin bulunduğunu söylemez.

13. İşlemin sonucunun sabit kaldığı özel koşullar

Bazı işlemlerde sonuç, girdilerin belirli bir ilişkisi sağlandığında sabit kalır. Örneğin $a \bigtriangledown b = a-b+6$ olsun. $a \bigtriangledown b=6$ eşitliği, $a-b=0$ yani $a=b$ koşuluna karşılık gelir. Girdiler eşit seçildikçe sonuç altı olur: $3 \bigtriangledown 3=6$ ve $-5 \bigtriangledown (-5)=6$. Burada sabit sonuç, her farklı ikilide elde edilmez; belirli bir koşulu temsil eder.

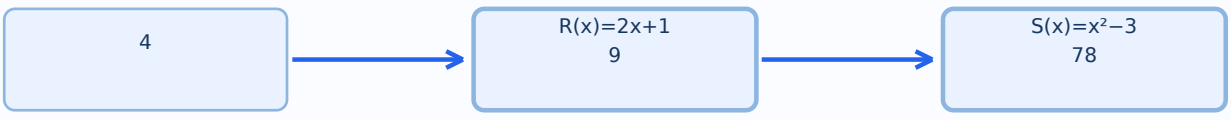
Daha genel bir örnekte $a \bigtriangledown b=10$ ise $a-b=4$'tür. Bu eşitliği 9 ve 5, 1 ve -3 ya da 4 ve 0 çiftleri karşılar. İşlem yalnız doğal sayı girdilerine izin verseydi negatif girdili çift dışarıda kalacaktı. Tek bir işlem sonucu, iki girdinin her birini tek başına belirlemek zorunda değildir; bazen yalnız aralarındaki farkı belirler. Bu sonuç, çözüm kümesini tanımlamakla sayısal tek yanıt bulmak arasındaki ayrımı gösterir.

14. İşlem zincirinde ara değerleri izleme

Birden fazla dönüşüm arka arkaya uygulandığında her aşamanın çıktısı bir sonraki adımın girdisidir. Örneğin $R(x)=2x+1$, $S(x)=x^2-3$ tanımlansın. İlk değer $x=4$ ise önce R işlemi $2\cdot4+1=9$ verir; sonra $S(9)=9^2-3=78$ olur. Ters uygulama sırası aynı sonucu doğurmaz: Önce $S(4)=16-3=13$, sonra $R(13)=27$ elde edilir. Böylece $S(R(4))=78$, $R(S(4))=27$'dir.

Bu ayrım, iç içe parantezlerin biçimsel konusu olmanın ötesinde sıralı işlemlerin mantığıdır. İlk aşamada elde edilen yeni değeri kaydetmeden sonraki aşamada başlangıç değerini yeniden kullanmak işlemi değiştirir. Bir dönüşümün girdisi ve çıktısı farklı tür veya birimdeyse, bu türlerin de uygun olması gerekir; burada tüm değerler gerçek sayıdır ve birim kullanılmaz.

Konuya ait açıklayıcı şema



Diğer sıra: $4 \to S(4)=13 \to R(13)=27$

Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

15. Üçlü ve daha fazla girdili tanımlarda işlem mantığı

Bir kural iki değil üç girdiyle de tanımlanabilir. Örneğin $F(a,b,c)=2a-b+3c$ olsun. $F(4,5,-2)=8-5-6=-3$'tür. Bu hesapta ikinci girdinin katsayısı eksi bir, üçüncü girdinin katsayısı üçtür. Girdilerin yerleri belirleyici olduğundan $F(4,-2,5)=8+2+15=25$ olur. İlk sonuç -3 iken yer değiştirilmiş iki girdiyle 25 elde edilmesi doğaldır.

Üçlü tanım ile art arda uygulanmış iki girdili işlem aynı şey değildir. F(a,b,c) kuralı bir defada üç sayı alır. Buna karşılık (a ★ b) ★ c ifadesi, ★ tanımını iki defa uygular. Bir sembolün aritesini, yani kaç girdi kabul ettiğini doğru belirlemek, yanlış parantezleme ve keyfî hesap sırası oluşturmaktan korur.

Girdi sayısı ve işlem sırası ayrımı

Yazım	Girdi sayısı	Hesaplama kuralı	Örnek sonuç
T(6)	Tek	3·6−4	14
4 ★ 5	İki	2·4+3·5	23
F(4,5,−2)	Üç	2·4−5+3·(−2)	−3
(1 ★ 2) ★ 3	İki girdili kural iki kez	Önce 1 ★ 2=8, sonra 8 ★ 3	25

16. Sınırlı örnekten işlem kuralını bulmanın belirsizliği

Bazen bir özel işlem doğrudan tanımlanmaz; yalnız birkaç örneğin sonucu verilir. Örneğin 1 ✦ 2=5, 2 ✦ 3=8, 3 ✦ 4=11 gözlemlensin. Bunlarla uyumlu sade bir kural a ✦ b=a+2b olabilir; gerçekten 1+4=5, 2+6=8, 3+8=11'dir. Ancak a ✦ b=3a+2 biçimi de aynı üç örneği verir: 3·1+2=5, 3·2+2=8, 3·3+2=11. İki kural, 4 ✦ 5 için farklı sonuçlar üretir: ilki 14, ikincisi 14 verdiği için bu girdi çifti ayırt edici değildir; buna karşılık 4 ✦ 1 için ilk kural 6, ikinci kural 14 verir.

Buradaki incelik, verilen üç örnekte daima b=a+1 olmasından kaynaklanır. Bu koşul yüzünden iki farklı bağıntı aynı gözlemlerle uyumludur. Birkaç giriş-çıkış çifti, tanımın tek olduğunu kanıtlamaz. Kesin sonuç için kuralın açıkça bildirilmesi, daha çok farklı girdi örneği verilmesi veya aday kurallardan birini dışlayan ek koşullar bulunması gerekir. Bu ayrımı bilmek işlem mantığını örüntü tahmininden ayırır.

> **Kuralın tekliği hakkında** Az sayıda eşleşen örnek, bir işlem tanımının zorunlu olarak tek biçimde belirlendiğini göstermez. Birden fazla kural bütün verilen örneklerle uyumluysa yeni girdinin sonucu ek bilgi olmadan kesinleştirilemez.

17. Bütünleşik öğretici örnek: tanım, sıra, ters çözüm ve denetim

Bir işlem sisteminde a ★ b=2a+3b ve T(x)=3x−4 tanımlı olsun. Önce 2 ★ 5 değeri bulunur: 2·2+3·5=4+15=19. Bu sonuç tek girdili T'ye aktarılınca T(2 ★ 5)=T(19)=3·19−4=53 olur. Aynı kuralı cebirsel olarak doğrudan yazarsak T(a ★ b)=3(2a+3b)−4=6a+9b−4'tür. a=2, b=5 için 12+45−4=53 elde edilir; iç işlemle tek adımda hesap birbirini doğrular.

Bu sistemde T(2 ★ x)=53 olarak verilen bir işlem eşitliğinde önce dış dönüşüm açılır: 3(2·2+3x)−4=53. Parantez düzenlenince 12+9x−4=53, 9x+8=53, 9x=45 ve x=5 bulunur. Ters yönden bakıldığında 53'e dönüşebilecek T girdisi (53+4)/3=19'dur; 2 ★ x=19 eşitliği de 4+3x=19 ve x=5 verir. Böylece aynı bilinmeyen hem denklemle hem iki basamaklı geriye dönüşle denetlenmiştir.

Aynı özel işlemin ileri ve ters hesap kontrolü

Aşama	İleri yönde	Ters yönde	Uyum
İç işlem	2 ★ 5=19	2 ★ x=19, x=5	Sağlandı
Dış dönüşüm	T(19)=53	T(x)=53 için x=19	Sağlandı
Cebirsel birleşim	6·2+9·5−4=53	9x+8=53, x=5	Sağlandı

Bu örnek, özel işlem sembolünün her kullanımda aynı kurala bağlı kalması, iç ve dış adımların karıştırılmaması, bilinmeyen girdinin konumunun korunması ve sonucun ikinci yoldan kontrol edilmesi gerektiğini bir araya getirir. İşlem tanımlama sorularında matematiksel kesinlik, işaretleri alışılmış anlamıyla değil verilen anlamıyla okumaktan başlar. Sonraki konuda birden fazla koşulun birlikte kullanıldığı sayısal muhakeme ele alınacaktır.

KONU 4.4

KOŞULLU SAYISAL MUHAKEME

Sayısal muhakemede sonuca yalnız işlem yapmakla değil, verilen koşulların hangilerinin aynı anda sağlanması gerektiğini belirleyerek ulaşılır. Bir sayı belirli bir aralıkta bulunabilir, kalan koşulu taşıyabilir, iki miktarın toplamına bağlı olabilir veya yalnız bazı durumlarda uygulanan bir işlemden geçebilir. Bütün koşulların ayrı ayrı doğru olması yetmez; aranan sonuç bunları aynı anda sağlamalıdır. Bu yaklaşım, bir denklem çözmekten farklı olarak, olası değerleri belirleme, eleme, zorunlu çıkarım yapma ve verinin yeterliliğini denetleme becerilerini birlikte gerektirir.

Bu bölümde sayıların yerleştirilmesine ilişkin geniş düzenleme problemlerinden önce, koşul cümlelerinin mantıksal anlamı ve sayısal sonuçları ele alınacaktır. Sayılar ve örnek durumlar öğretici amaçla özgün olarak oluşturulmuştur; gerçek bir kurumun kayıt veya seçim verileri değildir.

1. Koşul, değişken ve çözüm evreni

Koşul, aranan sayının veya sayılar arasındaki ilişkinin uyması gereken kuraldır. Aynı cümle, değişkenin doğal sayı, tam sayı veya gerçek sayı seçilmesine göre farklı sonuçlar doğurabilir. Örneğin $4<x<9$ eşitsizliği gerçek sayılar için sonsuz sayıda değere izin verir. x'in tam sayı olduğu da belirtilirse x yalnız 5, 6, 7 veya 8 olabilir. x'in çift tam sayı olduğu eklenirse 6 ve 8 kalır. Koşulları değerlendirmeden önce çözüm evreninin ne olduğu açıkça bilinmelidir.

Bir adayın koşullardan yalnız birini sağlaması yeterli değildir. $x=8$ sayısı $4<x<9$ ve çift olma koşullarını yerine getirir; $x=10$ çift olsa da aralık dışında kalır. Aralık koşulunun son noktaları da dikkat gerektirir: $x<9$, 9'u dışarıda bırakırken $x\leq 9$, 9'u içeri alır. Ayrıca sıfırın doğal sayı olarak kabul edildiği bu kitapta, pozitif tam sayı istendiğinde sıfır aday olamaz.

Sayı kümesi ve sınır koşullarının çözüm üzerindeki etkisi

Verilen koşul	Çözüm evreni	Geçerli değerler
$4<x<9$	Tam sayılar	5, 6, 7, 8
$4<x<9$ ve x çift	Tam sayılar	6, 8
$4\leq x\leq 9$ ve x çift	Tam sayılar	4, 6, 8
$4<x<9$	Gerçek sayılar	Açık aralıkta sonsuz değer

2. Birlikte sağlanması gereken koşulların kesişimi

“Ve” sözcüğüyle bağlanan iki koşulun ikisi de geçerli olmalıdır. Örneğin n pozitif tam sayı, $10<n<25$, n tek ve n üçe tam bölünüyor olsun. Aralıktaki üç katları 12, 15, 18, 21 ve 24'tür. Bunların tek olanları 15 ve 21'dir. Önce tek sayılar listelenip ardından üçe bölünebilme koşulu uygulansa da sonuç aynı çıkar. Sıralamaya bağlı olmayan bu ortak adaylar kümesi, koşulların kesişimidir.

Gereksiz aday üretimini azaltmak için en çok eleme yapan koşuldan başlamak yararlıdır; ancak doğru sonuç için her koşulun sonunda denetlenmesi gerekir. Bu örnekte 15 ve 21 aralıkta kalır, tek sayıdır ve üçe bölünür. 18 sayısı aralık ve bölünebilme koşullarını sağlamasına rağmen tek olma koşulunda elenir.

$$\text{Çözüm kümesi} = \{x \in E : K_1(x) \text{ ve } K_2(x) \text{ ve } \ldots \text{ ve } K_m(x)\}$$

Anlamı: E çözüm evrenidir; geçerli x değerleri bütün m koşulu aynı anda sağlayan elemanlardan oluşur.

Koşullar: Koşulların her biri tanımlı olmalı; eşitsizlik sınırları ve sayı türü açıkça verilmelidir.

3. “Veya”, “ya da” ve dışlayıcı seçim arasındaki fark

Matematiksel kullanımda “A veya B” ifadesi, aksi açıkça belirtilmediği sürece A'nın, B'nin veya her ikisinin birden doğru olduğu durumları kapsar. “A ya da B'den yalnız biri” ifadesi ise ikisinin birlikte doğruluğunu dışlar. Bu fark, bir sayının iki ayrı özelliği taşıyabileceği durumlarda sonucu değiştirir.

1 ile 20 arasındaki pozitif tam sayılardan 4'e veya 5'e bölünebilenler düşünülsün. Dörde bölünenler 4, 8, 12, 16 ve 20; beşe bölünenler 5, 10, 15 ve 20'dir. Her iki grupta bulunan 20 bir kez sayılır. Böylece 4'e veya 5'e bölünebilen sekiz farklı sayı vardır. “Yalnız birine bölünebilsin” koşulu getirilirse 20 çıkar; geriye yedi sayı kalır. Her iki kümeyi toplarken ortak elemanı iki kez saymamak, verilen koşulun sayısal karşılığıdır.

“Veya” bağlacının aynı aralıkta iki farklı yorumu

İstenen durum	Geçerli sayılar	Sayı adedi
4'e veya 5'e bölünebilme	4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20	8
Yalnız 4'e bölünebilme	4, 8, 12, 16	4
Yalnız 5'e bölünebilme	5, 10, 15	3
Hem 4'e hem 5'e bölünebilme	20	1
Tam olarak birine bölünebilme	4, 5, 8, 10, 12, 15, 16	7

4. “İse” koşulunun yönü; gerek ve yeter koşul

“A doğruysa B doğrudur” biçimindeki bir koşul, A'nın gerçekleşmesinin B'yi zorunlu kıldığını belirtir. Buna karşılık B'nin gerçekleşmesi, A'nın da gerçekleştiğini tek başına göstermez. Örneğin “Bir tam sayı 12'ye tam bölünüyorsa 3'e tam bölünür” önermesi doğrudur; 18 sayısı 3'e tam bölündüğü hâlde 12'ye bölünmez. Bu yüzden “3'e bölünüyor, öyleyse 12'ye bölünür” çıkarımı geçersizdir.

Burada 12'ye bölünebilme, 3'e bölünebilme için yeter koşuldur; 3'e bölünebilme ise 12'ye bölünebilme için gerek koşuldur. “Ancak ve ancak” ile kurulan çift yönlü ilişkide her iki yön de sağlanır. Örneğin bir tam sayının çift olması, 2'ye kalansız bölünmesi için hem gerekli hem de yeterlidir. Koşulun yalnız bir yönünün verilmesiyle çift yönlü sonuç üretilmemelidir.

Koşulun tersini otomatik çıkarma hatası $A \Rightarrow B$ geçerli olsa bile $B \Rightarrow A$ ayrıca kanıtlanmadıkça kabul edilmez. “Yalnızca A ise B” ve “B ancak A ise” ifadelerinde gerek-yeter yönü sözcük sırasından dikkatle çıkarılmalıdır.

5. Karşıt ters çıkarım ve çelişkiyi kullanma

A ⇒ B biçimindeki geçerli bir önermeden, B doğru değilse A'nın da doğru olamayacağı sonucu çıkar. Bir önceki bölünebilme ilişkisiyle, 3'e tam bölünmeyen bir tam sayının 12'ye de tam bölünmeyeceği zorunludur. Bu, koşulun yönünü ters çevirmek değil, öncülün mümkün olmasını engelleyen durumu saptamaktır. Buna karşılık "12'ye bölünmüyor" bilgisi sayının 3'e bölünmediğini göstermez; 18 karşı örneği bunu çürütür.

Çelişki kontrolü çoklu koşullarda da kullanılır. Hem "n çift tam sayıdır" hem "n tek tam sayıdır" deniliyorsa bu koşullar altında geçerli n yoktur. Başka bir şartı gevşeterek sayı üretmek, problemde verilenleri değiştirmek olur. Bir koşulun diğerini zorunlu olarak dışladığı fark edildiğinde önce bu tutarsızlık saptanmalıdır.

Aynı bölünebilme ilişkisinden yapılan çıkarımlar

Verilen bilgi	Çıkarım	Durum
12'ye bölünüyor	3'e bölünür	Zorunlu
3'e bölünmüyor	12'ye bölünmez	Zorunlu
3'e bölünüyor	12'ye bölünür	Zorunlu değil; 18 karşı örnektir
12'ye bölünmüyor	3'e bölünmez	Zorunlu değil; 18 karşı örnektir

6. Kalan koşullarının birlikte yorumlanması

Bir sayının bölündüğünde bıraktığı kalan, adayları önemli ölçüde sınırlar. 100 ile 130 arasındaki, sınırlar dâhil, tam sayılardan 5'e bölümünden 2 kalanını verenler 102, 107, 112, 117, 122 ve 127'dir. Bunların çift olanları 102, 112 ve 122'dir. Son olarak 3'e bölümünden 1 kalanı veren sayı arandığında 102'nin kalanı 0, 112'nin kalanı 1, 122'nin kalanı 2 olur. Tek geçerli sonuç 112'dir.

Bu sonucu yeniden kontrol etmek için $112=5\cdot22+2$ ve $112=3\cdot37+1$ yazılır; ayrıca 112 çift ve $100\le112\le130$ koşulları doğrudur. Böylece yalnız son koşul değil, başlangıçtaki bütün şartlar denetlenmiştir. Kalanın negatif veya bölen kadar büyük yazılmadığı standart tam sayı bölmesinde, 5'e bölümden kalan 0, 1, 2, 3 ya da 4 olabilir.

$$n = d\cdot q + r,\ 0\le r<d$$

Anlamı: n tam sayısının pozitif d tam sayısına bölümünde q bölüm, r kalandır.

Koşullar: $d>0$ ve n, q, r tam sayıdır. Aynı sayıya ilişkin her farklı bölünebilme koşulu ayrı denetlenir.

100–130 aralığındaki adayların adım adım daraltılması

Koşul	Kalan adaylar
5'e bölümünden 2 kalan	102, 107, 112, 117, 122, 127
Ayrıca çift	102, 112, 122
Ayrıca 3'e bölümünden 1 kalan	112

7. Eşitsizlik, tam sayı koşulu ve sınırların birlikte çalışması

Bir eşitsizlik sayılar için aralık verir; ancak tam sayı koşulu bu aralıktaki yalnız ayrık değerleri bırakır. Bir hizmet için birim başına iki dosya ayrıldığını ve elde en çok 27 dosya bulunduğunu varsayalım. Katılımcı sayısı n negatif olmayan tam sayıysa $2n \le 27$ ve $n \le 13{,}5$ elde edilir. Gerçekçi üst sınır 13 kişidir; 14 kişi 28 dosya gerektirerek koşulu ihlal eder. Burada 13,5 hesap ara sonucudur; katılımcı adedi değildir.

"En az 8 kişi katılsın" koşulu da bulunursa n=8, 9, 10, 11, 12 veya 13 olabilir. "En çok 13" ifadesi 13'e izin verir; "13'ten az" denilseydi üst sınır 12 olurdu. Koşulları hesaplarken birimlerin tutarlı olması ve niceliğin bölünebilir olup olmaması belirleyicidir.

$$8 \le n \le \lfloor 27/2 \rfloor = 13$$

Anlamı: Katılımcı başına iki dosya ve toplam 27 dosya üst sınırı altında, en az sekiz katılımcı kabul edilen bütün tam sayı değerleri.

Koşullar: n negatif olmayan tam sayıdır; kişi başına dosya ihtiyacı tam iki adettir ve dosyalar kişilere bölünerek dağıtılamaz.

8. Negatif katsayı ve sınır dönüşümünde yön denetimi

Koşullu çözümde bir eşitsizliği düzenlerken negatif bir sayıyla çarpma veya bölme eşitsizliğin yönünü değiştirir. Örneğin $14-2x \ge 4$ koşulundan $-2x \ge -10$, dolayısıyla $x \le 5$ elde edilir. x tam sayı ve $x > 2$ ise 3, 4 ve 5 değerleri mümkündür. Doğrudan kontrol, x=5 için $14-10=4$ sınır eşitliği; x=6 için $14-12=2<4$ ihlali verdiğinden yönün doğru olduğunu doğrular.

Bu kural, negatif sayının karşı tarafa geçirilmesinden kaynaklanan özel bir ezber değildir; her iki taraf −2 ile bölündüğünde sayı doğrusu sırasının tersine dönmesidir. Özellikle koşullardan birinin işareti diğerlerinden farklıysa tüm adaylar son eşitsizlikte yerine konulmalıdır.

9. Koşula bağlı parçalara ayrılmış kural

Bazı sayısal süreçler tek bir formülle değil, girdinin bulunduğu aralığa göre değişen bir kuralla tanımlanır. Örneğin T(x), $x<0$ ise $x-3$; $0 \le x<10$ ise $2x+1$; $x \ge 10$ ise $x+5$ olarak tanımlansın. $T(-2)=-5$, $T(0)=1$, $T(9)=19$ ve $T(10)=15$'tir. Her değerde önce uygun aralık seçilir, yalnız o aralığın işlemi uygulanır. x=10 için orta aralığın $2x+1$ işlemini kullanmak yanlış olur; orta aralık 10'u dışarıda bırakır.

Bir sayının sonucu 15 olarak verilirse farklı dallar değerlendirilir. $x<0$ dalında $x-3=15$ eşitliği x=18 verir, fakat 18 negatif değildir; bu dal geçersizdir. $0 \le x<10$ dalında $2x+1=15$ eşitliğinden x=7 bulunur ve bu aralık uygundur. $x \ge 10$ dalında $x+5=15$ eşitliğinden x=10 bulunur, bu da uygundur. Dolayısıyla $T(x)=15$ için iki ayrı geçerli giriş vardır: 7 ve 10. Bir kuralın birden çok aralığa göre işlemesi, sonucu verilen her denklemde tek bir giriş bulunacağı anlamına gelmez.

Parçalı kuralda sınır ve ters çözüm kontrolü

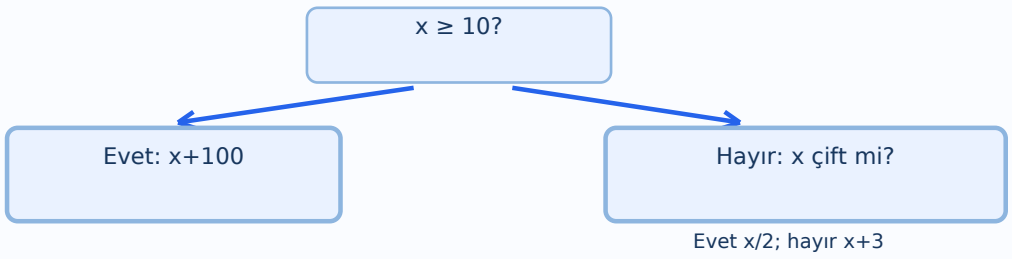
Girdi veya hedef	Uygun dal	İşlem	Sonuç
x=−2	x<0	−2−3	−5
x=0	0≤x<10	2·0+1	1
x=9	0≤x<10	2·9+1	19
x=10	x≥10	10+5	15
T(x)=15	Orta dal	2x+1=15, x=7	Geçerli
T(x)=15	Son dal	x+5=15, x=10	Geçerli

10. Koşul sırası, çakışan dallar ve öncelik

Kurallar “ilk uygun koşulu uygula” biçiminde verilmişse aynı girdi birden çok duruma uyduğunda üstteki koşul önceliklidir. Önce x≥10 ise 100 ekle, bu koşul sağlanmıyorsa x çiftse 2'ye böl, diğer durumlarda 3 ekle düzenini düşünelim. x=12 için sayı hem 10'dan büyük/eşit hem de çifttir; ama ilk dal seçilerek 112 bulunur. x=8 için ilk koşul doğru değildir, ikinci koşul doğrudur ve sonuç 4 olur. x=7 için ilk iki koşul yanlış olduğundan 7+3=10'dur.

Bu yapıdan farklı olarak “sağlanan bütün koşulların işlemlerini sırayla uygula” denilirse 12 önce 112 olur, ardından başka bir çiftlik denetimi yürütülebilir. Bu iki tanım birbirinin yerine kullanılamaz. Koşul türü, işlem sırası ve yeniden değerlendirme yapılıp yapılmadığı açıkça tanımlanmalıdır. Belirsizlik varsa tek sonuç varsaymak yerine farklı yorumlar belirtilmelidir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

11. “En az bir”, “tam olarak bir” ve “en az iki” koşulu

Koşullu muhakemede kaç koşulun doğru olması gerektiği de ayrı bir kuraldır. A, B ve C adlı üç denetimin her biri başarılıysa 1, değilse 0 ile gösterilsin. Üçünün toplamı en az iki ise kabul koşulu A+B+C≥2 olur. A'nın başarılı olduğu ayrıca biliniyorsa (A,B,C) üçlüleri (1,1,0), (1,0,1) ve (1,1,1) olabilir. “Tam olarak iki başarılı denetim” şartında son üçlü elenir ve ilk iki durum kalır.

“En az iki başarılı” ifadesini “yalnız iki başarılı” gibi okumak üç başarılı denetimin kabulünü haksız yere engeller. Benzer biçimde “en az bir” koşulunda tek, iki veya üç başarı mümkündür. Her denetimin yalnız 0 veya 1 alabileceği sınırı açıkça verilmedikçe bu toplamlar başka değerler de üretebilir.

Üç ikili denetimde koşula uygun örnek durumlar

A	B	C	Toplam	En az iki	Tam olarak iki
1	0	0	1	Hayır	Hayır
1	1	0	2	Evet	Evet
1	0	1	2	Evet	Evet
1	1	1	3	Evet	Hayır

12. İki bilinmeyenin toplamında koşulların kesişmesi

İki sayı arasındaki toplam ilişkisi ve her sayı hakkında verilen özellikler birlikte kullanılabilir. x ve y pozitif tam sayılar, x+y=19, x<y, x dörde tam bölünüyor ve y tek olsun. x'in y'den küçük olması nedeniyle 2x<19 ve x≤9'dur. Bu sınırdaki pozitif dört katları x=4 veya x=8'dir. Buna karşılık y sırasıyla 15 veya 11 olur. İki çift değer de tek y şartını, toplamı ve sıralamayı sağlar. Bu aşamada çözüm iki farklı sayı çiftinden oluşur; tek bir çift seçilemez.

Son koşul olarak y<13 getirildiğinde (4,15) elenir, (8,11) kalır. Son kontrol: 8+11=19, 8<11, 8 dörtle tam bölünür ve 11 tek ve 13'ten küçüktür. Aynı kısıtların çözüm sayısını nasıl değiştirdiği, verinin yeterliliğinin yalnız sayı miktarına değil kısıtların eleme gücüne bağlı olduğunu gösterir.

$$x+y=19,\ 0<x<y,\ 4|x,\ y \text{ tek},\ y<13 \Rightarrow (x,y)=(8,11)$$

Anlamı: "4|x" gösterimi x'in 4'e tam bölündüğünü anlatır; koşullar aynı anda sağlandığında tek sayı çifti kalır.

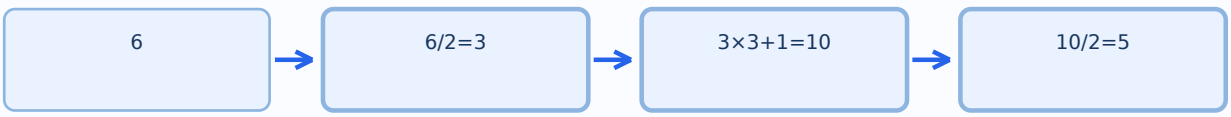
Koşullar: x ve y pozitif tam sayıdır; 19 toplamı ve bütün diğer koşullar birlikte geçerlidir.

13. Ardışık kararlar ve durumun her adımda güncellenmesi

Koşula dayalı çok adımlı süreçte her adım, bir önceki adımın sonucunu girdi olarak kullanır. Örneğin pozitif tam sayı x çiftse yeni değer x/2, tekse 3x+1 olsun. Başlangıç 6 için ilk değer 3'tür; 3 tek olduğundan ikinci değer 10; 10 çift olduğundan üçüncü değer 5 olur. Bu, yalnız verilen üç geçişin hesabıdır; bu kuralın bütün başlangıçlar için sonsuza kadar nasıl davranacağına ilişkin genel bir iddia değildir.

Başlangıçtaki 6'nın çift olması, bütün sonraki adımlarda da çiftlik dalının kullanılacağı anlamına gelmez. Yeni sayının yeniden denetlenmesi gerekir. Aynı şekilde bir önceki bölümdeki özel işlem anlatımından farklı olarak burada hangi işlemin yapılacağı girişin özelliğine bağlıdır; yalnız tek bir sembolün sabit cebirsel açılımı söz konusu değildir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

Her aşamada yeniden denetlenen çift-tek dönüşümü

Aşama	Girdi	Geçerli koşul	Yeni değer
1	6	Çift	3
2	3	Tek	10
3	10	Çift	5

14. Zorunlu sonuç, mümkün sonuç ve imkânsız sonuç

Bir sonucun kesin olması, verilen koşulları sağlayan bütün durumlarda ortaya çıkmasını gerektirir. Örneğin n pozitif tam sayı ve n=4k+2 biçiminde, k negatif olmayan tam sayı olsun. n her durumda çifttir; ayrıca 4'e tam bölünemez, çünkü 4'e bölümünden kalan 2'dir. Bununla birlikte n'nin 3'e bölünebilirliği zorunlu değildir: k=1 için n=6 bölünür; k=2 için n=10 bölünmez. Dolayısıyla “3'e bölünebilir” yalnız mümkün bir durumdur.

Bir sonucun imkânsızlığını göstermek için bütün adayları listelemek gerekmez. n=4k+2 koşulunu sağlayan bir sayının 4'e bölümünden kalanın sıfır olamayacağı, eşitliğin kendisinden anlaşılır. Buna karşılık mümkünün zorunluya dönüşmesi için ilave koşul gerekir. “Kesin”, “olabilir” ve “olamaz” ifadeleri birbirinin yerine kullanılmamalıdır.

> **Kesinlik düzeyleri** Kesin çıkarım her geçerli adayda doğrudur. Mümkün çıkarım en az bir geçerli adayda doğrudur. İmkânsız çıkarım hiçbir geçerli adayda doğru değildir. Tek bir uygun örnek, kesinlik kanıtı değildir; tek bir karşı örnek ise kesinlik iddiasını çürütür.

15. Eksik bilgi, fazla bilgi ve boş çözüm kümesi

Bir sayının 20 ile 40 arasında bulunduğu ve 4'e bölündüğü biliniyorsa, sınırlar dâhil düşünüldüğünde 20, 24, 28, 32, 36, 40 adayları vardır. “Sayı 4'e bölünür” koşulunu ikinci kez söylemek herhangi bir adayı elemez; bilgi sayısı artmış olsa da çözüm değişmez. “Sayı 5'e de bölünür” koşulu ise 20 ve 40'ı bırakır. Tek bir sonuç isteniyorsa bu iki koşul yine yetersizdir.

Öte yandan “sayı hem 4'e bölünüyor hem 4'e bölümünden 1 kalanını veriyor” koşulları birlikte doğru olamaz. Koşulların tutarsızlığını görmeden aralık içinden rastgele bir sayı seçmek doğru değildir. Verilerin çelişmesi ile verilerin tek sonuca yetmemesi farklı durumlardır: İlkinde çözüm kümesi boştur, ikincisinde birden çok çözüm olabilir. Bir koşulun gereksiz, yani diğerlerinden zaten çıkan bilgi olması da ayrıca mümkündür.

16. Sistematik eleme tablosu ve kural kontrol çizelgesi

Birden çok koşul adayların bir bölümünü elediğinde, her adımın etkisi küçük bir tabloyla gösterilebilir. Örneğin t tam sayısı için 15≤t≤35, t çift, t'nin 3'e bölümünden kalan 2 ve t<30 koşulları verilsin. Çift adaylar 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32 ve 34'tür. Bunların 3'e bölümünden 2 kalanını verenleri 20, 26 ve 32'dir. Son koşul t<30, 32'yi çıkarır; 20 ve 26 kalır. Bu iki sayının ikisi de tüm şartları sağladığından veri tek bir t belirlemez.

Eğer ayrıca t'nin 4'e tam bölündüğü söylenirse 20 kalır; 26 dörtle bölünmez. Ters kontrolde 20, 15–35 aralığındadır, çifttir, 20=3·6+2, 20<30 ve 4'e bölünür. Böylece bir ilave koşulun etkisi yeniden denetlenebilir; ancak ilave koşul olmadan 20'yi tek değer olarak sunmak doğru olmaz.

Birden fazla koşuldan geçen adayların sistematik listesi

Uygulanan koşul	Kalan adaylar	Kalan adet
15≤t≤35 ve t çift	16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34	10
Ayrıca 3'e bölümünden kalan 2	20, 26, 32	3
Ayrıca t<30	20, 26	2
Ayrıca t, 4'e tam bölünür	20	1

17. Koşula bağlı kararların günlük bağlamda yorumlanması

Şartların birleşimi her zaman yalnız sayı bulmak için kullanılmaz; uygun seçeneği belirlemek için de kullanılabilir. Örneğin bir eğitim oturumuna katılmak için kayıt zamanı en geç saat 09.30 olmalı, katılımcı gerekli belgeyi sunmalı ve oturumdaki boş kontenjan sayısı sıfırdan büyük olmalıdır. Saat 09.25'te kayıt yaptıran, belgesi tam olan bir kişi, boş kontenjan yoksa koşulların tamamını sağlayamaz. Saat 09.35'te gelen kişi ise kontenjan bulunsa da zaman koşulunu sağlamaz.

Bu tür koşullar sayısal ve sayısal olmayan verileri birlikte kullanır. Zaman için ≤, boş kontenjan için >0 yazılabilir; belge durumu doğru/yanlış olarak işlenir. Yalnız 09.30 zaman koşulundan kişi kabulünü kesin çıkarmak diğer şartları yok sayar. Buradaki kontenjan ve saat değerleri temsili olup herhangi bir kurumun gerçek uygulama koşullarını yansıtmaz.

18. Çok koşullu bütünleşik model ve bağımsız sonuç denetimi

Bir çalışmanın dağıtım için hazırlanmış paket sayısı n pozitif tam sayı olsun. Depolama koşulu gereği 20≤n≤40, her paketin ayrılabildiği üçlü gruplar nedeniyle n üçe tam bölünebilir, ayrı bir denetim gereği n'nin 4'e bölümünden kalan 2 ve iki kişilik dağıtım nedeniyle n çift olsun. Önce 20–40 aralığındaki üç katları 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39 olarak listelenir. Çift olanları 24, 30 ve 36'dır. Bu sayılar arasında 4'e bölümünden 2 kalanını veren yalnız 30'dur; 24 ve 36 dörde tam bölünür.

Sonuç n=30'dur. Farklı yoldan doğrulamak için 4'e bölümünden 2 kalanını veren çift sayılar 22, 26, 30, 34 ve 38 olarak yazılabilir. Bunlardan üçe tam bölünen yalnız 30'dur. Doğrudan denetimde 30 aralıktadır, 30=3·10, 30=4·7+2 ve 30 çift sayıdır. İki farklı eleme sırası aynı sonuca ulaşır.

Şimdi yalnız bu adayın geçerli olduğu bir koşullu işlem ekleyelim: Paket sayısı en az 30 ise 6 paket yedek ayrılır; 30'dan az ise 3 paket yedek ayrılır. n=30 sınır koşulunu sağladığı için yedek miktarı 6 ve dağıtılabilir paket sayısı 30−6=24'tür. Dağıtılabilir paketlerin tamamı kişi başına ikişer verildiğinde 24/2=12 kişiye eşit dağıtım yapılabilir. Geriye paket kalmaz. Yedek miktarını 3 almak 30'un “en az 30” koşuluna dâhil olduğunu göz ardı etmek olur.

Bütünleşik paket örneğinde bağımsız koşul ve sonuç denetimi

Aşama	Sayısal ilişki	Uygun sonuç
İlk aralık	20≤n≤40	21, 24, 27, 30, 33, 36, 39 üç katları
Çiftlik	2'ye kalansız bölünme	24, 30, 36
Dörde bölümde kalan 2	n=4q+2	30
Yedek koşulu	n≥30 olduğundan 6 yedek	6
Dağıtılabilir paket	30−6	24
İkişer paketle kişi	24/2	12

$$n=30;\ yedek(n)=6\ (n\geq 30);\ dağıtılabilir(n)=n-yedek(n)=24;\ kişi=24/2=12$$

Anlamı: Bütün koşulları sağlayan paket sayısından doğru koşullu dal seçilerek kişi kapasitesine geçiş.

Koşullar: n pozitif tam sayı; 20≤n≤40, n üçe tam bölünür, n çift, n'nin 4'e bölümünden kalan 2'dir. Paketler bütün ve kişi başına ikişer verilir; bütün dağıtılabilir paketler kullanılır.

Bu bölümdeki ortak yöntem, verileri uygun sayı kümelerine ve koşul cümlelerine dönüştürmek, tüm koşulların kesişimini bulmak, birbirini dışlayan durumları erkenden ayırmak ve sonuç üzerinde her koşulu geriye doğru yeniden denetlemektir. Koşullu sayısal muhakeme, yalnız bir sayı üretebilmek değil, o sayının neden zorunlu veya yalnızca mümkün olduğunu açıklamaktır. Sonraki konuda sayısal sıralama ve yerleştirme ilişkileri ayrıca incelenecektir.

KONU 4.5

Sayısal Sıralama ve Yerleştirme

Sayıların büyüklük bakımından sıralanması ile sayıların belirli konumlara kurallara göre yerleştirilmesi yakın görünür; ancak farklı muhakeme gerektirir. Birinci durumda nicelikler karşılaştırılarak bir büyüklük düzeni oluşturulur. İkinci durumda ise bir sıra, masa, raf, çizelge veya numaralı hücrede hangi sayının nereye gelebileceği araştırılır. Bir sayının büyüklük sırası ile yerleştirildiği konumun sıra numarası aynı olmak zorunda değildir. Örneğin büyüklükçe en büyük etiket beşinci kutuya konabilir. Bu ayrımı baştan kurmak, kısıtlardan yanlış sonuç çıkarılmasını önler.

Sıralama ve yerleştirme problemlerinde sonuç, yalnızca kurallarla uyumlu bir örnek düzen bulmaktan ibaret değildir. Düzenin tüm şartları sağlaması, başka düzenler varsa bunların ayırt edilmesi ve istenen bilginin bütün geçerli düzenlerde aynı olup olmadığının açıklanması gerekir. Burada ağırlık, genel permütasyon kuramını ayrıntılandırmakta değil, sınırlı sayıda sayısal öğeyi kurallar altında sistematik biçimde düzenlemektedir.

1. Nesne, değer, sıra ve konumun ayrı tanımlanması

Beş farklı numaralı dosya, soldan sağa beş raf gözüne yerleştirilsin. Dosyaların üzerinde yazılı sayılar 12, 18, 25, 31 ve 44 olsun. Raf gözleri 1, 2, 3, 4 ve 5 numaralarıyla gösterilsin. Raf gözü numarası bir konumdur; dosya üzerindeki sayı ise dosyanın değeridir. Üçüncü göze 12 yazılı dosya konduğunda üçüncü sıradaki değer 12 olur; fakat 12, dosya numaraları içinde yine en küçük değerdir. Konumla büyüklük sırası karıştırılırsa aynı veriden iki farklı anlam üretilmiş olur.

Düzenin yönü de bir koşuldur. Soldan sağa numaralanmış raflarda birinci konum soldaki, beşinci konum sağdaki gözdür. Sağdan sola sıralama kullanılıyorsa aynı gösterim tersine döner. Her öğenin tam bir konumda bulunacağı ve her konumun yalnız bir öğe alacağı varsayımı, yerleştirmeyi bire bir eşleştirme hâline getirir. Bir hücreye birden çok sayı konmasına izin veriliyorsa farklı bir model gerekir.

Sıralama ve yerleştirmede temel değişkenler

Kavram	Anlam	Örnek
Değer	Nesnenin üzerinde bulunan sayı	31
Konum	Raf veya hücrenin sıra numarası	Soldan 4. göz
Büyüklük sırası	Değerlerin küçükten büyüğe yerleştiği sıra	31, beş değerin 4. küçüğüdür
Yerleşim sırası	Nesnelerin belirlenen yön boyunca dizilişi	31 yazılı dosya ilk göze de gelebilir
Bire bir yerleştirme	Her nesne ve konum yalnız bir kez kullanılır	Beş ayrı dosya, beş ayrı göz

2. Büyüklük sırası ve kesin karşılaştırma

Farklı değerlerde x, y ve z sayıları için $x<y$ ve $y<z$ ise $x<z$ sonucu zorunludur. Sayıları sıralayan bu geçişlilik, yalnız iki komşu öğe arasındaki ilişkiyi değil, bütün zinciri sınırlar. Örneğin $a=17$, $b=24$, $c=32$, $d=45$ değerleri için $a<b<c<d$ olduğundan a en küçük, d en büyük değerdir. Buradaki büyüklük sırası, dört sayının bir çizelgedeki yerleşiminden bağımsızdır.

Eşitlik ihtimali dışlanmamışsa $x\le y$ ifadesi iki sayının farklı olduğunu garanti etmez. $x\le y\le z$ koşuluyla $x=5$, $y=5$ ve $z=9$ mümkündür; aynı koşulla 4, 7, 7 de mümkündür. Oysa $x<y<z$ yazıldığında üç değer zorunlu olarak farklıdır. Sıralamadan kaç farklı değer bulunduğu veya hangi öğenin kesin ortanca olduğu çıkarılırken bu işaretlerin anlamı belirleyicidir.

> **Büyüklük sırası ile yerleşim sırası** Sayının değerce büyük olması sağa, üste veya son sıraya yerleştirileceği anlamına gelmez. Böyle bir bağ ancak soruda açıkça belirtilmişse kullanılır. Eşitlik mümkünse, “en büyük” ile “tek başına en büyük” yargıları da ayrıdır.

3. Konum değişkeni ve karşılaştırma cümlelerinin çevrilmesi

A, B ve C adlı üç etiketin soldan sağa yerleştirildiği bir düzende $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ etiketlerin konum numaralarını göstersin. “A, B'nin solundadır” ifadesi $p(A)<p(B)$ olarak yazılır. Bu cümle iki etiketin bitişik olduğunu söylemez. “A, B'nin hemen solundadır” ifadesi ise $p(B)=p(A)+1$ eşitliğidir. İkinci koşul birinciyi içerir; fakat birincisi tek başına ikincisini gerektirmez.

“Aralarında iki konum vardır” ifadesi de dikkat ister. A ve B'nin arasında tam iki başka yer varsa konum numaralarının farkının mutlak değeri üçtür. “Aralarında iki birim uzaklık vardır” denildiğinde ise çoğu sayısal düzende fark iki olabilir. Soruda konum adediyle mesafe birimi birbirinden ayrılmalıdır. Soldaki ilk yer birinci konum olarak sayılıyorsa $p(B)-p(A)$ farkı, A ve B arasındaki birim aralık sayısını verir; aradaki boş konum sayısı ise bu farkın bir eksiğidir.

$p(A)<p(B)$; hemen solunda: $p(B)=p(A)+1$; aralarında k başka konum: $|p(B)-p(A)|=k+1$

Anlamı: Soldan sağa 1,2,...,n biçiminde numaralanmış eş aralıklı konumlarda sıralama ve komşuluk ilişkileri.

Koşullar: Her nesne ayrı bir tam sayı konumundadır; k sıfır veya daha büyük tam sayıdır; "aralarında k başka konum" ifadesi yer sayısını, fiziksel uzunluğu değil konum adedini bildirir.

4. Tam sıra ile kısmi sıra arasındaki fark

Dört kartın konumlarını temsil eden A, B, C, D için A'nın B'den, B'nin C'den önce olduğu bilinsin. Buradan A, B ve C'nin kendi aralarındaki sırası A–B–C biçiminde kesinleşir. D'nin bu zincirdeki yeri ise belirtilmemiştir. Dolayısıyla D başa, A ile B arasına, B ile C arasına ya da sona girebilir. Şartları sağlayan dizilişler DABC, ADBC, ABDC ve ABCD olarak dört tanedir. "A, B'den önce" ifadesinden A'nın mutlaka birinci sırada olduğu çıkmaz.

Bu örnekte A–B–C zinciri korunurken D dört farklı aralığa yerleşebilir. D'nin B'den sonra olduğu eklenirse DABC ve ADBC elenir; ABDC ve ABCD kalır. D'nin C'den önce bulunduğu da söylenirse yalnız ABDC kalır. Böylece her yeni kısıtın aday kümesini nasıl daralttığı izlenebilir. Özellikle eksik bilgi varken tek bir uygun düzen bulup onu zorunlu sonuç saymak hatalıdır.

A<B<C koşulu altında D'nin olası konumları

Diziliş	A–B–C sırası korunuyor mu?	D, B'den sonra mı?	D, C'den önce mi?
D–A–B–C	Evet	Hayır	Evet
A–D–B–C	Evet	Hayır	Evet
A–B–D–C	Evet	Evet	Evet
A–B–C–D	Evet	Evet	Hayır

5. Sayısal aralıklarla yer kısıtlarının birlikte kullanılması

Rafın altı gözü 1'den 6'ya kadar numaralansın. X etiketi yalnız çift numaralı gözlere konabiliyor, Y etiketi yalnız 4'ün solunda bulunabiliyor ve X, Y'nin sağında olmalıdır. İlk koşul $p(X)\in\{2,4,6\}$; ikinci koşul $p(Y)\in\{1,2,3\}$; üçüncü koşul $p(Y)<p(X)$ biçimindedir. Her nesne ayrı göze konacaksa bu üç koşul birlikte denetlenir.

X=2 iken Y yalnız 1 olabilir. X=4 iken Y 1, 2 veya 3 olabilir. X=6 iken Y yine 1, 2 veya 3 olabilir. Böylece yedi uygun (Y,X) ikilisi vardır: (1,2), (1,4), (2,4), (3,4), (1,6), (2,6), (3,6). "X sağdadır" koşulu tek başına X'in son konumda olduğunu bildirmez. Hem konum kümeleri hem iki öğe arasındaki yön ilişkisi birlikte belirleyicidir.

X'in ve Y'nin konumlarına göre uygun ikililer

X konumu	Y için izin verilen konumlar	Uygun ikili sayısı
2	1	1
4	1, 2, 3	3
6	1, 2, 3	3
Toplam	Y<X ve Y<4 koşulu	7

6. Komşuluk, blok oluşturma ve boş yerlerin sınırı

Yan yana bulunması zorunlu iki farklı öğe, yerleştirme mantığında tek bir blok olarak düşünülebilir. Ancak blok kendi içinde iki farklı sırada bulunabilir: AB veya BA. Beş konuma yerleştirilecek A, B, C, D ve E birbirinden farklı olsun; A ve B yan yana durmalıdır. AB ikilisi önce tek blok sayıldığında dört birim (AB bloğu, C, D, E) yerleştirilir. Dört birimin 4·3·2·1=24 düzeni vardır. Blok içindeki AB ya da BA sırası da iki seçenek verdiğinden toplam 48 düzen oluşur. Burada sayı, izin verilen bütün dizilişlerin adedidir; belirli bir dizilişin sonucu değildir.

A ve B'nin hem bitişik hem de A solda olması istenirse blok içindeki sıra yalnız AB olur, sayı 24'e düşer. A ile B arasında tam bir öğe bulunması istenirse iki öğe arasındaki konum farkı iki olmalıdır; bu durumda bitişik blok yaklaşımı doğrudan uygulanamaz. Ayrıca iki ayrı blok içindeki öğeler farklı koşullara bağlıysa, her blok için bağımsız sayım yapmak aynı öğenin iki kez kullanılmasına yol açabilir. Bu nedenle blok yönteminin geçerlilik koşulları denetlenmelidir.

$$N_{bitişik} = 2\cdot(n-1)!;\ N_{bitişik_ve_A_solda} = (n-1)!$$

Anlamı: n farklı öğeden seçilmiş A ile B'nin n doğrusal konum içinde bitişik bulunduğu düzen sayısı; ikinci gösterim A'nın hemen B'nin solunda olmasını da gerektirir.

Koşullar: n≥2 tam sayıdır; bütün öğeler farklıdır, her konumda bir öğe vardır, sıra dairesel değil doğrusaldır, başka yerleştirme kısıtı yoktur; ! faktöriyeldir.

7. Bitişik olmama koşulunun tamamlayıcı sayımla bulunması

Beş farklı öğe A, B, C, D ve E bir sıraya yerleştirildiğinde toplam 5!=120 farklı diziliş vardır. A ve B'nin bitişik olduğu 48 diziliş yukarıda bulunduğuna göre bitişik olmadığı dizilişler 120−48=72 tanedir. Aynı sayıya doğrudan da ulaşılabilir: A ve B için 1'den 5'e kadar konumlar seçildiğinde sıralı ve farklı konum çifti 5·4=20'dir. A ve B'nin bitişik olduğu sıralı çiftler 2·4=8, bitişik olmadığı sıralı çiftler 12'dir. C, D, E kalan üç göze 3!=6 biçimde yerleşir. Böylece 12·6=72 bulunur.

İki bağımsız sayma yöntemi aynı sonucu verdiğinde yalnız aritmetik değil, kullanılan yerleştirme modeli de denetlenmiş olur. A ile B'nin konumları sıralı seçildiği için (1,3) ile (3,1) ayrı yerleştirmelerdir. İki öğe özdeş kabul edilseydi bu ayrım geçerli olmayacaktı. Böyle modellerde seçme sayısıyla sıralama sayısı birbirine karıştırılmamalıdır.

$$N_{bitişik_değil} = n! - 2\cdot(n-1)!$$

Anlamı: n farklı öğenin bir doğrusal sırada A ve B bitişik değilken oluşturabildiği düzen sayısı.

Koşullar: n≥2, bütün konumlar birer öğe ile dolu, A ve B farklı; diğer hiçbir koşul yok. n=2 için sonuç sıfırdır.

8. Uç konum, orta konum ve yönün sabitlenmesi

Altı farklı numaranın altı göze yerleştirildiği bir düzende “12 numarası uçta bulunur” dendiğinde iki uçtan biri mümkündür: birinci veya altıncı göz. “12 numarası soldaki uçtadır” denildiğinde ise yalnız ilk göz kalır. Bir öğenin uçta bulunması, onun büyüklükçe en küçük veya en büyük değer olmasını gerektirmez. Uç kuralı konuma, büyüklük kuralı değere ilişkindir.

Tek sayıda konum olduğunda ortadaki tek yer bulunur: Beş gözü olan sıranın ortası üçüncü gözdür. Altı gözü olan sırada üçüncü ve dördüncü gözler orta ikilidir; ek koşul olmadan “tam orta göz” tek bir yere karşılık gelmez. Bazı yerleştirme anlatımlarında “iki orta yerden biri” kullanılır. Konum tekliği isteniyorsa sıranın uzunluğu ve ortanın hangi anlamda kullanıldığı açıklanmalıdır.

$$\text{Tek sayıda } n=2k+1 \text{ konum için orta sıra } k+1\text{; çift sayıda } n=2k \text{ konum için orta ikili } k \text{ ve } k+1$$

Anlamı: Doğrusal ve eşit aralıklı sıranın orta konumları.

Koşullar: n pozitif tam sayıdır; konumlar 1'den n'ye numaralanır; bu formül sıralamanın konumsal ortasını verir, sayısal değerlerin ortanca değeriyle özdeş değildir.

9. Belirli bir konuma uzaklık ve simetri

Yedi konumlu bir sırada A'nın dördüncü göze, B'nin ise A'dan tam iki konum uzağa yerleştirilmesi istenirse $A=4$ ve $B\in\{2,6\}$ olur. Aynı uzaklık, solda ve sağda iki farklı seçeneğe karşılık gelir. “B, A'nın iki göz sağındadır” ifadesi eklendiğinde $B=6$ tek seçenek olur. Uzaklığın mutlak değerle verilmesi yönü belirlemez; yön ayrıca belirtilmedikçe iki tarafın da denetlenmesi gerekir.

Benzer biçimde dokuz gözlü bir sırada orta göz beşincidir. Ortadan dört birim uzaktaki yerler 1 ve 9; ortadan iki birim uzaktakiler 3 ve 7'dir. Ancak sıra başına yakın bir konumda bulunan öğe için iki yöne aynı uzaklıkta boş yer bulunmayabilir. Yedi konumlu bir sırada $A=2$ ve $|p(B)-p(A)|=3$ ise adaylardan -1 sıra dışında, 5 geçerlidir. Bu nedenle mutlak değer eşitliğinin cebirsel çözümleri konum aralığına göre süzülmelidir.

$$|p(A)-p(B)|=d;\ 1\le p(A),p(B)\le n$$

Anlamı: İki öğe arasındaki konum uzaklığının d eş aralık olduğunu belirten koşul.

Koşullar: $p(A),p(B)$ tam sayı konumlarıdır; $d\ge 0$ tam sayıdır. Ayrı öğeler tek kişilik yerlerde bulunuyorsa $d=0$ mümkün değildir. Sıra doğrusal ve yönlüdür.

10. Sayı etiketlerinin tek-çift ve bölünebilme özellikleriyle yerleşimi

Dört konuma 13, 16, 21 ve 28 sayıları yerleştirilsin. Tek sayılar yalnız birinci ve üçüncü gözlerde; çift sayılar yalnız ikinci ve dördüncü gözlerde bulunabiliyorsa ilk ve üçüncü gözlere 13 ve 21 iki farklı sırayla, ikinci ve dördüncü gözlere 16 ve 28 yine iki farklı sırayla yerleştirilir. Toplam dört yerleşim elde edilir: 13–16–21–28, 13–28–21–16, 21–16–13–28, 21–28–13–16.

“İlk konumdaki sayı üçüncü konumdakinden küçük” koşulu eklenirse ilk iki diziliş kalır. “İkinci konumdaki sayı dördüncünün iki katıdır” koşulu bu örnekte hiçbir dizilişi sağlayamaz; 16 ve 28 sayıları birbirinin iki katı değildir. Şartların sayısı fazla olsa da ortak çözüm kümesinin boş olabileceği göz önünde tutulmalıdır. Sayının tek veya çift olması, konumun tek veya çift olmasından farklı bir özelliktir; bunları ilişkilendiren kural açıkça verilmelidir.

Tek-çift değer kısıtlı dört gözlü yerleşim

1. göz	2. göz	3. göz	4. göz	1. göz < 3. göz?
13	16	21	28	Evet
13	28	21	16	Evet
21	16	13	28	Hayır
21	28	13	16	Hayır

11. Toplam ve fark üzerinden konum belirleme

Bir sıranın dört ayrı gözünde 7, 11, 19 ve 23 sayıları bulunsun. Birinci ile dördüncü gözdeki sayıların toplamı 30 ise uçlarda bulunabilecek çiftler {7,23} veya {11,19} olur. İkinci gözdeki sayı üçüncü gözdekinden büyük ve aralarındaki fark 12 olsun. İlk uç seçeneğinde orta değerler 11 ve 19'dur; farkları 8 olduğundan elenir. İkinci uç seçeneğinde orta değerler 7 ve 23'tür; fark 16'dır, bu da elenir. Dolayısıyla bu iki koşul birlikte hiçbir yerleşime izin vermez.

Fark koşulu 8 olarak değiştirilirse uçlarda 7 ve 23 bulunabilir; orta yerlere 19 ve 11 sırasıyla gelir. Uçların kendi aralarındaki yönü sabitlenmediği için 7–19–11–23 ve 23–19–11–7 iki geçerli diziliştir. Bu örnek, tek bir koşulun tutarsızlığa yol açabileceğini ve sayısal şartlarla yön şartlarının birlikte değerlendirilmesi gerektiğini gösterir. Farkın mutlak değeri verilmiş olsaydı orta yerlerin kendi aralarındaki sırası da iki seçenekli olabilirdi.

12. Sayısal dizilerde artma, azalma ve bitişik fark koşulları

Gözlere yerleştirilen sayılar artan sıradaysa ardışık konumlar üzerindeki değerler küçükten büyüğe ilerler; ancak ne kadar arttıkları belirtilmedikçe bunların aritmetik dizi olduğu söylenemez. 2, 5, 11, 18 değerleri artan sıradadır; farkları 3, 6 ve 7 olduğundan sabit fark yoktur. Buna karşılık 4, 9, 14, 19 değerlerinin artışı beşer birimdir. “Artan sıralama” ile “eşit farkla sıralama” farklı koşullardır.

Dört farklı tam sayının her birinin bir öncekinden üç büyük olması ve ilk sayının 6 olduğu belirtilirse yerleşim 6, 9, 12, 15 biçiminde kesinleşir. İlk sayının kaç olduğu bilinmezse tüm dizinin ortak kaydırılmasına izin veren çok sayıda yerleşim olabilir. Örneğin sayılar 1 ile 20 aralığında kalmak zorundaysa ilk sayı en az 1, en çok 11 olabilir; çünkü son sayı ilk sayıdan 9 büyüktür. Böylece 11 farklı başlangıç değeri vardır. Burada sıralama kuralı sayıları birbirine bağlar, fakat aralık ve başlangıç bilgisi olmadığı sürece hepsini tek tek belirlemez.

$$a_i = a_1+(i-1)d;\ 1\le i\le n$$

Anlamı: Sıralı n konumun değerleri arasında sabit d fark bulunması koşulunun yerleştirme üzerindeki etkisi.

Koşullar: i pozitif tam sayı konum indeksidir; d tüm komşu konumlar için aynı sayıdır. Sıralamanın kesin artan olması için $d>0$, kesin azalan olması için $d<0$ gerekir. Bu bağıntı bütün artan sıralamalar için değil, yalnız sabit fark varsayımı için kullanılır.

13. Öncelik zinciri ve tabloyla konum daraltma

Beş sayı etiketi A, B, C, D, E beş ayrı göze yerleştirilsin. B'nin A'nın hemen sağında olduğu, C'nin B'nin sağında fakat E'nin solunda bulunduğu, D'nin ise A'nın solunda yer aldığı bilinsin. Şartlar $p(B)=p(A)+1$, $p(B)<p(C)<p(E)$ ve $p(D)<p(A)$ biçimindedir. Bu ilişkiler tek bir zincir doğurur: D–A–B–C–E. Beş ayrı öğe için beş konum olduğundan yerleşim zorunlu olarak bu sırayla gerçekleşir.

Çözüm, önce A–B komşu bloğunu belirlemekle de doğrulanabilir. D bu bloğun solunda, C ve E sağında olmak zorundadır; ayrıca C, E'den önce gelir. Blok dışındaki sıralama böylece kesinleşir. Buradaki “hemen sağında” koşulu, D–A–B–C–E zinciri zaten kesin olduğu için son yerleşimin görünüşünde ayrıca bir sonuç yaratmaz; fakat beş öğelik aynı zincir başka ilave öğelerle kurulmuş olsaydı A ile B arasına girilmesini önlemesi bakımından belirleyici olurdu.

Konuya ait açıklayıcı şema



A ve B bitişik

Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

14. Çok kısıtlı yerleştirmede olasılık tablosu oluşturma

Dört farklı dosya 2, 5, 8 ve 11 sayılarıyla etiketlensin. Soldan sağa dört göz vardır. 11 uçta bulunmalıdır; 2, 5'in solunda olmalıdır; 8, 11'in hemen yanında bulunmalıdır. Önce 11'in hangi uçta olabileceği incelenir. 11 birinci gözdeyse 8 ikinci gözdedir. Üçüncü ve dördüncü gözlere 2 ve 5 artan yönle yerleşir; sonuç 11–8–2–5 olur. 11 dördüncü gözdeyse 8 üçüncü gözdedir. Birinci ve ikinci gözlere 2 ve 5 artan yönle yerleşir; sonuç 2–5–8–11 olur. İki düzen de bütün koşulları sağlar.

Birinci düzenin sağdan sola büyükten küçüğe ilerlediği söylenemez; 11, 8, 2, 5 dizisinde son iki öğe artar. İkinci düzen ise küçükten büyüğe ilerler. “Yerleştirme sonunda sayılar artan sırada olsun” koşulu eklenirse yalnız 2–5–8–11 kalır. Böylece iki farklı uygun yerleşimin bulunmasıyla tüm koşulları sağlayan tek yerleşimin bulunması arasındaki fark görünür.

Dört etiketin bütün geçerli yerleşimleri

11'in bulunduğu uç	8'in konumu	2 ve 5'in konumu	Tam diziliş	Sayılar artıyor mu?
Sol uç	2. göz	3. ve 4. göz	11–8–2–5	Hayır
Sağ uç	3. göz	1. ve 2. göz	2–5–8–11	Evet

15. Çift taraflı konum şartları ve önceden sabitlenmiş hücreler

Altı hücreli bir tabloda bir etiket hem soldan ikinci hem de sağdan beşinci sıradaysa bu iki tarif aynı hücreyi gösterir: soldan ikinci konumun sağdan sıra numarası 6−2+1=5'tir. Bir öğe soldan i'nci, sağdan j'inci konumda bulunuyorsa, toplam hücre sayısı n=i+j−1 olur. Bu bağıntı, aynı öğenin iki uçtan sayılan yerini karşılaştırmaktan kaynaklanır; öğenin solundan i−1 ve sağından j−1 başka hücre vardır, kendisi bir kez sayılır.

Böyle bir kuraldan bulunan sıra sayısı ile dolu öğe sayısı mutlaka aynı değildir. Altı hücreli bir rafta iki göz boşsa yine altı konum vardır. “Altı kişi aralıksız yan yana duruyor” ile “altı koltuk var, dört kişi oturuyor” durumları farklıdır. Sağdan sayımda boş hücrelerin hesaba katılıp katılmayacağı, kullanılan konum sistemine bağlıdır; raf gözü sayılıyorsa boş gözler de sayılır, yalnız oturan insanlar sıralanıyorsa boş koltuklar ayrıca belirtilmelidir.

$$n=i+j-1;\ j=n-i+1$$

Anlamı: Aynı konumun soldan i'nci ve sağdan j'inci olması hâlinde toplam doğrusal konum sayısı.

Koşullar: i,j pozitif tam sayıdır; iki yön de aynı sıra üzerindeki bütün konumları sayar. Öğenin kendisi iki uçtan hesapta birer kez yer aldığından toplamdan bir çıkarılır.

16. Boş hücreler ve yerleştirilen nesnelerin sayısı

Beş numaralı gözün yalnız üçü dolu olsun. Üç farklı etiket A, B ve C kullanılacaksa yerleşim, yalnız etiketlerin sırasını değil, hangi iki gözün boş kaldığını da kapsar. Önce A için beş, sonra B için dört, sonra C için üç farklı boş göz seçilebilir; toplam 5·4·3=60 düzen ortaya çıkar. Diğer iki göz otomatik olarak boş kalır. Aynı sonuca önce üç etiketin dolduracağı göz kümesini seçerek ulaşılır: Beş gözden üçünü seçmenin 10 yolu vardır, A, B, C etiketlerini bu gözlere 3!=6 biçimde dizmek mümkündür; 10·6=60 olur.

Bütün gözler dolu olduğunda sıralama tek boyutlu bir öğe dizilişi gibi görülebilir. Boş gözler mümkün olduğunda ise aynı soldan sağa öğe sırası birden fazla konum düzeninde bulunabilir. Örneğin A–B–C sırası 1,2,3. gözlere de, 1,3,5. gözlere de yerleştirilebilir. “B, A'nın hemen sağında” koşulu yalnız ilk düzende doğrudur. Öğeler arasındaki öncelik bağı ile bitişiklik bağı boş gözlü modellerde özellikle ayrışır.

$$P(n,r)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)=n!/(n-r)!$$

Anlamı: n farklı konumun r tanesine r farklı öğeyi bire bir yerleştirmenin koşulsuz düzen sayısı.

Koşullar: $0\le r\le n$ ve n,r tam sayıdır; her öğe ve konum tek kez kullanılır, boş kalan konumlar ayırt edilebilir; başka kısıt yoktur. 0!=1 kabul edilir. Bu formül burada doğrulama amacıyla kullanılır, koşullu yerleştirmede sayı doğrudan uygulanmaz.

17. Zorunlu konum, mümkün konum ve karşı örnek

Bir düzen için “C üçüncü konumdadır” ifadesinin zorunlu olması, bütün geçerli yerleşimlerde C'nin üçüncü yerde bulunmasını gerektirir. Yalnız bir geçerli dizilişte C'nin üçüncü yerde olması bu sonucu kanıtlamaz. Örneğin A<B<C öncelik koşulu ve D'nin hiçbir kısıtı olmadığı dört öğelik modelde ABCD ile ABDC dizilişlerinin ikisi de geçerlidir. İlkinde C üçüncü, ikincisinde dördüncü konumdadır. Dolayısıyla C'nin üçüncü konumda bulunması mümkündür ama zorunlu değildir.

Öte yandan bütün geçerli dizilişlerde A, B'nin solunda kalır; çünkü bu bir başlangıç koşuludur. “B birinci konumda olabilir” iddiası ise imkânsızdır: A'nın B'nin solunda olması gerekmesine rağmen birinci konumun solunda yer yoktur. Bir düzenleme sorusunda zorunluluk, olasılık ve imkânsızlık ayrımı, geçerli düzenler kümesi üzerinden yapılır. Karşı örnek bulmak, kesinlik iddiasını çürütmenin en kısa yollarındandır.

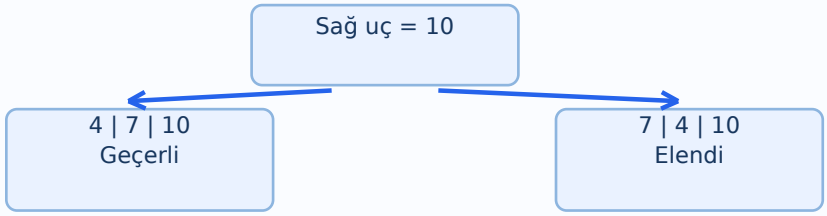
Zorunlu sonuç ile olası sonuç Bir konumun yalnız bir uygun dizilişte görünmesi kesinlik değildir. Kesinlik için bütün uygun dizilişlerde geçerli olmalıdır. Tek bir uygun karşı örnek, zorunluluk iddiasını çürütür; hiç uygun diziliş yoksa önce koşulların tutarsızlığı saptanmalıdır.

18. Sistematik listeleme ile adil, eksiksiz denetim

Yerleştirme seçenekleri çok olduğunda tüm ihtimalleri gelişi güzel yazmak bazı düzenlerin atlanmasına, bazılarının tekrar sayılmasına yol açabilir. Bunun yerine önce en dar konum kümesine sahip öğe seçilir, ardından onun bulunduğu her konum için diğer öğeler sıralı biçimde yerleştirilir. Her dalda aynı öğe tekrar kullanılmaz. Kısıt ihlali görüldüğü anda o dal bırakılır. Böylece arama yalnız olası ve tutarlı dallarda ilerler.

Örneğin üç farklı tam sayı 4, 7 ve 10 üç hücreye yerleştirilsin. 10 sağ uçta, 4 ise 7'nin solunda olsun. Sağ uç sabitlenince ilk iki göze 4 ve 7 kalır; küçük değerin solda olması 4–7–10 düzenini zorunlu kılar. Eğer “4, 7'nin sağında” koşulu verilseydi yerleşim 7–4–10 olurdu. Aynı yöntemin iki durumu da açıklayabilmesi, yöntemin seçilen cevaba göre şekillenmediğini ve açık koşullara bağlı olduğunu gösterir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

19. Sayısal toplam ve sıra koşullarını birleştiren bütünleşik model

Beş ayrı göze 6, 9, 12, 15 ve 18 sayıları yerleştirilsin. Soldan sağa konum numaraları 1–5 olsun. Koşullar şunlardır: 18 en sağdaki gözdedir; 6, 9'un hemen solundadır; 12, 15'in hemen sağında bulunur; orta konumdaki sayı 15 değildir. Bu koşullar bir kez birlikte kullanıldığında geçerli yerleşimler sistematik olarak bulunabilir.

18 beşinci konuma sabitlenir. 6–9 ikilisi yan yana bir bloktur. Geriye 12 ve 15 kalır; “hemen sağında” koşulu nedeniyle bunlar da 15–12 bloğunu oluşturur. 18 dışındaki dört yer, iki bitişik bloktan oluşur: [6,9] ve [15,12]. Bu blokların yalnız iki dizilişi vardır. [6,9]–[15,12]–18 yerleşiminde orta gözde 15 bulunur ve son koşul ihlal edilir. [15,12]–[6,9]–18 dizilişinde orta gözde 6 bulunur; bu düzen bütün koşulları sağlar. Sonuç soldan sağa 15–12–6–9–18 biçiminde tek yerleşimdir.

Bağımsız denetimde 18'in sağ uçta, 6'nın 9'un hemen solunda ve 12'nin 15'in hemen sağında olduğu görülür; orta konumdaki 6 sayısı da 15 değildir. Ayrıca yerleştirilen beş sayı birer kez kullanılmıştır. İlk dört değerin toplamı 15+12+6+9=42, bütün beş değerin toplamı 60'tır. Bu toplamları yerleştirme değiştirirse de değişmez; çünkü sayıların yerleri değiştirilmiş, kendileri değiştirilmemiştir. Buna karşılık birinci ile üçüncü gözün toplamı bu belirli yerleşimde 15+6=21'dir; yerleşime bağlı bir niceliktir.

Beş sayı için blok sırası ve son koşul denetimi

Blok sırası	Tam yerleşim	Orta göz	Sonuç
[6,9] sonra [15,12]	6–9–15–12–18	15	Elendi
[15,12] sonra [6,9]	15–12–6–9–18	6	Geçerli

20. Çözümün sınırı: düz sıra, dairesel yerleşim ve ek kısıtlar

Bütün örneklerde konumların soldan sağa numaralandırılmış doğrusal bir sıra oluşturduğu varsayılmıştır. Dairesel bir masada baş ve son yerlerin yan yana olması, bitişiklik ve yer sayımı sonuçlarını değiştirir. Örneğin doğrusal sırada beşinci ile birinci konum komşu değildir; dairesel yerleşimde fiziksel olarak komşu olabilirler. Dairesel düzende başlangıç işareti veya sabit oturan kişi yoksa, birbirine döndürmeyle dönüşen yerleşimler aynı kabul edilebilir. Bu nedenle doğrusal sıra formüllerinin dairesel düzene kendiliğinden aktarılması doğru değildir.

Aynı biçimde eşit sayılar varsa öğeler gerçekten farklı mı, yoksa sayı bakımından özdeş mi kabul ediliyor sorusu açıklığa kavuşturulmalıdır. İki ayrı kartın üzerinde 8 yazması kartlar farklı etiketlerle tanımlanmışsa fiziksel olarak farklı nesneler olabileceği anlamına gelir. Yalnız sayısal sonuç dizisi inceleniyorsa iki 8'in yer değiştirmesi yeni bir dizi üretmez. Bir yerleştirme modelinde karar vermeden önce konumların türü, nesnelerin ayırt edilebilirliği, boş yer olasılığı, yön ve bütün koşullar belirlenir.

Sıralama ve yerleştirmede güvenilir yöntem, şartları konum ve değer diline dönüştürmek, en güçlü sınırları önce kullanmak, kalan seçenekleri sistematik listelemek, bütün geçerli düzenleri ayırt etmek ve istenen sonucun her düzende geçerli olup olmadığını sınamaktır. Bir sonraki konu, hazır sıralama şablonu bulunmayan kurallardan daha geniş sayısal sonuçlar çıkarmayı ele alacaktır.

KONU 4.6

VERİLEN KURALLARDAN SONUÇ ÇIKARMA

Sayısal mantıkta bir örüntüyü bulmak, özel bir işlemi uygulamak veya bir sayıyı belirli bir konuma yerleştirmek tek başına amaç değildir. Daha geniş beceri, verilen kuralları değiştirmeden bunlardan hangi sonuçların zorunlu olarak çıktığını göstermektir. Aynı sayı topluluğu için bir sonuç bütün kurallarla uyumlu olabilir, ancak yine de zorunlu olmayabilir. Çünkü uyumlu sonuç, yalnızca mümkün bir durumun varlığını; zorunlu sonuç ise kuralları sağlayan bütün durumlarda ilgili özelliğin gerçekleştiğini ifade eder.

Örneğin bir dosya grubunda her klasörün en az üç belge içerdiği ve toplam dört klasör bulunduğu söylendiğinde belge sayısının en az on iki olduğu kesindir. Tam on iki belge bulunduğu ise kesin değildir: Her klasörde üçer belge bulunabilir; bir klasörde dört belge olması da koşullara uygundur. Bu ayrımı oluşturmak için ek işlem kuralı uydurmak gerekmez. Verilen “en az” şartının alt sınırı nasıl belirlediği anlaşılır. Bu bölümde çıkarımın dayanağı, ölçüsü ve geçerlilik alanı sistematik biçimde ele alınacaktır.

1. Kural, veri, varsayım ve sonuç arasındaki ayrım

Bir muhakemenin başlangıç verisi sayıların kendisi olabilir: “Beş ayrı kutu vardır.” Kural ise bu sayıları birbirine bağlayan ilişkidir: “Her kutuda aynı sayıda kalem bulunur.” Ek veri olarak toplam yirmi kalem bulunduğu bildirilirse, kutu başına dört kalem sonucuna ulaşılır. Sonuç iki dayanağa birden bağlıdır: Beş kutu olduğu ve kalemlerin eşit dağıldığı bilgisi. Eşitlik kuralı kaldırılırsa kutu başına dört kalem olduğu artık zorunlu değildir.

Varsayım, verilenler arasında bulunmadığı hâlde çözümü kolaylaştırmak için geçici olarak kabul edilen ifadedir. “Her kutuda pozitif sayıda kalem vardır” şartı söylenmemişse boş kutuların bulunmadığını kendiliğinden kabul etmek doğru olmaz. Buna karşılık “beş kutunun her birinde en az bir kalem vardır” denirse boş kutu olasılığı gerçekten ortadan kalkar. Çıkarım sırasında verilen kural ile çözücünün eklediği varsayımın birbirinden açık biçimde ayrılması, doğru hesabın yanlış sonuca bağlanmasını önler.

Aynı sayı verisinde kuralın etkisi

Bilinenler	Ek kural	Zorunlu sonuç	Zorunlu olmayan sonuç
Beş kutu, toplam 20 kalem	Her kutuda eşit sayıda kalem	Kutu başına 4 kalem	Bir kutuda 5 kalem
Beş kutu, toplam 20 kalem	Her kutuda en az 1 kalem	Hiçbir kutu boş değildir	Her kutuda 4 kalem
Beş kutu, toplam 20 kalem	Ek dağıtım kuralı yok	Ortalama 4 kalem	Her kutuda 4 kalem

2. Zorunlu, mümkün ve olanaksız sonucun kesin anlamı

Bir kural sistemini sağlayan tüm durumların oluşturduğu kümeye uygun durumlar kümesi diyelim. Her uygun durumda doğru olan ifade zorunludur. En az bir uygun durumda doğru, başka uygun bir durumda yanlış olabilen ifade yalnızca mümkündür. Hiçbir uygun durumda doğru olamayan ifade olanaksızdır. Bu sınıflandırma, uygun durum kümesi boş değilse olağan anlamıyla kullanılabilir; çelişkili kurallarda ayrıca tutarsızlık tespit edilmelidir.

Örneğin x pozitif tam sayı, $5 \le x \le 9$ ve x çift olsun. Uygun değerler 6 ve 8'dir. “x en az altıdır” zorunlu, “x sekizdir” mümkün fakat zorunlu değil, “x yedidir” olanaksızdır. Bir adayın kuralları sağlaması onun tek aday olduğu anlamına gelmez. Kesinliği çürütmek için bir uygun karşı örnek yeterlidir: x=6, “x her zaman sekizdir” iddiasının karşı örneğidir.

> $S=\{x: x \text{ tüm verilen kuralları sağlar}\}$; P zorunlu $\Leftrightarrow$ S boş değil ve her $x \in S$ için P(x) doğrudur; P mümkün $\Leftrightarrow$ en az bir $x \in S$ için P(x) doğrudur.
>
> **Anlamı:** Bir ifadenin kesinlik derecesi yalnız bulunan ilk çözüme değil, kurallarla uyumlu bütün çözümlere bağlıdır.
> **Koşullar:** S, belirtilen sayı evreni içinde tanımlanır; $S=\varnothing$ durumunda önce koşulların tutarsızlığı ayrıca bildirilir.

3. Bir kuraldan çıkan sonucu tersine çevirme yanılgısı

Bir sayı altının katıysa hem ikiye hem üçe bölünür. Bu ifade ileri yönde doğrudur: “Altının katı olmak” daha güçlü, “çift olmak” daha zayıf bir özelliktir. Fakat çift olan her sayı altının katı değildir. Örneğin 14 çifttir, ancak altıya bölünmez. Altının katı olma kuralından çiftlik çıkar; çiftlikten altının katı olma sonucu çıkmaz.

İki özelliğin birlikte sağlanması farklıdır. Bir tam sayının hem ikiye hem üçe bölünebilir olduğu kesin ise altıya da bölünebildiği söylenebilir. Bu sonuç yalnız tek bir kuralın ters çevrilmesiyle değil, iki ayrı bölünebilme koşulunun birlikte uygulanmasıyla elde edilir. “Eğer A ise B” önermesiyle “A ancak ve ancak B ise” ifadesi aynı güçte değildir. Eşdeğerlik elde edilmesi için iki yönün de kanıtlanması gerekir.

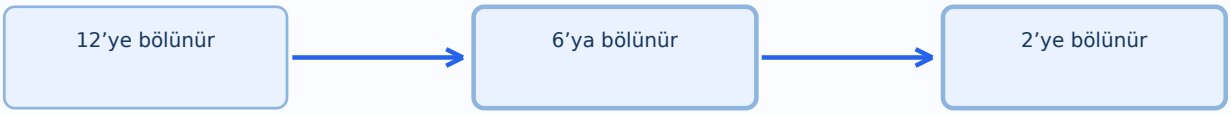
> **Tek yönlü kuralı çift yönlü okumama** A gerçekleşirse B gerçekleşir bilgisi, tek başına B'nin yalnız A'dan doğduğunu söylemez. B'nin gerçekleştiği, A'nın gerçekleşmediği uygun bir örnek bulunabiliyorsa ters çıkarım geçersizdir.

4. Zincirlenmiş kurallardan yeni bir zorunluluk üretme

Doğrudan verilmemiş sonuçlar, iki veya daha fazla kuralın birleştirilmesiyle elde edilebilir. Örneğin bütün A türü belgeler B türü kayda giriyorsa, B türü kayıtların tümü de C türü arşive aktarılıyorsa her A belgesi C arşivine aktarılır. Sayısal karşılık olarak, bir tam sayının 12'ye bölünmesi onun 6'ya bölünmesini; altıya bölünmesi de ikiye bölünmesini gerektirir. Böylece 12'ye bölünme, ikiye bölünmeyi zorunlu kılar.

Zincirin sonundan başına dönmek ise yine ek bilgi ister. İkiye bölünen her sayı altıya, altıya bölünen her sayı da on ikiye bölünmez. Bir kural zincirindeki ilk önermenin sağlanması son önermeyi garanti ederken, son önermenin sağlanması zincirdeki ilk şartı garanti etmez. Bu özellik, ara değişkenlerin saklandığı çok adımlı sayısal işlemlerde de kullanılır.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

5. Güçlü ve zayıf kuralın bilgi değeri

"Bir doğal sayı dördün katıdır" ifadesi, "sayı çifttir" ifadesinden daha dar bir aday topluluğu tanımlar. Dolayısıyla ilk kural biliniyorsa ikincisini ayrıca vermek uygun değerleri azaltmaz. Örneğin 1–30 aralığında dördün katları 4, 8, 12, 16, 20, 24 ve 28'dir. Bunların tamamı zaten çifttir. İkinci kuralın eklenmesiyle yedi aday yedi aday olarak kalır.

Buna karşılık aynı sayının beşten büyük olduğu bildirildiğinde 4 elenir ve altı aday kalır. Bir kuralın yararlı olup olmadığı, ifadenin uzunluğundan değil uygun durum kümesini değiştirip değiştirmemesinden anlaşılır. Daha fazla cümlenin verilmesi her zaman daha fazla ayırt edici bilgi bulunduğu anlamına gelmez.

Uygun sayı kümesinin kurallarla daralması

Uygulama	Uygun sayılar	Adet
$1 \le x \le 30$ ve 4'e bölünür	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28	7
Ayrıca x çifttir	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28	7
Ayrıca $x > 5$	8, 12, 16, 20, 24, 28	6
Ayrıca x, 3'e bölünür	12, 24	2

6. Toplam kuralından tek tek niceliklere ilişkin sonuç çıkarma

Toplamı bilinen ayrı niceliklerin tek tek değerleri çoğu zaman belirlenemez; ancak bazı ortak özellikler kesinleşebilir. İki pozitif tam sayının toplamı 21 ise en az birinin tek olması zorunludur. Çünkü iki çift tam sayının toplamı çift olur. İki tek sayının toplamı da çift olduğundan, toplamın tek olması iki sayıdan birinin tek, diğerinin çift olduğunu gösterir. Hangisinin tek olduğu belirtilmez.

Örneğin $8+13=21$ ve $9+12=21$ iki farklı uygun ayrıştırmadır. İlkinde birinci sayı çift, ikinci tek; ikincisinde birinci tek, ikinci çifttir. Dolayısıyla "birinci sayı çifttir" kesin değildir. Sayıların pozitif olma şartı toplamın tekliği bakımından gerekli olmasa da adayların alt ve üst sınırlarını etkiler. Toplamın işareti ya da büyüklüğüyle ilgili sonuç çıkarılırken aynı şart göz ardı edilemez.

$$a+b=2k+1,\ a,b\in\mathbb{Z} \Rightarrow a \text{ ve } b \text{ farklı tek-çift sınıfındadır.}$$

Anlamı: Tek toplam, bir terimin tek ve diğerinin çift olmasını zorunlu kılar.

Koşullar: a ile b tam sayılardır; sıralı rollerin hangisinin tek olduğu yalnız toplamdan belirlenemez.

7. Çiftlik, bölünebilme ve art arda kurallarda değişmeyen özellik

Bir sayıdan her adımda dört çıkarılıyorsa, bütün ara sayıların dörde bölümünden kalan aynı kalır. Örneğin başlangıç 29 olsun: 29, 25, 21, 17 ve 13 sayılarının dörde bölümünden kalan 1'dir. Her geçiş yalnız dört birimlik değişim yaptığı için bu kalan değişmez. Art arda kaç adım uygulanırsa uygulansın, sonuç başlangıç sayısıyla aynı kalan sınıfında bulunur.

Bu özelliğe değişmez özellik denebilir. Değişmez özellik yalnız sonucu doğrudan hesaplamaya değil, bazı sonuçların imkânsızlığını göstermeye de yarar. Dörder azaltılan 29'dan 14'e ulaşılamaz; çünkü 29'un dörde bölümünden kalan 1, 14'ün kalanı 2'dir. Üstelik $29-4t=14$ eşitliği $t=15/4$ adım verir; t'nin tam sayı olması zorunluluğuna aykırıdır. Her iki yöntem aynı olumsuz sonucu destekler.

$$x_t=x_0+k\cdot t\cdot m \Rightarrow x_t\equiv x_0 \pmod m$$

Anlamı: Her adımda m'nin tam katı kadar değişen bir sayının m'ye bölümünden kalanı korunur.

Koşullar: x_0, k, t tam sayı, m pozitif tam sayı; adım sayısı t negatif olmayan tam sayı seçilir. ≡ sembolü, farkın m'ye tam bölündüğünü belirtir.

8. İşlem tekrarında sınıra ve sona erişme hakkında çıkarımlar

Her adımda beş artan bir sayaç başlangıçta 7'yi gösteriyorsa t adım sonra değeri $7+5t$ olur. On adım sonra 57'ye ulaşır. “Sayaç tam 60 olur mu?” ifadesi ise $7+5t=60$ eşitliğine bağlıdır. Eşitlik $5t=53$ ve $t=10{,}6$ verir; adım sayısı tam sayı olması gerektiği için 60'a tam olarak ulaşılamaz. Bununla birlikte sayaç 60'ı aşabilir: On bir adım sonra 62 olur.

“60'a ulaşmak” sözü tam 60 değerini almak anlamındaysa sonuç olumsuzdur; “en az 60 olmak” anlamındaysa sonuç olumludur. İkinci durumda $7+5t\geq 60$ eşitsizliği $t\geq 10{,}6$ sonucunu verir; en küçük uygun $t=11$'dir. Böylece verilen aynı artış kuralı iki farklı hedef tanımı için farklı cevap üretir.

Beşer artan sayacın hedef denetimi

Adım t	7+5t	Tam 60 mı?	En az 60 mı?
9	52	Hayır	Hayır
10	57	Hayır	Hayır
11	62	Hayır	Evet
12	67	Hayır	Evet

9. Kuralı her aşamada yeniden uygulamak: durumun izini sürme

Bazı sistemlerde aynı kural bütün aşamalarda geçerlidir, fakat kuralın girdisi her defasında güncellenen sayıdır. Örneğin pozitif tam sayı x için sayı çiftse yarıya indirilsin, tekse üç katına bir eklensin. Başlangıç $x=5$ olduğunda önce 5 tek olduğu için $3\cdot5+1=16$, sonra 16 çift olduğu için 8, ardından 4, 2 ve 1 elde edilir. Bu beş geçişten sonra 1'e ulaşılmış olur.

Bu özel örnekten bütün başlangıç değerlerinin mutlaka 1'e ulaşacağı sonucu çıkarılamaz. Verilen sınırlı iz, yalnız 5 başlangıcına ilişkin hesapları doğrular. Ayrıca tek sayıda üç katına bir ekleme adımı büyümeye yol açtığı için her adımın sayıyı azalttığını söylemek de yanlıştır. Bir kuralın her durumda sona erdiğini iddia etmek, birkaç adımın doğruluğundan daha güçlü kanıt ister. Buradaki amaç bütün başlangıçlara ilişkin kanıtlanmamış bir genellemeye varmak değil, durum değişiminin dikkatle izlenmesidir.

Güncel duruma göre karar veren kuralın beş geçişi

Geçiş	Önceki sayı	Uygulanan kural	Sonraki sayı
1	5	Tek: 3x+1	16
2	16	Çift: x/2	8
3	8	Çift: x/2	4
4	4	Çift: x/2	2
5	2	Çift: x/2	1

10. Ters işlem yaparken hangi bilginin kaybolduğunu ayırt etme

Bir dönüştürme kuralı çıktıdan girdiye her zaman tek bir geri yol vermez. Örneğin tam sayılar üzerinde $f(x)=x^2$ olarak tanımlanmış olsun. $f(x)=49$ sonucu $x=7$ veya $x=-7$ girdilerinden kaynaklanabilir. Sonuç 49 diye başlangıcın mutlaka 7 olduğu söylenemez. Başlangıç sayısının pozitif olduğu ek koşulu verilirse $x=7$ kesinleşir.

Buna karşılık $g(x)=2x+5$ kuralı gerçek sayılarda farklı girdileri farklı çıktılara dönüştürür. $g(x)=17$ için $2x+5=17$, $x=6$ bulunur. Doğrulama $g(6)=17$'dir. İlk örnekte dönüşüm işaret bilgisini kaybederken ikinci örnekte böyle bir kayıp yoktur. Bir kuralın tersinden zorunlu sonuç elde etmek için birden fazla girdinin aynı çıktıya ulaşıp ulaşmadığı değerlendirilmelidir.

$$x^2=49 \Rightarrow x\in\{-7,7\};\ x>0 \text{ ek koşulu} \Rightarrow x=7.$$

Anlamı: Çıktının tek oluşu, girdinin tek olmasını garanti etmez; tanım kümesine ek koşul gerekebilir.

Koşullar: x gerçel sayıdır; karekök alma sırasında hem pozitif hem negatif kök olasılığı değerlendirilir.

11. Herkes için ve en az biri için söylenen kurallar

Bir gruptaki bütün sayılar çiftse, seçilen herhangi iki sayının toplamı çifttir. Burada kural gruptaki her öğeye uygulanmaktadır. Ancak “grupta en az bir çift sayı vardır” bilgisi aynı sonucu vermez. Örneğin grupta 4 ve 7 varsa en az bir çift sayı bulunmasına rağmen iki sayının toplamı 11, yani tektir. “Bütün” ifadesinin “en az bir”e dönüştürülmesi sonucun kapsamını değiştirir.

Benzer biçimde bir listedeki her sayının sıfırdan büyük olması toplamın pozitif olduğunu garanti eder; listedeki sayılardan yalnız birinin pozitif olması toplamın pozitif olacağını garanti etmez. Örneğin 8 ve −20 sayılarının toplamı −12'dir. Toplama ilişkin kural ancak diğer terimlerin büyüklükleri de sınırlandırıldığında kesin sonuç üretir. Çıkarımın geçerliliği yalnız olumlu bir örneğe değil, “her”, “bazı”, “en az” ve “tam olarak” ifadelerinin doğru yorumuna bağlıdır.

Niceleyici ve kapsamın korunması “Her öğe” hakkında verilen bilgi, “en az bir öğe” hakkında verilen bilgiden güçlüdür. “En az biri” koşulu, diğer öğelerin değerini veya niteliğini belirlemez. Kurallardan sonuç çıkarırken cümledeki kapsam genişletilemez.

12. Alt ve üst sınır üretirken toplam ve dağılımı ilişkilendirme

Üç kutunun her birinde en az dört, en çok yedi kalem varsa toplam kalem sayısı en az 3·4=12 ve en çok 3·7=21 olabilir. Toplamın 18 olduğu da verilirse artık 18'in 12 ile 21 arasında olduğu doğrulanır; ancak tek tek kutuların sayıları belirlenmez. Örneğin 4, 7 ve 7 dağılımı da 6, 6 ve 6 dağılımı da toplam 18 verir. Buna karşılık 4, 4 ve 10 dağılımı üst sınır 7'yi ihlal ettiği için geçersizdir.

Aynı sistemde toplamın 20 olduğu söylense en az bir kutuda yedi kalem bulunması zorunludur. Çünkü hiçbiri yedi olmasaydı her biri en çok altı kalem alabilir ve toplam en çok 18 olurdu. Buna karşılık toplam 19 için bu çıkarım zorunlu değildir: 6, 6 ve 7 dağılımında yedi vardır, 6, 6 ve 7 dışında yedisiz bir dağılım aranırsa en yüksek yedisiz toplam 18 olduğu görülür; dolayısıyla 19 için de yedi zorunludur. Aslında sınırın doğru biçimi “toplam 18'i aşarsa en az bir kutuda yedi vardır” kuralıdır. Bu örnek, ilk akla gelen sayısal sınırın daha güçlü bir genellemeyle açıklanabileceğini gösterir.

> n öğe, her biri en çok $u-1$ ise toplam $\le n(u-1)$. Toplam $>n(u-1)$ ise en az bir öğe $\ge u$ olur.
>
> **Anlamı:** Bütün öğelerin bir eşik altında kaldığı varsayımı toplam sınırını ihlal ediyorsa en az bir öğe eşiğe ulaşmak zorundadır.
>
> **Koşullar:** n pozitif tam sayıdır; öğe sayıları tam sayı ve sonlu, u tam sayı eşiğidir. “En çok $u-1$” ile “u'dan küçük” tam sayılarda eşdeğerdir.

13. Karşı örnek kurarak kesinlik iddiasını sınama

Bir sonuç belirli bir örnekte doğru çıktı diye bütün uygun durumlarda geçerli kabul edilemez. “İki sayının toplamı 20 ise ikisi de çifttir” iddiası 8+12=20 örneğiyle uyumludur; fakat 7+13=20 de mümkündür ve iki sayı da tektir. Bu ikinci ayrıştırma iddiayı çürütür. Sonuç olarak toplamın çift olması, iki sayının aynı tek-çift sınıfında bulunduğunu garanti eder; hangi sınıfta olduklarını tek başına belirlemez.

Karşı örnek geçerli olmak için bütün başlangıç şartlarını sağlamalıdır. Eğer soruda ayrıca “iki sayıdan biri çifttir” deniyorsa 7+13 artık uygun karşı örnek değildir. Böyle bir durumda çift toplamın öteki terimini de çift olması gerekir. İyi bir karşı örnek, tartışılan sonucu yanlışlarken verilen diğer hiçbir kuralı bozmayan örnektir. Gelişigüzel seçilen, koşullara uymayan örnek mantıksal çürütme sayılmaz.

Aynı toplamda doğru olan ve olmayan çıkarımlar

Koşul	Uygun örnek	Çıkarımın durumu
a+b=20	a=8, b=12	İki sayı da çift olabilir
a+b=20	a=7, b=13	İki sayının da çift olması zorunlu değildir
a+b=20, a çift	a=8, b=12	b çift olmak zorundadır
a+b=20, a tek	a=7, b=13	b tek olmak zorundadır

14. Dolaylı kanıt: tersini kabul ederek çelişkiye ulaşma

Bazı sonuçlar doğrudan tek tek aday sayılmadan da kanıtlanabilir. Üç pozitif tam sayının toplamı 17 olsun. Bu üç sayının hepsi çift olamaz. Aksi kabul edilirse her sayı çift olduğundan toplamları da çift olur. Oysa 17 tektir; bu çelişki hepsinin çift olması olasılığını eler. Bununla birlikte üç sayının en az birinin tek olduğunu söylemek mümkündür, fakat tam olarak birinin tek olduğu kesin değildir. Örneğin 3+5+9=17 üç tek sayının toplamıdır; 2+6+9=17 ise yalnız bir tek sayının bulunduğu örnektir.

Çelişkiyle kanıtlama, kuralın yanlış olmasını değil, önerilen sonucun olumsuzunun kurallarla bağdaşmamasını gösterir. Buradaki ispat “bütün sayılar çift olsaydı” varsayımını çürütür; “bütün sayılar tek olamaz” sonucunu çıkarmaz. Böylece çelişki bulma yöntemi, doğru sonucun kapsamını aşmadan uygulanmış olur.

15. Birden çok kuralın bilgi ekleyip eklemediğini değerlendirme

Bir kayıt numarasının 10 ile 99 arasında bulunduğu, beşin katı olduğu ve son basamağının 0 veya 5 olduğu bilinsin. Beşin katı olan her iki basamaklı pozitif tam sayı zaten 0 veya 5 ile biter. Bu nedenle son basamak kuralı yeni bir sınırlama getirmez. Ancak “numara çift olsun” şartı eklenirse yalnız 10'un katları kalır: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 ve 90.

“Numara 30'dan büyüktür” koşulu daha da daraltınca 40, 50, 60, 70, 80 ve 90 kalır. “Numaranın rakamları toplamı 9'dur” şartı eklendiğinde bu altı sayıdan yalnız 90 uygundur. Bir koşulun yeni bilgi taşıyıp taşımadığı, önceki koşullar zaten kabul edildiğinde adaylar üzerinde oluşturduğu değişimle ölçülebilir. Bunun için sayıların anlamlı bir sırayla elenmesi, sonuçtaki kesinliğin gerekçesini görünür kılar.

Kayıt numarasının çıkarımla tek değere indirilmesi

İşlenen kural	Geçerli adaylara etkisi	Son durum
İki basamaklı, 5'in katı	10,15,20,...,95	18 aday
Son rakam 0 veya 5	Yeni eleme yok	18 aday
Çift sayı	10,20,30,40,50,60,70,80,90	9 aday
30'dan büyük	40,50,60,70,80,90	6 aday
Rakamların toplamı 9	Yalnız 90	1 aday

16. Bilgi eksikliğini sonuçtan ayırma ve belirsizliği ifade etme

Bir sayının 7 ile 20 arasında bulunduğu ve tek olduğu belirtilsin. Sınırlar dâhil ise 7, 9, 11, 13, 15, 17 ve 19 adayları vardır. “Sayı 13'tür” cümlesi mümkün ama zorunlu değildir. “Sayı 7 ile 19 arasındadır” cümlesinde sınırlar da dâhil edildiği açıkça ifade edilmedikçe yanlış yorum oluşabilir; güvenilir sonuç $7 \le x \le 19$'dur. Tüm uygun adayların bulunduğu en dar kapalı tam sayı aralığı böylece belirlenmiş olur.

Bütün adayların bilinmesi, her sayısal niceliğin tek bir değere indirgeneceği anlamına da gelmez. Bu örnekte x'in mümkün en küçük değeri 7, en büyük değeri 19 ve mümkün değer adedi 7'dir. “x'in değeri 13'tür” kesin olmasa da “x, 2'ye bölümünden 1 kalanını verir” kesindir. Eksik bilgi bulunan bir modelde yalnız eksikliği söylemek yerine kesinleşen ortak özellikleri ifade etmek daha güçlü bir sonuçtur.

> **Tek değer ve ortak özellik arasındaki fark** Uygun aday sayısı birden fazla olsa bile bazı özellikler tüm adaylarda ortak olabilir. Çıkarımın tek bir sayı üretmesi zorunlu değildir; kesin sonuç bir aralık, bir kalan, bir eşitsizlik veya değişmez özellik olabilir.

17. Tablo, ok şeması ve cebirsel gösterim arasında denetim

Verilen kural doğal dilde “Başlangıç sayısı iki ile çarpılır, sonuçtan beş çıkarılır” biçiminde ifade edilsin. Aynı kural cebirsel olarak $y=2x-5$ gösterimiyle, çizim üzerinde ise x → iki katı → beş eksiği → y akışıyla anlatılabilir. $x=8$ için $y=11$ olur. Ters denetimde $11+5=16$ ve $16/2=8$ elde edildiğinden başlangıç değeri doğrulanır.

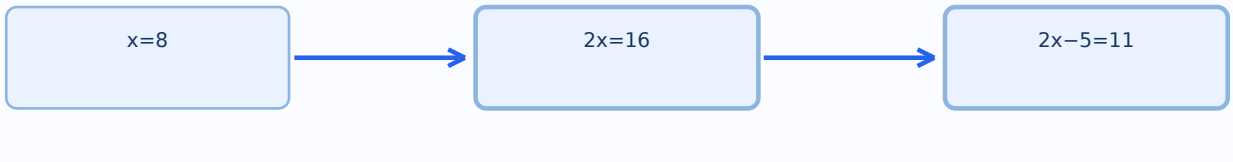
Şimdi “Sonuç en az 11 ise başlangıç en az 8'dir” çıkarımı incelensin. $y \geq 11$ ve $y=2x-5$ olduğundan $2x-5 \geq 11$, $2x \geq 16$ ve $x \geq 8$ bulunur. Bu bağıntının ters yönü de doğrudur: $x \geq 8$ ise $y=2x-5 \geq 11$ olur. Böylece iki koşul belirli tanım altında eşdeğer hâle gelir. Buradaki eşdeğerlik tek başına “başlangıç büyükse sonuç büyüktür” gözleminden değil, katsayının pozitif olduğu denklemden çıkarılmıştır.

$$y=2x-5 \Rightarrow [y \geq 11 \Leftrightarrow x \geq 8].$$

Anlamı: Doğrusal ve artan dönüşümde çıktı eşiği ile girdi eşiği iki yönde eşdeğer biçimde ifade edilebilir.

Koşullar: x,y gerçel sayıdır; y verilen kuralla tanımlıdır; katsayı $2>0$ olduğundan eşitsizlik yönü değişmez.

Konuya ait açıklayıcı şema



Ters: $11 \rightarrow 16 \rightarrow 8$

Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

18. Eksik, fazla ve tutarsız kurallarda geçerli çıkarımın sınırı

“x pozitif tam sayı, $x>6$” koşulları sonsuz sayıda değerle uyumludur. Bir sonuç olarak $x \geq 7$ kesinleşir, ancak x'in üst sınırı belirlenmez. “x çift” eklenirse mümkün en küçük değer 8 olur; yine de üst sınır bulunmaz. “$x<8$” koşulu da eklendiğinde hiçbir çift pozitif tam sayı aynı anda $x>6$ ve $x<8$ şartlarını sağlayamaz. Uygun çözüm bulunmaması, x'in belirli bir değere eşit olması anlamına gelmez.

Öte yandan “x hem çift hem ikiye kalansız bölünür” ifadeleri birbirini tekrar eder; biri diğerinin farklı söylenişidir. Tutarsız kural, gereksiz kural ve yetersiz kural ayrı nedenlerle farklı sonuç üretir. Güvenilir muhakeme önce kuralların birlikte gerçekleşebilirliğini değerlendirir, sonra zorunlu ortak özellikleri araştırır. Başlangıçta çelişki varsa sıradan aday listesi üzerinden kesin sonuç aramak yerine çelişkinin kendisi raporlanır.

19. Bütünleşik öğretici model: kurallardan tek sonuç ve ortak özellikler

Bir kurumun iç eğitim uygulamasına ilişkin tamamen temsili bir senaryoda, paket sayısı n pozitif tam sayı olsun. n sayısı 40'tan büyük, 70'ten küçük, dört ile tam bölünebilir ve üçe bölümünden 1 kalanını verir. Kuralların ardından toplam dört kişiye eşit sayıda paket dağıtıldığı ve her kişiye en az 10 paket düştüğü bilinsin. Bu son koşul aslında $n \geq 40$ sonucunu verir ve baştan verilmiş $n>40$ koşuluna göre ek daraltma yapmaz. Kurallardan zorunlu sonuç bu tekrarın fark edilmesiyle başlar.

$40<n<70$ aralığındaki dördün katları 44, 48, 52, 56, 60, 64 ve 68'dir. Üçe bölümden 1 kalanını verenleri 52 ve 64'tür; $52=3 \cdot 17+1$, $64=3 \cdot 21+1$. Bu nedenle n tek sayı olarak belirlenemez. Buna karşılık bütün uygun değerlerin çift, dördün katı ve en az 52 olması kesindir. Dört kişiye eşit dağıtımda kişi başına $52/4=13$ veya $64/4=16$ paket düşer. Dolayısıyla kişi başına en az 13 paket düşmesi zorunludur, fakat tam 13 paket düşmesi yalnızca mümkündür.

Şimdi ayrıca “paket sayısı 60'tan büyüktür” kuralı verilsin. 52 elenir ve $n=64$ tek uygun değer olur; kişi başına 16 paket düşer. Bu son kural bulunmadan 64 sonucunu zorunlu kabul etmek geçersizdi. Son hâlinde

bağımsız doğrulama yapılır: 40<64<70, 64 dörtle tam bölünür, 64=3·21+1, 64>60 ve dört kişiye eşit dağıtıldığında 16'şar paket düşer. Başlangıç koşullarının tamamı sağlanmıştır.

Kural eklenmesiyle mümkün ve zorunlu sonuçların değişimi

Kullanılan kurallar	Uygun n değerleri	Kişi başına paket	Kesinlik durumu
40<n<70; 4'e bölünebilir	44,48,52,56,60,64,68	11,12,13,14,15,16,17	Birden çok uygun değer
Ayrıca n, 3'e bölündüğünde kalan 1	52,64	13 veya 16	n tekleşmedi
Ayrıca her kişiye en az 10	52,64	13 veya 16	Yeni eleme yok
Ayrıca n>60	64	16	n ve kişi başına paket kesinleşti

20. Sayısal mantık modülünün çıkarım ilkeleri ve konu bütünlüğü

Sayısal dizilerin ve görsel ilişkilerin çözümünde bir adımın ardındaki kural araştırılır; özel işlemlerde sembolün tanımı korunur; koşullu muhakemede geçerli adaylar belirlenir; sıralama-yerleştirmede konum ve değer ilişkileri kullanılır. Bu son başlık, söz konusu araçların ortak temelini açık hâle getirir: Bir sonucu gerekçelendirmek, kuralların tamamını karşılayan bütün olasılıklar üzerinde o sonucun ne ölçüde geçerli olduğunu denetlemektir.

İyi tanımlanmış bir problemde önce sayı evreni, sonra açık kurallar ve ardından bu kurallardan çıkan sonuçlar belirlenir. Yalnız bir örnekte doğrulanan sonuç mümkün olabilir; tüm geçerli örneklerde doğrulanan ortak özellik ise zorunludur. Karşı örnek, gereksiz ek koşul, çelişki, geri dönüşün tek olmayışı ve sınır sözcüklerinin anlamı bu ayrımı etkileyen temel noktalardır. Bir çıkarımın kalitesi sonuç sayısının çokluğuyla değil, her sonucun gerekçesinin izlenebilir oluşuyla değerlendirilir.

Bu çerçeve, sonraki ana modülde tablo ve grafiklerdeki sayısal verilere uygulanacaktır. Bir tablodaki değerler, oranlar ve değişimler doğru okunurken de veriden zorunlu çıkan ilişki ile yalnızca makul görünen yorum birbirinden ayrılacaktır.

BÖLÜM 05

TABLO VE GRAFİK YORUMLAMA

KONU 5.1

TABLO OKUMA VE KARŞILAŞTIRMA

Bir veri tablosu, bilgileri satır ve sütunların kesişiminde belirli bir düzenle sunar. Tablo okuma, yalnızca görünen rakamları bulma işlemi değildir. Her sayının hangi gruba, döneme, ölçüye ve birime ait olduğunu belirlemeyi; iki veya daha fazla değeri aynı koşullar altında karşılaştırmayı; bu değerlerden hangi sonuçların gerçekten çıkarılabildiğini ayırt etmeyi gerektirir. Özellikle kamu sınavlarına hazırlıkta tabloyu doğru yorumlama, uzun açıklamalardan gerekli veriyi seçebilme ve yanlış karşılaştırmayı erken fark etme becerisiyle yakından ilişkilidir.

Bu bölümde bütün sayısal tablolar öğretim amacıyla oluşturulmuş temsili verilerdir; resmî istatistik veya gerçek bir kurumun çalışma sonuçları değildir. Önce tablonun yapısı okunacak, ardından mutlak sayılar, toplamlar, karşılaştırmalar ve veri sınırları incelenecektir. Sütun, çizgi ve daire grafiklerinin görsel okunuşu ile grafiklerde ayrıntılı yüzde problemleri sonraki konulara bırakılmıştır.

1. Tablonun başlığı, kapsamı ve ölçüm birimi

Bir tabloyu yorumlamadan önce başlık ve kapsam bilgisi incelenir. Başlık hangi olgunun izlendiğini; tarih aralığı gözlemin ne zaman yapıldığını; yer veya örneklem bilgisi ise tablonun kimler ya da neler hakkında konuştuğunu gösterir. “Üç aylık dosya işlem adetleri” başlıklı bir tablo, başlıkta belirtilmediği sürece bir yılın toplamını veya çalışanların verimliliğini doğrudan göstermez.

Sütun başlığında “adet”, “kişi”, “bin TL”, “saat”, “yüzde” veya “ortalama puan” yazabilir. Başlığı “bin TL” olan bir tabloda 85 değeri 85 TL değil 85.000 TL anlamına gelir. “Ortalama” niteliğindeki 85 ise 85 öğenin sayısı değil, ilgili grubun ortalama değeridir. Birimin veya ölçü türünün göz ardı edilmesi, sayısal olarak doğru görünse bile içerik bakımından yanlış sonuç doğurur. Tablonun altındaki veri notları da örneğin “yalnız tamamlanan işlemler”, “hafta sonu hariç” veya “yıl sonu itibarıyla” gibi sınırları belirleyebilir.

Tablodaki bilgi öğeleri ve yorumlama işlevleri

Öğesi	Gösterdiği bilgi	Doğru okuma için denetim
Başlık	Konu ve kapsam	Hangi olgu ölçülüyor?
Satır etiketi	Grup veya zaman	Bu satır hangi birime ait?
Sütun etiketi	Ölçü veya karşılaştırma boyutu	Sütunların anlamı aynı mı?
Hücre	Satır ve sütunun kesişimindeki değer	Adet mi, oran mı, ortalama mı?
Toplam alanı	Kapsanan değerlerin birleştirilmiş sonucu	Hangi satırlar ve sütunlar toplandı?
Açıklama notu	Eksik değer, birim, dönem ve yöntem	Karşılaştırmanın sınırları neler?

2. Satır ve sütun kesişimini doğru okuma

Satırlar grupları, sütunlar ise dönemleri gösterebilir. Aşağıdaki tamamen temsili tabloda A, B ve C birimlerinin Ocak, Şubat ve Mart aylarında tamamladıkları işlem adetleri verilmiştir. “B biriminin şubat ayı” ifadesi B satırının Şubat sütunuyla kesiştiği 110 hücresini belirtir. Aynı satırda yer alan 90 ve 100 ise B biriminin başka aylardaki işlem adetleridir; aynı sütunda yer alan 135 ve 80 ise diğer birimlerin şubat ayı değerleridir.

Üç birimin üç aylık tamamlanan işlem sayısı — temsili veri, birim: işlem adedi

Birim	Ocak	Şubat	Mart	Üç aylık toplam
A	120	135	150	405
B	90	110	100	300
C	60	80	90	230
Sütun toplamı	270	325	340	935

Tablodaki 150 değeri yalnız A biriminin mart ayına aittir; üç aylık sonuç değildir. A'nın üç aylık toplamı 120+135+150=405'tir. Şubat sütununda 135+110+80=325 bulunur. Buradaki satır ve sütun düzeni, hangi değerlerin aynı dönem ve hangi değerlerin aynı birim içinde karşılaştırılabileceğini açık kılar. Birimlerin üç aylık toplamları, dönemler eşit uzunlukta ve aynı sayım yöntemini kullanmışsa doğrudan işlem sayısı bakımından karşılaştırılabilir.

3. Satır toplamı, sütun toplamı ve genel toplamın ayrımı

Satır toplamı, bir grubun seçilen bütün dönemlerdeki değerlerini; sütun toplamı, bir dönemde bütün grupların değerlerini birleştirir. A biriminin toplamı 405, Ocak ayının toplamı 270'tir. Genel toplam ise aynı kayıtların tüm satır ve sütunlara göre toplandığı 935 işlemden oluşur. Genel toplamı hem satır toplamlarını hem sütun toplamlarını bir araya getirerek yeniden toplamak yanlış olur; çünkü aynı işlem iki kez sayılmış olur.

$$G = \Sigma(\text{satır toplamları}) = \Sigma(\text{sütun toplamları})$$

Anlamı: Aynı gözlem kümesinin birbirini dışlayan ve tamamını kapsayan gruplarla oluşturulmuş iki yönlü tablosunun genel toplamı.

Koşullar: Her gözlem her boyutta tam bir hücreye ait olmalı, gruplar örtüşmemeli, eksik veya mükerrer kayıt bulunmamalıdır; hücrelerde toplanabilir aynı birimli adetler yer almalıdır.

Örnekte satır toplamlarından 405+300+230=935; sütun toplamlarından 270+325+340=935 bulunur. İki hesap aynı sonuca ulaşır. Şimdi B biriminin mart değeri yanlışlıkla 101 kaydedilirse, satır ve sütun toplamları da tutarlı biçimde yeniden hesaplandığında her iki yönde 936 elde edilebilir. Dolayısıyla toplamların eşit olması gerekli bir yapısal denetimdir, ancak hücre değerlerinin gerçeği yansıttığını tek başına kanıtlamaz.

4. Yatay karşılaştırma ve zaman içindeki değişim

Aynı satırdaki değerleri karşılaştırma, o satırın temsil ettiği birimin dönemler arasında nasıl değiştiğini gösterir. A biriminin işlemleri Ocak'ta 120, Şubat'ta 135, Mart'ta 150'dir. Ocak–Şubat artışı 15, Şubat–Mart artışı da 15 işlem olduğundan iki aylık artışlar mutlak sayı bakımından eşittir. Ocak–Mart farkı 150−120=30 işlemdir. A biriminin üç aylık toplamı ile iki ay arasındaki artışı birbirine karıştırmamak gerekir: 405 toplam işlem, 30 ise iki uç ayın sonuçları arasındaki farktır.

B birimi 90'dan 110'a çıkmış, ardından 100'e düşmüştür. Dolayısıyla “B birimi her ay artmıştır” yorumu yanlış, “B'nin mart değeri ocak değerinden 10 fazladır” yorumu doğrudur. C birimi ise 60→80→90 şeklinde

yükselmiştir; dönemler arasındaki artışlar sırasıyla 20 ve 10'dur. “Artış devam etti” ifadesi, “artış miktarı her dönem aynı kaldı” anlamına gelmez.

> Mutlak değişim = Son dönem değeri − İlk dönem değeri
>
> **Anlamı:** Aynı ölçünün iki dönem arasındaki işaretli farkı; pozitif değer artışı, negatif değer azalışı, sıfır değişmemeyi gösterir.
>
> **Koşullar:** İki veri aynı birimde, karşılaştırılabilir kapsamda ve aynı ölçüm tanımıyla tutulmalıdır. Oransal değişim bu farktan farklıdır; yüzde değişim için başlangıç değeri ayrıca gerekir.

Temsili işlem tablosunda Ocak–Mart mutlak değişimleri

Birim	Ocak adedi	Mart adedi	Mart eksi Ocak	Yorum
A	120	150	+30	Artış
B	90	100	+10	Artış
C	60	90	+30	Artış
Toplam	270	340	+70	Tüm birimlerde toplam artış

5. Dikey karşılaştırma ve aynı dönemin grupları

Aynı sütundaki hücreler, aynı dönemdeki farklı birimlerin değerlerini gösterir. Mart ayında A 150, B 100, C 90 işlem tamamlamıştır; dolayısıyla martta en yüksek işlem sayısı A'dadır. B ile C arasındaki mart farkı 100−90=10 işlemdir. Ocak ayında ise A ile C arasındaki fark 120−60=60'tır. Aynı iki grubun zaman içinde aralarındaki farkının değişmiş olması, gruplardan birinin mutlaka gerilediği anlamına gelmez: A ve C'nin işlem sayıları artarken aralarındaki fark şubat ayında 55, mart ayında 60 olmuştur.

Bir ay içindeki toplam değer, o ayda tek bir birimin en yüksek değerinden farklıdır. Mart toplamı 340, en yüksek birim değeri 150'dir. Ayrıca A'nın marttaki 150 işlemi, tüm birimlerin ocak ayındaki 270 işlemine göre daha küçüktür; fakat bu karşılaştırma bir birim–bir ay değeriyle bütün birimler–bir ay toplamını kıyaslar. Matematiksel karşılaştırma yapılabilir, ancak karşılaştırılan kapsamlar farklı olduğundan yorum açıkça belirtilmelidir.

6. En yüksek, en düşük ve eşit değerin bağlama göre değişmesi

“En yüksek değer” denirken hangi satırların, sütunların veya toplamların aday olduğu belirlenmelidir. Önceki tabloda tek bir hücre bakımından en büyük sayı A'nın mart ayındaki 150 işlemidir. Üç aylık satır toplamlarında en büyük sayı A'nın 405 işlemidir. Sütun toplamlarının en büyüğü Mart ayına ait 340 işlemdir. Bu üç ayrı büyüklükten yalnızca birini seçip “tablonun en yüksek sonucu” demek bağlam belirtilmedikçe belirsizdir.

En düşük hücre C'nin ocak ayındaki 60 işlemidir. Üç aylık satır toplamlarının en düşüğü ise C'nin 230 işlemidir. Bir dönemin toplamı bir başka döneminkine eşitse iki dönem “birinciliği paylaşabilir”; eşit değerleri tek bir en büyük değer olarak saymak sayısal sonucu değiştirmez ama en yüksek değere sahip grup sayısını değiştirir. Sıralama yapılırken eşitliklerin nasıl ele alındığı açık kalmalıdır.

7. Mutlak fark ile göreli farkın farklı sonuç vermesi

İki grupta eşit mutlak artış olması, iki grubun aynı oranda büyüdüğünü göstermez. A birimi 120'den 150'ye, C birimi 60'tan 90'a yükselmiştir; ikisinin de artışı 30 işlemdir. Fakat A başlangıçtaki 120 işlemine göre 30/120=1/4, yani %25 büyürken C başlangıçtaki 60 işlemine göre 30/60=1/2, yani %50 büyümüştür. Bu temel ayrım, tabloyu doğru okumak için gerekli olmakla birlikte yüzde hesabının daha kapsamlı uygulamaları GY-05.03 konusuna bırakılmıştır.

Bir karşılaştırmanın paydası başlangıç yılı, toplam kişi sayısı veya seçilen alt grubun büyüklüğü olabilir. Bu nedenle “C'nin artışı daha yüksektir” cümlesi mutlak artış için doğru değildir; göreli artış için doğrudur. Önce hangi büyüklüğün karşılaştırıldığı ifade edilmelidir.

> Göreli değişim = (Son değer − İlk değer) / İlk değer; yüzde değişim = Göreli değişim × 100
>
> **Anlamı:** İki dönem arasındaki mutlak farkın ilk dönem değerine göre büyüklüğü.
>
> **Koşullar:** Başlangıç değeri sıfır olmamalı ve karşılaştırılabilir iki ölçüm bulunmalıdır. Başlangıç sıfırsa bu formülle yüzde değişim hesaplanamaz.

8. İki yönlü sıklık tablosunda ortak hücrelerin okunması

İki yönlü bir sıklık tablosu, gözlemleri iki özelliğe göre sınıflandırır. Aşağıdaki temsili tabloda katılımcılar üç oturuma ve iki kayıt türüne göre ayrılmıştır. Her kişinin yalnız bir oturuma ve yalnız bir kayıt türüne ait olduğu varsayılmıştır. A oturumundaki birinci tür kayıt 24, ikinci tür kayıt 36'dır; A oturumunun toplamı 60 kişidir. B'de 30+20=50, C'de 18+22=40 kişi bulunur. Kayıt türlerine göre sütun toplamları sırasıyla 72 ve 78, bütün katılımcılar 150 kişidir.

Temsili eğitim oturumlarında kayıt türüne göre kişi sayıları

Oturum	Tür 1	Tür 2	Oturum toplamı
A	24	36	60
B	30	20	50
C	18	22	40
Genel toplam	72	78	150

“A oturumunda Tür 1 kayıt sayısı” 24, “Tür 1 kayıtların bütün oturumlardaki sayısı” 72'dir. “B oturumundaki toplam kayıt” ise 50'dir. Bunlar birbirinden farklı kümelere aittir. B'deki Tür 1 sayısının A'dakinden fazla olduğu, 30>24 karşılaştırmasıyla kesinleşir. Ancak oturumların tüm kişi sayıları farklı olduğundan, sadece bu mutlak sayılara bakılarak B'nin kendi içinde aynı türün daha büyük paya sahip olduğu yorumu kurulmaz; bunun için uygun payda kullanılır.

9. Satır içi pay ve genel toplam içindeki pay

Önceki tabloda A oturumunun 60 kişisinin 24'ü Tür 1 kayıttır. A içindeki pay 24/60=%40'tır. B oturumunda aynı türün payı 30/50=%60, C oturumunda 18/40=%45 olur. Buna karşılık bütün oturumlardaki Tür 1 payı 72/150=%48'dir. B oturumunun kişi sayısı en büyük değildir; ancak kendi içindeki Tür 1 oranı en yüksektir. “En yüksek oran” ile “en büyük toplam” ifadeleri bu nedenle farklı olabilir.

Ayrıca “Tür 1 kayıtlar arasında B oturumuna katılanların payı” 30/72≈%41,67'dir. Bu değer “B oturumunda Tür 1 payı” olan %60 ile aynı değildir. İlkinde payda yalnız Tür 1 kayıtların toplamı, ikincisinde yalnız B

oturumuna katılanların toplamıdır. İki yorumda da pay 30 kişi olsa bile sorulan evren değiştiği için yüzdeler değişir.

> Satır içi pay = İlgili hücre / Satır toplamı; sütun içi pay = İlgili hücre / Sütun toplamı; genel pay = İlgili hücre / Genel toplam
>
> **Anlamı:** Aynı hücre sayısının farklı karşılaştırma evrenlerine göre payı.
>
> **Koşullar:** Payda sıfır olmamalıdır; satır, sütun ve genel toplamlar birbiriyle tutarlı, gözlemler mükerrer olmayan adetsel verilerdir.

Tür 1 kayıt oranı, payda seçimine göre

İncelenen ifade	Pay	Payda	Sonuç
A oturumunda Tür 1 payı	24	60	%40
B oturumunda Tür 1 payı	30	50	%60
C oturumunda Tür 1 payı	18	40	%45
Tüm katılımcılar içinde Tür 1 payı	72	150	%48
Tür 1 kayıtlar arasında B'nin payı	30	72	Yaklaşık %41,67

10. Toplam, ortalama, oran ve birim başına değerin karıştırılmaması

Tablonun hücreleri her zaman doğrudan toplama elverişli olmayabilir. Bir işletmenin üç farklı günündeki “işlem adedi” sütunundaki 20, 35 ve 45 değerleri toplanarak 100 işlem elde edilir. Aynı günlerin “işlem başına ortalama süre” değerleri 4, 6 ve 8 dakika ise bu üç süreyi toplayıp 18 dakika bulmak, toplam işlem süresini vermez; yalnız günlük ortalamaların aritmetik toplamını verir ve bu da çoğu zaman anlamlı bir raporlama ölçüsü değildir.

İlk gün 20 işlem ve işlem başına 4 dakika varsa o gün 80 dakika; ikinci gün 35 işlem ve işlem başına 6 dakika varsa 210 dakika; üçüncü gün 45 işlem ve işlem başına 8 dakika varsa 360 dakika işlem süresi oluşur. Tüm işlemlerin toplam süresi 80+210+360=650 dakika, 100 işlem başına genel ortalama 650/100=6,5 dakikadır. Günlük üç ortalamanın basit aritmetik ortalaması (4+6+8)/3=6 dakika olur; bu, günlerde işlem sayıları eşit olmadığı için genel işlem ortalamasını göstermez.

> Genel ağırlıklı ortalama = Σ(grup adedi × grup ortalaması) / Σ(grup adedi)
>
> **Anlamı:** Farklı büyüklükteki grupların bütün gözlemlerini bir araya getiren ortalama.
>
> **Koşullar:** Grup adetleri negatif olmayan sayılar, toplam grup adedi pozitif olmalı; grup ortalamaları aynı ölçüyü ve birimi göstermelidir.

İşlem sayısına göre ağırlıklı ortalama — temsili veri

Gün	İşlem adedi	İşlem başına ortalama dakika	Toplam işlem süresi (dk)
1	20	4	80
2	35	6	210
3	45	8	360
Toplam / genel ortalama	100	6,5	650

11. Ölçek ve yazılı birim: bin, milyon ve ondalık değerler

Başlığı “bin adet” olan bir tabloda 2,4 değeri 2,4 adet değil 2.400 adet olarak okunur. Ondalık ayıracı Türkçe gösterimde virgül olduğundan 2,4 ile 2.400 aynı rakam dizisi değildir. “2.400 adet” ifadesi iki bin dört yüz adettir; “2,4 bin adet” ifadesi de aynı niceliği anlatır. Ancak “2,4 adet” çoğu sayılabilir nesne için bir kesirli miktar ifade edeceğinden kayıt kapsamı ayrıca sorgulanmalıdır.

Örneğin iki yılın enerji kullanım tablosunda değerlerin 3,2 ve 3,8 “bin kWh” olduğu yazıyorsa fark 0,6 bin kWh, yani 600 kWh olur. “0,6 kWh artış” yorumu ölçeği bin kat küçültür. Farklı satırlardaki TL, saat ve kişi sütunlarını ortak bir nicelikmiş gibi toplamak da matematiksel işlemin anlamsızlaşmasına neden olur. Aynı tabloda farklı birimler bulunabilir; satır toplamı ancak birimce uyumlu hücreler için kurulmalıdır.

> **Sayım birimi ile gösterim ölçeği** “Bin kişi”, “milyon TL” ve “saat” gibi ifadeler veri sütununun gerçek ölçeğini belirler. Ondalık virgülü ile binlik ayıracı yer değiştirilmez. Farklı birimlerdeki nicelikler doğrudan toplama ve büyüklük karşılaştırmasına elverişli değildir.

12. Dönem uzunluğu ve kapsam eşitliği

Bir tabloda birim X'in dört haftada 400, birim Y'nin beş haftada 450 işlem tamamladığı yazsın. Mutlak toplam bakımından Y'nin 450 işlemi X'in 400 işleminden yüksektir. Buna karşılık haftalık ortalamalar X için 400/4=100, Y için 450/5=90 işlemdir. Haftalık üretim düzeyinde X daha yüksektir. Bu karşılaştırma iki ölçüyü birbirine karıştırmadan kurulabilir: Toplamda Y, eşit süre başına hesapta X öndedir.

Dönem uzunlukları aynı olduğunda bile diğer koşullar, örneğin iş yükü, personel sayısı ve görevlerin niteliği değişebilir. Sadece sonuç sayılarına bakılarak “X daha verimlidir” biçiminde neden-sonuç içeren yargıya varmak için daha fazla veri gerekir. “Bir işleme ayrılan ortalama dakika”, “personel başına günlük işlem” ve “toplam işlem” birbirinden ayrı ölçütlerdir; biri diğerinin yerine geçmez.

Farklı sürelerde toplanan işlem adetlerini eşit süreye dönüştürme

Birim	Toplam işlem	Gözlem süresi	Haftalık ortalama
X	400	4 hafta	100 işlem/hafta
Y	450	5 hafta	90 işlem/hafta

13. Eksik hücre, sıfır değer ve uygulanamaz ölçü

Tabloda bir hücreye “0” yazılması o ölçünün ilgili dönemde sıfır olarak kaydedildiğini belirtir. Hücrenin boş bırakılması, “—” işareti veya “veri yok” açıklaması farklı anlamlara gelebilir: Ölçüm yapılmamış, kayıt yayımlanmamış, veri bilinmiyor veya ilgili ölçü bu gruba uygulanamıyor olabilir. Bunlar otomatik olarak sıfır sayılamaz. Tablonun açıklama notu bu işaretlerin nasıl yorumlanacağını belirler.

Örneğin üç grupta 18, 0 ve “bilinmiyor” değeri varsa bilinen işlem toplamı 18'dir; bütün grupların toplamı kesin olarak 18 diye verilemez. Son grup sayısı bilinmediği ve sayım negatif olamayacağı için gerçek toplam en az 18 olabilir. Eksik hücreyi sıfır yaparak toplamak, gerçek değerin sıfır olduğunu varsaymak anlamına gelir ve veriden çıkmayan bir bilgi üretir.

Tabloda veri yokluğu ve sıfırın ayrımı

Hücre gösterimi	Kesin ifade	Belirli olmayan bilgi
0	Ölçülen değer sıfır	Ölçümün nedeni
Boş hücre	Değer kaydedilmemiş ya da açıklanmamış olabilir	Gerçek değer
“—”	Açıklamaya bağlı gösterim	Sıfır mı, uygulanamaz mı, bilinmiyor mu?
Bilinmiyor	Değer henüz belirlenemiyor	Sayısal sonuç

14. Kümülatif tablo ile dönemlik tabloyu ayırma

Bir tablonun satırları her dönemdeki yeni işlem sayısını değil, o tarihe kadar birikmiş toplamı gösterebilir. Örneğin ocak sonu kümülatif işlem 40, şubat sonu 95, mart sonu 165 olsun. Bunlar dönemlik adetsel veriler değildir: Ocak içinde 40, Şubat içinde 95−40=55, Mart içinde 165−95=70 yeni işlem tamamlanmıştır. Ocak, şubat ve mart sonu kümülatif toplamlarını 40+95+165 diye toplamak aynı ilk işlemleri birden fazla kez sayar.

Birikimli değerler negatif olmayan yeni işlem eklenerek artıyorsa dönem sonu kümülatif toplam, önceki dönem sonundan küçük olamaz. Ancak iadeler, düzeltmeler veya silinen kayıtlar gibi nedenlerle kümülatif gösterim gerileyebilir; böyle bir tabloda azalışın nedenini anlamak için açıklama gerekir. “Kümülatif” etiketinin okunması, toplam ve değişim hesabının ilk şartıdır.

$$\text{Dönemlik yeni değer}(t) = \text{Kümülatif toplam}(t) - \text{Kümülatif toplam}(t-1)$$

Anlamı: Birikimli iki dönem sonu gözlemi arasında sisteme eklenen net miktar.

Koşullar: Her iki kümülatif toplam aynı kapsam ve ölçü tanımında olmalı; silme/düzeltme varsa fark net değişimi gösterir, zorunlu olarak yalnız yeni işlem adedini göstermez.

Birikimli değerlerin dönem içi artışa çevrilmesi — temsili veri

Dönem sonu	Kümülatif toplam	Dönem içindeki yeni işlem	Denetim
Ocak	40	40	Başlangıç kümülatif sıfır kabul edildi
Şubat	95	55	95−40
Mart	165	70	165−95
Üç aylık toplam	165	165	40+55+70

15. Sıralama, eşitlik ve toplamdan bağımsız değerlendirme

Tablonun görünen değerleri bir sıralama üretmek için kullanılabilir; ancak sıralamanın hangi ölçüye göre yapıldığı açıklanmalıdır. Örneğin dört çalışma grubunun tamamladığı iş adetleri 52, 64, 64 ve 48 olsun. En büyük işlem sayısı 64'tür ve iki grupta aynı anda görülür. “En yüksek değere sahip tek grup vardır” çıkarımı yanlıştır. Büyükten küçüğe değer sıralaması 64, 64, 52, 48 olarak yazılabilir; fakat ikinci sıraya hangi eşit grubun yerleştirildiği veri tarafından belirlenmez.

İş miktarları farklı gruplardan oluşan tablonun toplamı 52+64+64+48=228'dir. En yüksek iki grubun toplamı 128, kalan iki grubun toplamı 100'dür; aralarında 28 işlem fark bulunur. Bu sonuçlar doğrudan hücrelerin toplamından elde edilir. Fakat hangi grubun hangi hızla çalıştığı veya kaç personelle bunu başardığı bu tablodan çıkmaz. Sıralamanın doğruluğu, ölçü kapsamına bağlıdır.

16. Bağımsız doğrulama, çapraz toplam ve veri bütünlüğü

Bir iki yönlü tablodaki satır toplamlarıyla sütun toplamlarının eşit çıkması, aritmetik tutarlılık denetiminin ilk adımıdır. Temsili 150 kişilik oturum tablosunda satır toplamlarından 60+50+40=150; sütun toplamlarından 72+78=150 elde edilir. Hücrelerden tek tek hesaplanırsa 24+36+30+20+18+22=150 bulunur. Üç farklı toplama yolu aynı toplamı verir. Bu denetim bir verinin başka satıra yanlış yerleştirilmesini her zaman yakalayamayabilir: Her iki toplam tutarlı biçimde değiştirilirse tablo hâlâ dengeli görünür.

Toplamlarda uyuşmazlık varsa önce eksik satır veya sütun, çift sayılmış kayıt, yanlış birim ve yuvarlama olasılıkları incelenir. Sütunlardan biri yüzde oranlarını, diğeri kişi sayılarını veriyorsa bunların toplamının eşit çıkması zaten beklenmez. Bağımsız kontrol, yalnız işlem tekrarından değil, tablonun kavramsal yapısının doğru kurulmasından da oluşur.

Konuya ait açıklayıcı şema

	Tür 1	Tür 2	Satır toplamı
A	a_1	a_2	60
B	b_1	b_2	50
C	c_1	c_2	40

Sütun toplamı: 72 + 78 = 150

Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

17. Tabloya dayanmayan yorumun ve nedensellik iddiasının sınırı

Bir tablodaki iki grubun verileri birbirinden farklıysa bu fark, koşullarının veya nedenlerinin de tablodan zorunlu olarak bilindiği anlamına gelmez. Oturum B'de Tür 1 kaydı 30, A'da 24 kişidir. Bu farkı “B oturumu daha uygun saatte yapıldı” diye açıklamak veriyle desteklenmeyen bir varsayımdır; saat bilgisi ve nedensel bir araştırma yoktur. Aynı şekilde yıl içindeki işlem artışı, personel sayısının arttığını veya çalışanların daha hızlı olduğunu tek başına kanıtlamaz.

Bir örneklemde görülen oran, örneklemin nasıl seçildiği bilinmeden bütün nüfusa kesin olarak aktarılmaz. Temsili oturum tablosunda Tür 1 oranı %48'dir. Bu yalnız tabloda yer alan 150 kişi için hesaplanmıştır; bütün bir ilin, bir kurumun veya ülkenin aynı orana sahip olduğu anlamına gelmez. Verinin kapsadığı gözlem evreniyle yorumun kapsamı aynı tutulmalıdır.

Verinin gösterdiği ile veriden tahmin edilen Bir hücrenin adedi, doğru toplam ve koşulu açık bir oran tabloyla desteklenebilir. Verilmemiş neden, motivasyon, kalite veya bütün nüfus hakkında kesin hüküm, yalnız bu sayılardan zorunlu olarak çıkmaz. Birlikte değişim de tek başına neden-sonuç kanıtı değildir.

18. Bütünleşik öğretici örnek: tabloyu baştan sona denetleme

Son olarak ilk temsili işlem tablosu üzerinden bütün aşamalar birlikte değerlendirilsin. A, B ve C birimlerinin ocak-mart verilerinin birinci toplamı satırlardan 405+300+230=935 işlemdir. Bağımsız biçimde ocakta 120+90+60=270, şubatta 135+110+80=325, martta 150+100+90=340 bulunur; bu üç değer de 270+325+340=935'tir. Genel toplamın iki ayrı yoldan aynı bulunması tablo içi denetimi sağlar.

A birimi üç ayın her birinde diğer iki birimden daha yüksek işlem tamamlamıştır; bu, her ay sütunundaki A değerinin B ve C'yi aşmasıyla görülür. Bununla birlikte mart ayında A'nın 150 işlemi, aynı ayın genel toplamı olan 340 işlemin tamamı değildir. Şubat ayının bütün birimler toplamı 325 iken martın toplamı 340 olduğundan son ay önceki aydan 15 işlem fazladır. Ocaktan marta genel toplam artışı ise 340−270=70 işlemdir. Bu iki fark iki farklı dönem çifti için hesaplanmıştır.

B biriminin üç aylık toplamı 300 iken C'nin 230'dur; B toplamda 70 işlem daha fazladır. Buna karşılık Ocak–Mart mutlak değişim B'de 100−90=10, C'de 90−60=30 işlemdir. Dolayısıyla “B'nin toplam işlem sayısı daha fazladır” doğru olsa da “B'nin dönem uçları arasındaki artışı daha fazladır” yanlıştır. Hangi sonucun kesin olduğu ilgili sütunları karşılaştırarak belirlenir. Ayrıca A'nın üç aylık 405 işlemi toplam 935'in bir bölümüdür; A'nın toplam içindeki payını hesaplamak gerekirse 405/935≈%43,32 elde edilir. Bu yüzde A'nın herhangi tek bir ayının payını değil, bütün dönemler boyunca kaydedilen toplam işlemlerdeki payını gösterir.

Bütünleşik temsili tabloda farklı karşılaştırma ölçütleri

Karşılaştırılan özellik	A	B	C	Dikkat edilmesi gereken
Üç aylık toplam	405	300	230	Satır toplamlarıdır
Mart işlem adedi	150	100	90	Tek dönem sütunudur
Ocak–Mart mutlak değişimi	+30	+10	+30	Toplam değil iki uç ay farkıdır
Ocak–Mart göreli değişimi	%25	Yaklaşık %11,11	%50	Başlangıç dönemine göre

Tablo yorumlamada sağlam yöntem, önce başlık ve birimi, sonra karşılaştırılacak grubun ve dönemin kapsamını, ardından doğru hücreleri seçmektir. Gerekiyorsa aynı birim altında fark, toplam ve pay hesaplanır; sonuç, başka bir yoldan yeniden kontrol edilir. Doğrudan görülen veriyle ek varsayım gerektiren yorum ayrı tutulur. Sonraki başlıkta bu sayısal ilişkilerin sütun, çizgi ve daire grafikleri üzerindeki görsel karşılıkları ele alınacaktır.

KONU 5.2

SÜTUN, ÇİZGİ VE DAİRE GRAFİKLERİ

Bir tablonun sayıları, grafikte uzunluk, konum veya alan olarak temsil edildiğinde karşılaştırmalar daha hızlı görülebilir. Fakat grafik, yalnızca tablonun süslenmiş biçimi değildir: Eksenin başlangıcı, işaretlerin ölçeği, seçilen zaman aralığı ve verilerin hangi bütüne ait olduğu yorumu doğrudan etkiler. Aynı sayılar doğru

hazırlanmış bir sütun grafiğinde gruplar arası büyüklükleri, çizgi grafiğinde zaman içindeki hareketi, daire grafiğinde ise bütünün parçalarını öne çıkarabilir. Bu nedenle grafik türünü tanımak, görselin hangi matematiksel bilgiyi koruduğunu açıklamakla başlar.

Bu bölümdeki bütün sayılar öğretim amacıyla oluşturulmuş temsili verilerdir; herhangi bir kamu kurumunun gerçek işlem, personel, üretim veya harcama istatistiği olarak değerlendirilmemelidir. Grafikler PDF dizgisinde daha sonra çizilebilsin diye veri ve eksen tanımları metinde eksiksiz verilir. Burada henüz grafik görseli bulunmasa da anlatımdaki değerler ve karşılaştırmalar tablolardan bağımsız biçimde izlenebilir.

1. Grafiğin beş temel bileşeni

Bir grafiğin güvenilir biçimde okunması için önce başlığı, veri kapsamını, yatay ve düşey eksenleri, birimi ve açıklama anahtarını birlikte incelemek gerekir. Başlık, temsil edilen niceliğin ne olduğunu; kapsam, hangi gözlemlerin hangi tarih aralığında yer aldığını gösterir. Bir eksen çoğunlukla grup veya zaman etiketlerini, diğer eksen sayısal değeri belirtir. Birim ise görülen 40 sayısının 40 kişi mi, 40 bin TL mi yoksa 40 kWh mı olduğunu belirler. Birden fazla seri varsa renk ve desenlerin anlamı ayrıca açıklanmalıdır.

Örneğin “Dört Ayın Başvuru Sayısı — Temsili Veri” başlığını taşıyan bir grafikte yatay eksende ocak, şubat, mart, nisan; düşey eksende “başvuru adedi” yer alsın. Bu gösterimde 36, 48, 42 ve 54 değerleri dört ayın başvuru miktarlarıdır. Grafiğin üzerindeki 54 değerini “54 bin başvuru” diye okumak, düşey eksende binlik ölçek belirtilmemişse yanlıştır. Veri etiketlerinin bir kısmı saklanmış olsa bile ana eksenlerin ve aralıkların açıkça tanımlanması gerekir.

Dört aylık temsili başvuru verisi ve grafik için temel bilgiler

Ay	Başvuru (adet)	Düşey eksendeki karşılık	Açıklama
Ocak	36	36	Başlangıç gözlemi
Şubat	48	48	En yüksek ikinci değer
Mart	42	42	Şubattan düşük
Nisan	54	54	Dört ayın en yüksek değeri

2. Sütun grafiğinin temsil ettiği büyüklük

Sütun grafiğinde bir kategorinin sayısal değeri, ortak bir başlangıç çizgisinden yükselen sütunun yüksekliğiyle gösterilir. Sütunların genişliği genellikle veri büyüklüğü anlamına gelmez. Kategoriler aynı ölçekte ve eşit referans çizgisiyle gösterildiğinde yüksek sütun büyük değeri temsil eder. Yukarıdaki dört aylık temsili veride ocak 36, şubat 48, mart 42, nisan 54 birim yüksekliğindedir. Nisan en yüksek, ocak en düşüktür. Nisan ve ocak arasında 54−36=18 başvuru farkı vardır.

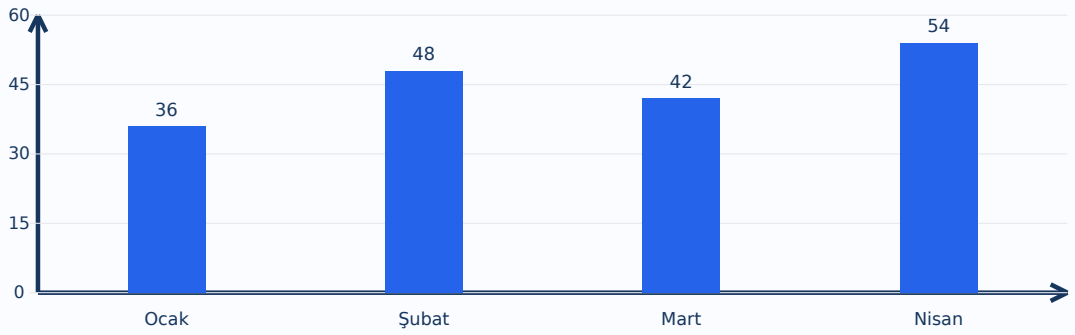
Sütun grafiği özellikle farklı kategori, bölüm veya ayrı zaman dönemi toplamlarının karşılaştırılmasında kullanışlıdır. Sıra hâlinde verildiğinde ayların zamansal sırası korunur, ancak kategoriler arasında çizgiyle sürekli değişim olduğu varsayılmaz. Bu nedenle şubat ile mart arasındaki görünür boşlukta bir ara ay gözlemi yoktur. Başvuru sayıları yalnız ay sonunda ölçülen birikimli toplam değil, her ayın kendi adetleriyse dört sütunun toplamı 36+48+42+54=180 başvurudur. Ay sonu kümülatif değerler olsaydı bu toplamın anlamı değişirdi.

$$H = (v - b)/k$$

Anlamı: Düşey ekseni b değerinden başlayan ve her grafik birimi k gerçek sayısal birime karşılık gelen çizimde v verisinin başlangıç çizgisinden itibaren gösterim yüksekliği H.

Koşullar: k>0; eksen doğrusal ve düzenli aralıklıdır. Bu gösterim, veri ile ekrandaki uzunluk arasında ölçek bağlantısı kurar. Sütun için eksenin sıfırdan başlatılması oranların görsel dürüstlüğü bakımından tercih edilir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

3. Eksen aralığı ve yanıltıcı sütun yüksekliği

Eksen sıfırdan başlamadığında sütunların görünen boyu, gerçek değerler arasındaki oranı olduğundan büyük gösterebilir. Temsili iki birimde tamamlanan işlem sayıları A için 80, B için 100 olsun. Sıfır başlangıçlı ortak eksende B sütununun yüksekliği A'nın 100/80=1,25 katıdır. Düşey eksen 70'ten başlatıldığında ekranda görünen yükselmeler A için 10, B için 30 birimdir. Görsel uzunluk oranı 30/10=3 olur; ancak gerçek işlem oranı değişmemiştir.

Bu tür kesilmiş eksen, bazı bağlamlarda küçük farkı incelemek için açıkça işaretlenebilir. Ne var ki sütun uzunluğunun sıfırdan itibaren toplam miktarı temsil ettiği görsel alışkanlığı nedeniyle eksen kırığı görünür ve açıklayıcı olmalıdır. Eksenin 70'ten başladığı saklanırsa okuyucu B'nin gerçek miktarının A'nın üç katı olduğunu zannedebilir. Gerçekte fark 100−80=20 işlem, oran ise 1,25'tir. Çizgi grafiğinde de kırpılmış ölçek dalgalanmayı görsel olarak büyütür; fakat çizgi grafiğinde sütunların toplam yüksekliği gibi doğrudan bir büyüklük kodlaması bulunmadığından değerlendirme biraz farklıdır.

Aynı iki veri, farklı eksen başlangıcında

Birim	Gerçek adet	Sıfır başlangıçlı görünür yükseklik	Eksen 70'ten başlarsa görünür yükseklik
A	80	80	10
B	100	100	30

4. Düşey ve yatay sütun gösterimleri

Sütunların yatay yerine dikey düzenlenmesi niceliğin matematiksel anlamını değiştirmez. Dikey sütunda kategori etiketi çoğunlukla yatay eksende, değer düşey eksendedir. Yatay çubukta ise kategori adı düşey eksende sıralanır; değeri gösteren uzunluk soldan sağa doğru uzanır. Uzun kategori isimleri için yatay çubuk daha okunaklıdır. Örneğin “Teknik Destek”, “Bilgi İşlem” ve “Evrak İşlemleri” gibi uzun etiketler için yatay gösterim tercih edilebilir.

İki grafik eş ölçeği kullanıyorsa birimlerin sıralaması ve farkları aynı kalmalıdır. Ancak yatay bir çizimde üstten alta kategori sırası değiştirilmiş olabilir. Birinci görünen çubuğun her zaman en yüksek değer olduğunu kabul etmek doğru değildir; sıralama alfabetik, kronolojik veya büyükten küçüğe olabilir. Sıralama grafiğin düzenleme kararıdır, verinin ek bir matematiksel özelliği değildir.

5. Kümeli sütun grafiği ve yan yana karşılaştırma

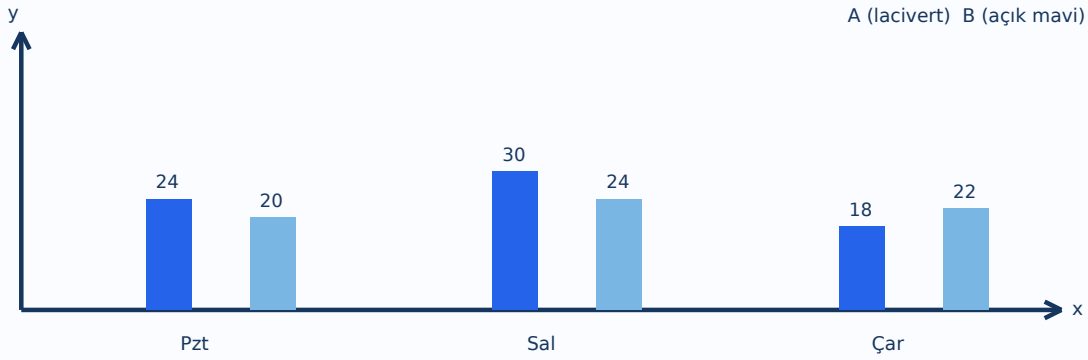
İki farklı grubun aynı dönemlerdeki değerleri karşılaştırıldığında, her dönem için birden fazla sütun yan yana konabilir. Bu yapıya kümeli sütun grafiği denir. Temsili A ve B birimlerinin pazartesi, salı ve çarşamba günlerindeki işlem adetleri A için 24, 30, 18; B için 20, 24, 22 olsun. Pazartesi A, B'den 4 işlem fazladır; salı fark 6'dır; çarşamba ise B, A'dan 4 fazla işlem yapmıştır. A'nın üç günlük toplamı 24+30+18=72, B'nin toplamı 20+24+22=66'dır.

Burada her günün iki sütunu aynı sayısal ölçeğe tabi olmalıdır. Bir birimin sütunları farklı eksen üzerinden okunursa yükseklik farkları doğrudan karşılaştırılamaz. Ayrıca renk açıklaması olmadan “koyu sütun A'ya aittir” kabul edilemez. Üç günün toplam 138 işlemi, gün toplamlarından da doğrulanır: pazartesi 44, salı 54 ve çarşamba 40; 44+54+40=138. Böylece iki yöndeki hesap tutarlıdır.

Kümeli sütun grafiğinin temsili veri tabanı

Gün	A (işlem)	B (işlem)	Gün toplamı
Pazartesi	24	20	44
Salı	30	24	54
Çarşamba	18	22	40
Üç günlük toplam	72	66	138

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

6. Yığılmış sütun ile kümeli sütunun farklı soruları yanıtlaması

Yığılmış sütunda bir kategorinin alt bileşenleri tek sütunun parçaları olarak üst üste yerleştirilir. Örneğin birinci oturumda çevrim içi kayıt 12, yüz yüze kayıt 18; ikinci oturumda çevrim içi kayıt 20, yüz yüze kayıt 10 olsun. Her iki oturumun toplamı 30 kayıttır. Yığılmış sütunların toplam yükseklikleri eşittir, fakat iç parçaların dağılımı farklıdır. Kümeli sütunda ise bu dört bileşen, eş konumdaki ayrı çubuklarla yan yana karşılaştırılır.

Birinci oturumda çevrim içi kayıt 12/30=%40, ikinci oturumda 20/30≈%66,67'dir. Burada yüzde her oturumun kendi 30 kişilik toplamına göre hesaplanmaktadır. Farklı büyüklükteki gruplarda eşit yüzdelik dilimler eşit kişi sayılarına karşılık gelmeyebilir. Yığılmış sütunlar içindeki üst parçaların mutlak yüksekliği, alt

parçanın başladığı yer farklı olduğundan hızlı karşılaştırmayı zorlaştırabilir. Amacın alt bileşenleri doğrudan karşılaştırmak olduğu durumda kümeli sütun kullanımı daha uygun olabilir.

Yığılmış sütunda eşit toplam, farklı iç dağılım

Oturum	Çevrim içi kayıt	Yüz yüze kayıt	Toplam kayıt
I	12	18	30
II	20	10	30

7. Çizgi grafiği: belirli sıra veya zaman üzerindeki değişim

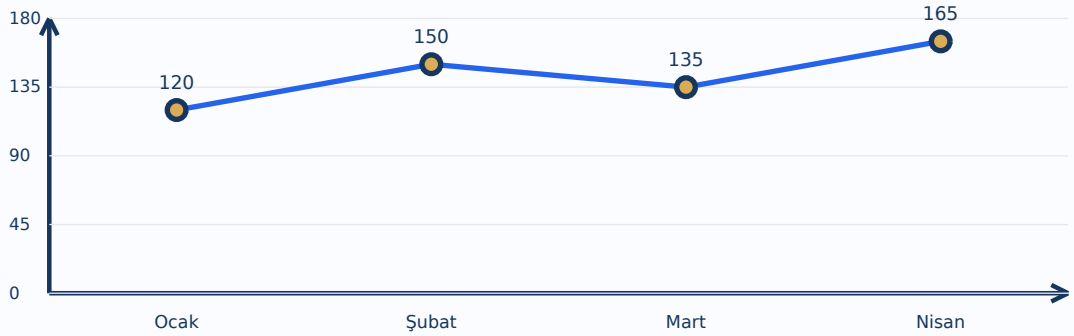
Çizgi grafiğinde gözlemlere karşılık gelen noktalar, çoğunlukla art arda gelen zamanlar boyunca birleştirilir. Temsili bir ofisin dört aylık enerji tüketimi sırasıyla 120, 150, 135, 165 kWh olsun. Yatay eksende aylar eşit zaman aralıklarıyla, düşey eksende kWh bulunur. Ocaktan şubata çizgi yükselir; şubattan marta düşer; marttan nisana yeniden yükselir. Bu görsel, yalnız yüksekliğe değil, ardışık noktalardaki yön değişimine dikkat çekmektedir.

Çizginin iki nokta arasındaki doğrusal parçası her ara günün tüketiminin de doğrusal değiştiğini kanıtlamaz. Veriler aylık toplam olduğunda şubat ve mart aylarının arasındaki çizgi, ölçülmemiş “ayın ortası tüketimi” anlamına gelmez. Birleştirme, seçilen dönemlerin sırasını ve görünür eğilimini işaret eder. Zaman noktaları eşit aralıklı değilse yatay eksendeki gerçek zaman aralıklarının doğru yansıtılması gerekir. Aksi hâlde çizginin dikliği yanlış yorumlanabilir.

Dört ayın temsili enerji tüketimi

Ay	Tüketim (kWh)	Önceki aya göre değişim (kWh)
Ocak	120	Başlangıç
Şubat	150	+30
Mart	135	−15
Nisan	165	+30

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

8. Çizginin yükselişi, düşüşü ve yataylığı

Çizgi grafiği bir değer değişimini gösterirken iki nokta arasındaki farkın işareti önemlidir. İlk değer 120, ikinci değer 150 ise fark 150−120=+30 kWh'tır. Sonraki fark 135−150=−15 kWh olur. Negatif fark “eksi tüketim” değildir; tüketimin önceki aya göre azaldığını ifade eder. Aynı iki ardışık noktada değerler eşitse çizgi yatay olur. Yatay çizgi ilgili gösterimde sabit değere işaret eder; gerçek dünyada aradaki sürede hiçbir dalgalanma yaşanmadığını zorunlu kılmaz.

Bir grafik “günlük toplam işlem” yerine “gün sonunda birikmiş toplam işlem” gösteriyorsa normal şartlarda artışlar birikimli miktara eklenir ve aşağı yönlü çizgi beklenmez; ancak kayıt düzeltmeleri veya iptaller olabilir. Bu nedenle çizginin yükseldiği veya düştüğü sonucunu, verinin dönemlik mi birikimli mi olduğuyla birlikte okumak gerekir. Birinci grafikte +30 ve −15 farkların toplamı +15 değil; üç ardışık fark toplamı +30−15+30=+45 kWh'tır. Bu da son ve ilk değerin farkıyla uyuşur: 165−120=45.

$$(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\cdots+(y_n-y_{n-1})=y_n-y_1$$

Anlamı: Ardışık gözlemler arasındaki işaretli değişimlerin toplamı, son gözlem ile ilk gözlem arasındaki net farka eşittir.

Koşullar: Gözlemler aynı nicelik ve aynı birim cinsinden ölçülmüştür; aradaki farklar işaretleriyle toplanır. Dönemlik değerlerin toplamıyla net fark karıştırılmaz.

9. Zaman aralıkları eşit değilse eğim nasıl yorumlanır?

Bir çizginin ekranda daha dik olması, yalnızca eksen ölçekleri ve zaman aralıkları birlikte göz önünde tutulduğunda daha hızlı değişimi ifade edebilir. Örneğin bir depodaki stok miktarı birinci gün 100, üçüncü gün 140, yedinci gün 180 birim olarak ölçülmüş olsun. Birinci günden üçüncü güne iki gün içinde 40 birim artış gerçekleşmiştir; ortalama değişim günde 20 birimdir. Üçüncü günden yedinci güne dört gün içinde yine 40 birim artış olmuştur; ortalama değişim günde 10 birimdir. İki parçanın dikey farkı eşitken zaman başına değişim farklıdır.

Günler 1, 3 ve 7 olmasına karşın grafikte üç nokta eşit uzaklıkta işaretlenirse gerçek zamana göre eğim yanıltıcı olur. Eksenin sayısal zaman koordinatını kullanmak, gün 1 ile gün 3 arasını iki aralık; gün 3 ile gün 7 arasını dört aralık büyüklüğünde gösterir. Gün 1–3 ve 3–7 aralıklarında hesaplanan 20 ve 10 birim/gün değerleri, her aralıktaki ortalama değişim hızlarıdır; bütün ara günlerde aynı artışın yaşandığını iddia etmez.

$$m = (y_2-y_1)/(t_2-t_1)$$

Anlamı: İki ölçüm noktası arasındaki ortalama değişim hızı; değerin zaman farkına bölünmesiyle bulunur.

Koşullar: $t_2 \neq t_1$; zaman birimleri tutarlıdır ve y değerleri aynı niceliği gösterir. Bu ifade iki nokta arası ortalamadır; ara zamanlardaki anlık değişim hakkında tek başına bilgi vermez.

10. Çok çizgili grafik ve seri açıklamalarının önemi

Aynı zaman dizisinde iki farklı grubun değişimi iki çizgiyle gösterilebilir. Temsili A biriminin haftalık tamamlanan işlem sayıları 40, 50 ve 45; B biriminin sayıları 30, 42 ve 48 olsun. İlk hafta A, B'den 10 işlem fazladır; ikinci hafta fark 8'dir; üçüncü hafta B, A'dan 3 işlem fazladır. Noktalar doğru renkle veya desenle etiketlenmemişse hangi çizginin hangi birime ait olduğu kesinleşmez.

İki çizginin çizimde kesişmesi, ara anda iki birimin gerçekten aynı sayıda işlem yaptığına ilişkin doğrudan gözlem sağlamaz. İki seri haftalık toplamları gösterdiğinde çizgiler arasındaki kesişme, çizimi kolaylaştıran doğrusal bağlantıların geometrik kesişimidir; ölçülmüş bir ara hafta değeri değildir. Ancak veri gerçekten

sürekli izlenen bir niceliği gösteriyor ve belirli bir ara değer için uygun ek koşullar sağlanıyorsa kesişmenin anlamı daha farklı olabilir. Grafik açıklaması gözlem türünü belirlemelidir.

İki seriyle haftalık temsili işlem grafiği

Hafta	A (işlem)	B (işlem)	A−B (işlem)
1	40	30	+10
2	50	42	+8
3	45	48	−3

11. Daire grafiğinin bütünü parçalara ayırması

Daire grafiği, birbirini dışlayan ve birlikte belirli bir bütünü oluşturan kategorilerin paylarını gösterir. Bir eğitim programına yapılan 180 temsili kaydın 90'ı A, 60'ı B ve 30'u C türünde olsun. Toplam 90+60+30=180 kayıttır. A bütünden 90/180=1/2, B 60/180=1/3, C ise 30/180=1/6 pay alır. Dairenin tamamı %100 ve 360° olarak kabul edildiğinden bu payların merkez açıları sırasıyla 180°, 120° ve 60° olur.

Daire grafiğinin temel işlevi A'nın B'den ne kadar büyük olduğunu göstermekten önce, her birinin 180 kayıt içindeki payını görünür kılmaktır. A'nın payı dairenin yarısıdır. B'nin payı üçte bir, C'nin payı altıda birdir. Merkez açıların toplamı 180°+120°+60°=360° olmalıdır. Kategorilerin tümü birlikte bütünü oluşturmuyorsa veya aynı kayıt birden fazla dilime yazılmışsa sıradan daire grafiği hatalı bir bütünlük izlenimi verir.

$$\text{Dilim payı} = f/T;\ \text{yüzde payı} = (f/T)\cdot 100;\ \text{merkez açısı} = (f/T)\cdot 360^\circ$$

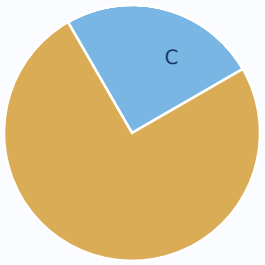
Anlamı: Toplam T içinde bir kategorinin f adet gözleme sahip olması hâlinde daire diliminin kesir, yüzde ve derece karşılığı.

Koşullar: T>0; f≥0; kategoriler birbirini dışlar ve toplamları T'dir. Negatif dilim, örtüşen kategori veya eksik sınıflama standart daire grafiği hesabıyla doğrudan temsil edilemez.

180 kayıtlık temsili verinin daire grafiği

Kategori	Kayıt adedi	Bütün içindeki kesir	Yüzde (yaklaşık)	Merkez açısı
A	90	1/2	%50	180°
B	60	1/3	%33,33	120°
C	30	1/6	%16,67	60°
Toplam	180	1	%100	360°

Konuya ait açıklayıcı şema



Toplam 180 kayıt

Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

12. Yüzde, merkez açısı ve gerçek adedin birbirine dönüşmesi

Daire grafiğinde verilen açı gerçek adede ulaşmak için de kullanılabilir. Toplam 240 dosyanın temsil edildiği bir grafikte X dilimi 90° olsun. X'in toplam payı 90/360=1/4, dosya adedi 240/4=60'tır. Geriye kalan 270° başka kategorilerin toplamıdır ve 240−60=180 dosyaya karşılık gelir. X diliminin %25 olduğu bilgisi de aynı sonucu verir: 240·0,25=60. Böylece açı ve yüzde yolları birbirini denetler.

Ters yönde, toplam 200 kayıt içinde 50 kaydın bir kategoriye ait olması 50/200=%25 ve 360°·1/4=90° merkez açısı verir. Buradaki 90° ile 50 sayısının birimleri farklıdır: biri geometrik açı, diğeri kayıt adedidir. Verilmeyen toplam, yalnız tek bir dilimin açısı biliniyorsa belirlenemez; örneğin 90° dilim hem 40 kişilik toplamın 10 kişisini hem 200 kişilik toplamın 50 kişisini gösterebilir. Bu nedenle açıdan gerçek adede geçmek için genel toplam veya başka eşdeğer büyüklük bilgisi gerekir.

$$f = T\cdot(\alpha/360°);\ T = f\cdot(360°/\alpha)\ [\alpha>0]$$

Anlamı: Toplam T ve dilim açısı α verilirse kategorinin adedi f; dilimin adedi ve pozitif açısı verilirse toplam T elde edilir.

Koşullar: T pozitif, f sıfır veya pozitif; 0°≤α≤360°; ters bağıntıda α>0 olmalıdır. Kategoriler aynı bütünü eksiksiz ve çakışmasız paylaşır.

13. Yüzde etiketlerinde yuvarlama ve toplamın korunması

Bir grafiğin dilim yüzdeleri iki ondalığa yuvarlandığında etiketlerin toplamı tam olarak %100 görünmeyebilir. Örneğin üç kategorinin her biri eşit sayıda kayıt içeriyorsa gerçek paylarının her biri tam olarak 1/3'tür. Yüzdeler iki basamakla %33,33 yazıldığında görünen toplam %99,99 olur. Bu, asıl verinin eksik olduğu anlamına gelmez; yalnızca yuvarlama etkisidir.

Paylar yuvarlandığında hesap yaparken mümkünse asıl adetler veya kesirler kullanılmalıdır. Bu örnekte üç eşit dilimin her biri 120°'dir; 120°+120°+120°=360°. %99,99 görünen etiket toplamından “%0,01 kayıt kayıp” sonucunu çıkarmak yanlıştır. Yuvarlanmış değerleri düzeltmek için tek bir dilimin payını keyfî biçimde değiştirmek de veri bilgisi taşımaz; kullanılan yuvarlama yöntemi varsa grafik notunda açıklanır.

Daire grafiğinde yuvarlama Dilimlerin yüzde etiketleri yaklaşık yazılmış olabilir. Her dilim, kesin hesapta kendi adetinin genel toplama oranıyla değerlendirilir. Yuvarlanmış yüzdelerin görünür toplamının %100'den küçük veya büyük olması tek başına veri kaybını kanıtlamaz.

14. Farklı toplamlı daire grafiklerini karşılaştırmak

İki daire grafiğinde bir kategorinin dilimi eşit büyüklükte görünse bile gerçek kategori adetleri eşit olmak zorunda değildir. Birinci daire 80 kişinin, ikinci daire 200 kişinin dağılımını göstersin. Her iki dairede A'nın dilimi %25 ise birinci toplulukta A=80·0,25=20 kişi, ikinci toplulukta A=200·0,25=50 kişidir. Paylar eşit, adetler farklıdır. Buna karşılık 20 ve 50 kişi sayılarına bakıp A'nın ikinci yerdeki yüzde payının daha yüksek olduğu söylenemez; her ikisinde de pay dörtte birdir.

Ayrıca dairenin ekranda daha büyük çizilmesi tek başına daha büyük veri toplamını temsil etmez. Standart daire grafiğinde karşılaştırma dilimlerin açıları ve payları üzerinden yapılır; dairelerin fiziksel çapı bilgi taşımak zorunda değildir. Eğer alanın ayrıca toplam büyüklüğe göre ölçeklendirildiği farklı bir görselleştirme kullanılıyorsa bu ayrıntı açıkça belirtilmelidir. Veri kaynağı, tarih, örneklem ve kategori tanımları da eşit değilse yüzde karşılaştırmalarına ek sınırlar doğar.

Eşit pay, farklı büyüklükte iki bütün

Grup	Genel toplam (kişi)	A payı	A adedi	A açısı
Birinci	80	%25	20	90°
İkinci	200	%25	50	90°

15. Grafik türü seçimi: sorulan nicelik ve veri yapısı

Sütun grafiği ayrık kategori değerlerini ortak eksende karşılaştırma açısından; çizgi grafiği sıraya konabilen, özellikle zamanla değişen ölçümlerin eğilimini görme açısından; daire grafiği ise tek bir bütünü oluşturan kategorilerin paylarını değerlendirme açısından güçlüdür. Aynı veri bazen birden çok grafikle doğru gösterilebilir. Önemli olan, görselleştirmenin hangi soruyu öne çıkardığı ve hangi bilgiyi yanıltmadan aktardığıdır.

Örneğin 180 kayıt A=90, B=60, C=30 biçiminde verilmişse kategorilerin mutlak farkını sütun grafiğiyle göstermek mümkündür. Aynı veriyi daire grafiğiyle sunmak A'nın kayıtların yarısını oluşturduğunu daha belirgin hâle getirir. Ancak üç kategorinin birden fazla ayda tekrarlandığı veride her ay için ayrı daire oluşturmak eğilim karşılaştırmasını zorlaştırabilir. Zaman eğilimi isteniyorsa çok serili çizgi grafiği veya kümeli sütun daha uygun olabilir. Veri türü, sayıların birimi, zaman aralığı ve hedeflenen çıkarım, grafik seçiminin gerekçesini oluşturur.

Üç grafik türünün güçlü yönleri ve sınırları

Grafik türü	Öne çıkan ilişki	Gerekli gösterim	Dikkat edilmesi gereken
Sütun	Kategorilerin miktar farkı	Ortak sayısal eksen ve aynı genişlik düzeni	Sıfırdan başlamayan eksen farkı abartabilir
Çizgi	Zaman veya sıralı gözlem üzerindeki yön	Doğru yatay zaman aralıkları, birim, seri açıklaması	Noktalar arası çizgi ölçülmemiş ara değerleri kanıtlamaz
Daire	Tek bütünün kategorilere dağılımı	Çakışmayan kategoriler, bilinen veya tanımlı toplam	Eşit pay eşit adet anlamına gelmeyebilir

16. Ölçek, renk, üç boyut etkisi ve kırpılmış görsel

Grafiğin tasarımında üç boyutlu eğik sütunlar veya perspektifle şişirilmiş daire dilimleri, aynı sayısal payı görsel olarak olduğundan farklı gösterebilir. Grafiğin veriye sadık biçimde okunabilmesi için ölçülen büyüklüğün hangi görsel unsurla kodlandığı bilinmelidir. Sütun grafiğinde bu unsur yüksekliktir; süslü hacim efekti matematiksel değere ek bilgi katmaz. Daire grafiğinde dilimin merkez açısı veya bütün içindeki alan payı önemlidir; perspektif, ön taraftaki dilimi daha büyük algılatabilir.

Eşit aralıklı eksen işaretleri eşit sayısal artış göstermelidir. Yatay eksende yalnız seçilmiş bazı tarihler gösteriliyor ancak aralarındaki mesafeler açıklanmıyorsa hız yorumuna temkinli yaklaşılır. Bir veri serisini başka birimle birlikte çizmek gerekiyorsa ikinci düşey eksenin varlığı açıkça belirtilmeli; iki çizginin kesişmesi farklı birimler söz konusu olduğunda nicelik eşitliği sayılmamalıdır. Örneğin sıcaklık (°C) ile tüketim (kWh) çizgileri aynı ekranda bulunsa bile rakamlarının veya eğrilerinin kesişmesi kendi başına neden-sonuç ya da eşitlik oluşturmaz.

> **Grafik görselinin doğruluk sınırı** Sayısal eksen, birim, başlangıç, kategori ayrımı ve veri kaynağı açık değilse çizim tek başına yeterli kanıt oluşturmaz. Üç boyut etkisi, kırpılmış eksen veya ikinci ölçek büyüklüklerin algılanışını değiştirebilir. Kesin çıkarım, etiketlerle doğrulanan niceliklere dayanır.

17. Eksik, sıfır ve negatif değerlerin grafikte gösterimi

Bir ayda kayıt sayısı sıfırsa sıfır başlangıçlı sütun grafiğinde o aya ait sütunun yüksekliği sıfırdır. Bu, ayın verisinin bilinmediği anlamına gelmez. Ölçüm yapılmamışsa “veri yok” işareti veya grafik notu kullanılmalıdır; eksik veriyi sıfır noktasıyla birleştirmek yanlış bir düşüş görüntüsü oluşturabilir. Özellikle çizgi grafiğinde iki mevcut ölçümün arasındaki kayıp gözlemi rastgele sıfır kabul etmek, gerçekte bulunmayan ani iniş çıkışlar üretir.

Negatif sayılar, kişi adedi gibi negatif olamayan niceliklerde kullanılamaz; ancak net fark, hesap bakiyesi veya sıcaklık gibi bağlamlarda anlamlı olabilir. Örneğin dört dönemlik net değişim sırasıyla +12, −5, +8, −3 ise sıfır çizgisinin üstündeki sütunlar pozitif, altındakiler negatif işaret taşır. Bu grafikte toplam net değişim 12−5+8−3=+12 birimdir. Pozitif ve negatif sütunların mutlak yüksekliklerini toplamak 12+5+8+3=28 sonucunu verir; bu sayı net değişim değil, işaret dikkate alınmadan toplam büyüklüktür. Her iki sonuç farklı niceliği temsil eder.

$$\text{Net değişim} = \Sigma d_i \ ; \ \text{toplam mutlak değişim} = \Sigma |d_i|$$

Anlamı: İşaretli döneme ait değişimlerin cebirsel toplamı ile her değişimin büyüklük olarak toplamı birbirinden farklıdır.

Koşullar: d_i değerlerinin tamamı aynı birimde ölçülmüştür. Net değişimde işaretler korunur; mutlak toplamda işaretler kaldırılır.

18. Tablodan grafiğe ve grafikten tabloya dönüştürme

Bir tabloyu sütun grafiğine dönüştürürken önce kategoriler korunur, her kategori için bir değer seçilir, ortak eksen ölçeği belirlenir ve sayısal etiketler uygun sütunlara bağlanır. Aynı verinin çizgi grafiğine aktarılmasında noktalar sıralı konumlarına yerleştirilir; bağlantı çizgilerinin veri türü bakımından anlamlı olup olmadığı değerlendirilir. Daire grafiği için yalnız tek bir toplam seçilir ve birbirini dışlayan parçaların bu toplamı tam oluşturduğu denetlenir.

Tersi yönde grafikten tabloya geçerken her işaretin değeri doğru eksenden okunur. Örneğin sütunların tepe noktaları 10'ar birimlik düşey aralıklar arasında kalıyorsa, çizim üzerinden yaklaşık okuma gerekebilir; gerçek

değer üstüne yazılmışsa etiket esas alınır. Daire grafiğinde yalnız açılar varsa açı-bütün ilişkisi kurulabilir; gerçek adedi hesaplamak için toplam da gereklidir. Grafik, özgün tablodaki ayrıntıların hepsini korumuyor olabilir: Yalnız “diğer” adıyla toplanmış bir daire diliminin kendi içindeki alt kategori adetleri tek başına belirlenemez.

19. Bütünleşik örnek: aynı veri setinin üç farklı görünümü

Bir eğitim hizmetine ilişkin tamamen temsili dört dönemlik kayıt sayıları sırasıyla 12, 18, 15 ve 21 olsun. Dönemler kronolojik olarak birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeyrektir. Her dönem sayısı kendi döneminde yeni açılan kayıt adedini gösterir; birikimli toplam değildir. Sütun grafiği bu dört dönemin adetlerini aynı sıfırdan başlayan ölçekte gösterir: üçüncü çeyrek ikinci çeyrekten az, dördüncü çeyrek ise tümünden fazladır. Çizgi grafiği 12→18→15→21 geçişlerini bağladığında önce yükseliş, sonra düşüş, sonra yeniden yükseliş görülür. Ara dönemlerdeki farklar +6, −3 ve +6 kayıttır.

Daire grafiği için dört çeyreğin toplamı 12+18+15+21=66 kayıttır. Paylar sırasıyla 12/66=2/11, 18/66=3/11, 15/66=5/22 ve 21/66=7/22'dir. Daire dilimlerinin açıları tam sayı olmak zorunda değildir: sırasıyla 720/11°, 1080/11°, 900/11° ve 1260/11°, yani yaklaşık 65,45°, 98,18°, 81,82° ve 114,55° olur. Bu açıların tam değerleri ortak paydada toplandığında (720+1080+900+1260)/11=3960/11=360° elde edilir. Aynı denetim toplam kayıt üzerinden de yapılabilir: 360°·(12+18+15+21)/66=360°. Kesirleri mümkün olduğunca kesin tutmak, her dilim açısını önceden yuvarlayarak toplamda küçük tutarsızlıklar üretmekten korur.

Dört çeyreklik temsili kayıtların üç grafik için ortak veri tabanı

Çeyrek	Dönemlik kayıt	Önceki çeyreğe göre fark	Dört dönemin toplamındaki pay	Daire dilimi (yaklaşık)
I	12	Başlangıç	12/66	65,45°
II	18	+6	18/66	98,18°
III	15	−3	15/66	81,82°
IV	21	+6	21/66	114,55°
Genel toplam	66	Son−ilk = +9	1	360°

Bu üç grafik birbirinin yerine tam olarak aynı bilgiyi öne çıkarmaz. Sütun grafiğinde çeyrek toplamlarını gözle karşılaştırmak, çizgi grafiğinde 12→18→15→21 değişim yönünü görmek, daire grafiğinde ise dördüncü çeyreğin 21/66'lık payına odaklanmak daha doğaldır. İlk ve son dönem arasındaki 21−12=9 kayıt farkı, üç ardışık farkın +6−3+6=+9 toplamıyla doğrulanır. Dört dönemin toplamı 66 ile ilk-son farkı 9 farklı ölçülerdir. Veri setinin türü ve grafik açıklaması sabit kaldığı sürece bu matematiksel bilgiler her üç temsilde de çelişmemelidir.

20. Görselden zorunlu sonuç çıkarma ve sonraki konuyla bağlantı

Grafik incelemenin güvenilir yolu, önce grafiğin kodladığı niceliği tanımak, sonra eksen veya dilimden değeri okumak, ardından yalnız gösterilen dönem ve kategori kapsamında sonuç kurmaktır. Bir sütunun en yüksek olması, o dönemin kurum açısından en verimli dönem olduğunu her zaman kanıtlamaz: daha çok personel, daha uzun çalışma zamanı veya farklı iş yükü söz konusu olabilir. Çizgi grafiğinin yükselmesi bir miktarın arttığını, azalması düştüğünü gösterir; nedenini tek başına açıklamaz. Daire grafiğinin en büyük dilimi de dağılımın o bütündeki en büyük payını temsil eder, bütün evren hakkındaki genellemeyi kanıtlamaz.

Grafikte yaklaşık okunan değerle üzerine yazılmış kesin değer farklıysa etiket ve kaynak notu temel alınır. Sayıların aynı birimden olup olmadığı, eksenin kesilip kesilmediği, kategori toplamlarının bütünü oluşturup

oluşturmadığı ve farklı zamanların aynı uzunlukta ölçülüp ölçülmediği denetlenir. Böylece grafik yalnız görüntü değil, gerekçeli çıkarım yapılabilen bir sayısal veri sunumu hâline gelir. Sonraki konu, bu görsel okuma temelinden hareketle grafik üzerinde yüzde, fark ve oran hesabını daha sistemli ele alacaktır.

KONU 5.3

GRAFİKLERDE YÜZDE, FARK VE ORAN HESABI

Bir grafiği okuyabilmek, gösterilen sayıyı görmekten daha fazlasını gerektirir. İki sütunun uzunlukları karşılaştırılırken kaç birim fark olduğu; çizgi grafiğindeki iki noktanın karşılaştırılmasında değişimin başlangıç değerine göre büyüklüğü; daire grafiğinde ise bir dilimin toplamın ne kadarını oluşturduğu hesaplanabilir. Bu hesaplar için önce grafikteki gerçek nicelikler belirlenir, ardından uygun pay ve payda seçilir. Fark, oran ve yüzde birbirine bağlı olsa da aynı bilgiyi ifade etmez.

Bu bölümde kullanılan bütün grafik değerleri öğretim amacıyla oluşturulmuş temsili verilerdir; herhangi bir kamu kurumunun veya gerçek bir istatistiksel araştırmanın sonucu olarak sunulmaz. Metin içinde her grafiğin başlığı, ekseni, birimi ve değerleri ayrıca açıklanmıştır. Böylece sonradan PDF dizgisinde çizim üretilemese bile bütün hesaplar metinden izlenebilir.

1. Grafik değerini hesaplamaya elverişli biçimde okumak

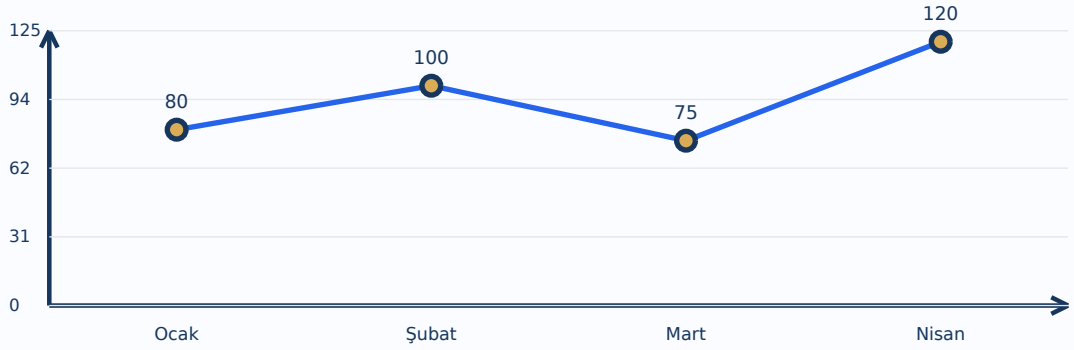
Grafik üzerinde işlem yapmanın ilk koşulu, sayının neyi gösterdiğini bilmektir. Yatay eksende aylar, düşey eksende tamamlanan dosya sayısı bulunan bir çizgi grafiğinde ocak noktası 80, şubat noktası 100, mart noktası 75 ve nisan noktası 120 olsun. Düşey eksenin birimi “dosya”dır; her nokta o ay tamamlanan dosya sayısını gösterir. Bu sayılar yılbaşından itibaren biriken toplamlar değil, ayrı aylara ilişkin değerlerdir.

Nisanın ocaktan 40 dosya fazla olması, aradaki bütün aylarda kesintisiz artış yaşandığını göstermez. Nitekim şubattan marta 25 dosyalık düşüş vardır. Önce niceliğin aylık, kümülatif, ortalama veya oran olup olmadığı belirlenmezse doğru aritmetik işlem yanlış bir soruya uygulanmış olur. Eksen ölçeği gerçekte 25 dosyalık aralıklarla işaretlenmiş olsa dahi 75 değeri bir önceki 100 noktasından 25 aşağıdadır; kağıt üzerindeki milimetre farkı hesap değeri değildir.

Temsili aylık tamamlanan dosya sayısı — temel grafik verisi

Ay	Tamamlanan dosya (adet)	Bir önceki aya göre fark (adet)
Ocak	80	Başlangıç
Şubat	100	+20
Mart	75	−25
Nisan	120	+45

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

2. Mutlak fark: büyükten küçüğü çıkarmak ile yönlü değişimi ayırmak

İki değerin arasındaki mutlak fark, birim korunarak büyük değerden küçük değer çıkarılmasıyla bulunur. Ocak ile nisan için 120−80=40 dosya mutlak farktır. Zamanın yönü de belirtilirse "Ocaktan nisana değişim" son değer eksi ilk değer biçiminde 120−80=+40 dosya olur. Buna karşılık "Şubattan marta değişim" 75−100=−25 dosyadır; mutlak fark 25 dosya olarak yazılır.

Mutlak fark negatif yazılmaz, yönlü değişim negatif olabilir. İki grafikte biri 80'den 120'ye, diğeri 120'den 80'e gitmişse her ikisinin mutlak farkı 40'tır, ancak birincisinin yönlü değişimi +40, ikincisininki −40'tır. Farkın birimi özgün değerin birimiyle aynıdır: 40 dosya, 40 kişi veya 40 ton farklı büyüklüklerdir ve karıştırılamaz.

$$\Delta = \text{son değer} - \text{ilk değer};\ \text{mutlak fark} = |\text{son değer} - \text{ilk değer}|.$$

Anlamı: Yönlü değişim artışı veya azalışı işaretiyle verir; mutlak fark iki değer arasındaki uzaklıktır.

Koşullar: Karşılaştırılan değerlerin birimi, kapsamı ve zaman dayanağı karşılaştırılabilir olmalıdır. Zaman içermeyen karşılaştırmada "son" ve "ilk" yerine ilgili grupların adları yazılabilir.

3. Yüzde değişimde başlangıç değeri neden paydadır?

Yüzde değişim, ortaya çıkan sayısal değişimin başlangıç büyüklüğüne oranıdır. Ocaktan şubata tamamlanan dosya sayısı 80'den 100'e çıkmıştır. Artış 20 dosyadır; 20/80=1/4 olduğundan başlangıcın %25'i kadar artış gerçekleşmiştir. Bunun nedeni 20 dosyanın 80 dosyalık ilk düzeyle karşılaştırılmasıdır. Aynı 20 dosyayı yeni değer olan 100'e bölmek %20 verir, fakat bu "artışın son değere oranı"dır; başlangıca göre yüzde artış değildir.

Şubattan marta değişim 75−100=−25 dosya ve başlangıç 100 dosyadır. Bu nedenle yüzde değişim −25/100×100=%−25'tir; sayı %25 azalmıştır. Marttan nisana değişim 120−75=45 ve başlangıç 75 olduğundan yüzde değişim 45/75×100=%60 artıştır. Farkların +20, −25 ve +45 olması ile yüzde değişimlerin +%25, −%25 ve +%60 olması aynı gözlemlerin farklı ifadeleridir.

$$\text{Yüzde değişim} = [(\text{son değer} - \text{ilk değer}) / \text{ilk değer}] \times 100.$$

Anlamı: Başlangıç düzeyine göre göreli artış ya da azalış; sonuç yüzde birimiyle okunur.

Koşullar: Başlangıç değeri sıfır olmamalıdır. "Artış/azalış" şeklindeki alışılmış yorumu özellikle başlangıç değeri pozitif olduğunda doğrudandır. Negatif başlangıç değerleri ayrıca yorumlanmalıdır.

Aynı aylık grafikte mutlak ve göreli değişimler

Dönem geçişi	İlk değer	Son değer	Fark	İlk değere göre değişim
Ocak → Şubat	80	100	+20 dosya	+%25
Şubat → Mart	100	75	−25 dosya	−%25
Mart → Nisan	75	120	+45 dosya	+%60
Ocak → Nisan	80	120	+40 dosya	+%50

4. Aynı iki değerde ters yönden yüzde hesabı

Nisan değeri 120, ocak değeri 80 olduğunda nisan ocaktan 40 dosya, yani ocak düzeyinin %50'si kadar fazladır. Ancak ocak nisandan ne kadar azdır sorusu ters yönde sorulduğunda temel değer 120 olur. Aradaki fark yine 40 dosyadır; 40/120=1/3, yani yaklaşık %33,33 bulunur. İki yüzde birbirinin aynı veya işaretçe tersi değildir.

İlk karşılaştırmada 80'in üzerine %50 eklenirse 120'ye ulaşılır. Ters karşılaştırmada 120'den yaklaşık %33,33 çıkarılırsa 80'e dönülür. Örneğin %50 artırılmış bir sayıyı %50 azaltmak ilk değeri vermez: 80 önce 120, sonra 60 olur. Hesapların paydası dönüşümün her adımında o adımın başlangıç değeridir. Grafikte yönlü karşılaştırma yapılırken “hangi değere göre?” sorusu bu yüzden temeldir.

> **Yüzde tabanını karıştırmama** A değeri B'den %50 fazla ise B'nin A'dan %50 az olduğu genel olarak doğru değildir. Mutlak fark simetrik, başlangıç paydalı yüzde değişim ise yönlüdür. Payda her karşılaştırmada açıkça belirlenir.

5. Sütun grafiğinde toplamın yüzde payını hesaplamak

Dört ayrı birimin tamamladığı dosyalar bir sütun grafiğinde sırasıyla 30, 45, 75 ve 50 adet gösterilsin. Her sütun bir birimin kendi adedini ifade eder; aynı dönem ve aynı dosya türü için toplam 30+45+75+50=200 dosyadır. Üçüncü birimin toplam içindeki payı 75/200×100=%37,5'tir. Birinci birimin payı %15, ikincinin %22,5 ve dördüncünün %25 olur. Yüzdelerin toplamı %100'dür; böylece payda ve hesaplar ikinci yoldan denetlenir.

Üçüncü birimin birinci birimden %150 fazla olduğu da doğrudur, çünkü (75−30)/30×100=%150'dir. Fakat “üçüncü birim toplamın %150'sini oluşturur” ifadesi yanlıştır; toplam payı yalnız %37,5'tir. Yüzde biçimi aynı görünse de paydanın bütün dosyalar mı, karşılaştırılan birimin değeri mi olduğu sonucu kökten değiştirir.

Dört birimli temsili sütun grafiği — adet ve toplam payı

Birim	Grafik sütun değeri (dosya)	Toplam içindeki pay
Birim A	30	%15
Birim B	45	%22,5
Birim C	75	%37,5
Birim D	50	%25
TOPLAM	200	%100

6. Oran ile yüzdeyi ayırma: parça-bütün ve parça-parça

Oran iki niceliğin bölme yoluyla karşılaştırılmasıdır. Birimler aynı ise sonuç birimsiz, farklı ise birimli oran elde edilir. Az önceki sütun grafiğinde C ile A'nın adet oranı 75/30=5/2=2,5'tir. Bu oran C'nin A'nın 2,5 katı olduğunu ifade eder. Buna karşılık C'nin bütün dört birime oranı 75/200=3/8=%37,5'tir. İlk oran “parça-parça”, ikincisi “parça-bütün” ilişkisidir.

B ve D birimlerinin oranı 45:50=9:10 şeklinde sadeleşir. Bu gösterim farkı açıklamaz; fark 50−45=5 dosyadır. Oran 9:10 iken D'nin B'den fazla oluşunun yüzde karşılığı (50−45)/45×100≈%11,11'dir. Böylece aynı iki sayı için oran, fark ve yüzde değişim ayrı cümlelerle ifade edilir.

> $\text{Oran}(A,B)=A/B\ (B\neq 0)$; bütün payı = parça/toplam; yüzde pay = $100\times$(parça/toplam).
>
> **Anlamı:** İki değerin çarpımsal karşılaştırması ile bir değerin bütün içindeki yüzdesini ayırır.
>
> **Koşullar:** Bölende sıfır bulunmaz; parça-bütün yüzdesi için toplam pozitif olmalı ve parça söz konusu toplamın içinde yer almalıdır.

7. Yüzde ile yüzde puanın farklı bilgiler oluşu

Bir çizgi grafiğinde bir hizmetten memnuniyet oranı ilk dönemde %40, sonraki dönemde %52 olarak verilmiş olsun. Oranlar arasındaki mutlak fark 52−40=12 yüzde puandır. İlk dönemin oranına göre göreli artış ise (52−40)/40×100=%30'dur. “12 puan artış” ile “%30 göreli artış” aynı değişimin farklı ölçüleridir. Burada 12 kişinin veya %12 artışın gerçekleştiğini söylemek, veri birimi belirtilmeden yanıltıcıdır.

Yüzde puan, yüzdelik değerlerin çıkarılmasıyla bulunur. Örneğin iki grubun payları %18 ve %24 ise pay farkı 6 yüzde puandır. Birinci paya göre bağıl fark ise (24−18)/18×100≈%33,33'tür. Daha büyük oran yüzde olarak ifade edildiği için yüzdelerin farkını da yalnız “yüzde” diye adlandırmak iki kavramı birbirine karıştırır.

Yüzde puan ve göreli yüzde değişim örnekleri

İlk oran	Son oran	Fark	İlk orana göre değişim
%40	%52	+12 yüzde puan	+%30
%18	%24	+6 yüzde puan	Yaklaşık +%33,33
%60	%45	−15 yüzde puan	−%25

8. Birbirini izleyen yüzde değişimler ve çarpan yöntemi

Ardışık iki yüzde değişim farklı başlangıç düzeylerine uygulanır. Bir çizgi grafiğinde ilk değer 200, ikinci değer 250 ve üçüncü değer 200 olsun. İlk değişim (250−200)/200=%25 artıştır. İkinci değişim (200−250)/250=%−20 azalıştır. İlk değere geri dönüldüğü için toplam değişim sıfırdır. Buna rağmen ara yüzde değişimleri +%25 ve −%20'dir; yüzde işaretlerini birbirinden çıkararak toplam değişim %5 sanmak yanlıştır.

Çarpan yöntemi aynı olguyu daha kısa gösterir. %25 artış, başlangıç değerinin 1,25 ile çarpılmasıdır. %20 azalış ise o aşamadaki değerin 0,80 ile çarpılmasıdır. 1,25×0,80=1 olduğundan net çarpan birdir; 200×1=200. Grafik yalnız üç değer gösterse bile hesap adımlarının hangi başlangıçlara dayandığı bu biçimde açıkça görülebilir.

Son/ilk çarpanı = (1+p/100) × (1+q/100); toplam yüzde değişim = 100×[(son/ilk)−1].

Anlamı: p ve q işaretli ardışık yüzde değişimleri başlangıçtan sonuca tek çarpanla aktarır.

Koşullar: Değişimler ardışık ve aynı niceliğe uygulanmalıdır; alışılmış artış/azalış yorumunda her aşamanın başlangıç değeri pozitiftir. p ve q, yüzde değerleri olarak girilir.

9. Daire grafiğinde yüzde, merkez açı ve veri sayısı

Daire grafiği bir bütünün parçalarını toplam 360° merkez açıya dönüştürür. Dört kategoriye ait 72, 96, 48 ve 24 kayıt olsun. Toplam 240 kayıt vardır. Paylar sırasıyla %30, %40, %20 ve %10; merkez açılar sırasıyla 108°, 144°, 72° ve 36° olur. Hem yüzdeler %100'e hem açılar 360°'ye toplandığı için veri iki ayrı yoldan denetlenebilir.

Buradaki merkez açı, geometrik bir açı ölçüsüdür; yüzde olarak okunmaz. 108° dilimi, bütün dairenin 108/360=0,30'u olduğundan toplam kayıtların %30'unu gösterir. Toplam kayıt 240 olduğu için bu dilimde 240×0,30=72 kayıt bulunur. Başka bir daire grafiğinde de 108° aynı yüzdeyi ifade eder; ancak bütün toplamı farklıysa gerçek kayıt sayısı farklı olur.

Pay (%) = (kategori/toplam)×100; merkez açı = (kategori/toplam)×360°; kategori = toplam×(açı/360°).

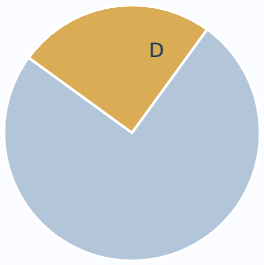
Anlamı: Daire grafiğindeki dilim büyüklüğü, yüzdelik pay ve gerçek adet arasında dönüşüm sağlar.

Koşullar: Dilimler aynı bütünün birbirini dışlayan ve toplamı eksiksiz oluşturan parçalarıdır; toplam pozitif olmalıdır. Açıların toplamı 360°'dir.

Temsili 240 kaydın daire grafiği dağılımı

Kategori	Kayıt	Bütünün yüzdesi	Merkez açı
A	72	%30	108°
B	96	%40	144°
C	48	%20	72°
D	24	%10	36°
TOPLAM	240	%100	360°

Konuya ait açıklayıcı şema



Toplam 240 kayıt

Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

10. Grafikte açıdan adede ve adetten açıya ters hesap

Bütünü 240 olan dairede 45°'lik bir dilim 45/360=1/8 oranını temsil eder. Bu nedenle dilimin karşılığı 240/8=30 kayıttır. Ters hesapta 30/240=1/8 ve 360°/8=45° bulunur. Bu denetim açının yanlışlıkla yüzdeye çevrilmesini engeller: 45° dilim %45 değil, %12,5 paydır.

Aynı bütün içinde 54 kayıtlık bir kategori için açı 54/240×360°=81°'dir. 81/360=0,225 olduğundan bu dilim toplamın %22,5'ini oluşturur. Daire grafiğinde bazen yalnız bir dilimin açısı verilir ve diğer dilimler toplam 360°'ye tamamlanır. Bu durumda eksik açı hesaplanabilir; gerçek adet ise bütün toplamı veya başka yeterli bir sayısal bilgi yoksa tek başına bulunamaz.

11. Ayrı daire grafiklerinde aynı yüzde, farklı sayı

İki farklı dönemin daire grafiklerinde aynı kategori payını karşılaştırırken her birinin bütün sayısı ayrıca bilinmelidir. İlk dönemde 200 kaydın %40'ı 80 kayıttır. İkinci dönemde 300 kaydın %35'i 105 kayıttır. Kategori payı beş yüzde puan gerilemesine rağmen kayıt sayısı 25 artmıştır. İkinci dönemdeki kayıt sayısının birinci döneme göre göreli artışı 25/80×100=%31,25'tir.

Payların yüzde olarak küçülmesi, mutlak sayının da küçüldüğünü zorunlu kılmaz. Aynı nedenle iki grafik üzerinde eşit büyüklükte gösterilen dilimler, bütün toplamları farklıysa eşit sayıda kişiyi temsil etmek zorunda değildir. Önce kendi dairesinin toplamına göre gerçek sayı hesaplanır, sonra iki dönem arasında karşılaştırma yapılır. Bu kural farklı nüfus veya örneklem büyüklüklerine ait bütün grafiklerde önem taşır.

Farklı toplamlı iki dairenin sayısal karşılaştırması

Dönem	Toplam kayıt	Hedef kategorinin payı	Gerçek kayıt sayısı
Birinci dönem	200	%40	80
İkinci dönem	300	%35	105
Değişim	+100	−5 yüzde puan	+25

12. Kümeli sütun grafiğinde doğru yüzde paydasını seçme

Bir kümeli sütun grafiğinde A grubunda 80 kişi, B grubunda 120 kişi bulunsun. İlk grubun 48'i, ikinci grubun 60'ı belirli bir ölçütü karşılasın. A grubunun kendi içindeki uygunluk oranı 48/80=%60; B grubunun oranı 60/120=%50'dir. Uygun kişilerin mutlak sayısı B grubunda daha fazla olsa da grup içi uygunluk oranı A'da daha yüksektir. Grupların büyüklükleri farklı olduğundan tek başına sütun yüksekliği oranı belirlemez.

İki grubun toplamı 200 kişi, uygun bulunanların toplamı 108 kişidir. İki grup birlikte ele alındığında uygunluk oranı 108/200=%54 olur. Bu toplam oran %60 ile %50'nin basit ortalaması olan %55 değildir; çünkü A ve B'nin grup büyüklükleri eşit değildir. Toplamda pay 48+60 ve payda 80+120 olarak seçilmelidir. Her grubun kendi tabanına göre değerlendirme yapmak, koşullu oranların doğru okunmasıdır.

Kümeli sütun grafiğinde adet ve koşullu yüzde

Grup	Toplam kişi	Uygun kişi	Kendi grubu içindeki uygunluk
A	80	48	%60
B	120	60	%50
İki grup birlikte	200	108	%54

13. Grafikte verilen oranı gerçek adede dönüştürmek

Kimi grafiklerde y eksenine doğrudan kişi sayısı yerine yüzde oranı yazılır. Bir grafikte Birim A için %45, Birim B için %60 uygunluk oranı göründüğünü varsayalım. Bu bilgilerle uygun kişi sayıları doğrudan karşılaştırılamaz; her birimde toplam kaç kişi bulunduğu da gereklidir. A'da 200, B'de 100 kişi bulunduğu eklenirse uygun kişi sayıları sırasıyla 200×0,45=90 ve 100×0,60=60 olur.

B'nin sütunundaki yüzde daha yüksekken uygun kişi sayısı A'da daha fazladır. Bu veriden A'nın “daha başarılı” veya B'nin “daha iyi koşullarda” olduğu kesin olarak çıkarılamaz; değerlendirme amacı ve grupların karşılaştırılabilirliği ayrıca belirtilmelidir. Matematiksel olarak güvenilir sonuç, hangi payın hangi toplam üzerinden hesaplandığı ve hangi mutlak sayıya karşılık geldiğidir.

14. Ölçek ve birim dönüşümüyle fark veya yüzde hesabı

Düşey eksenin “bin adet” biçiminde gösterildiği bir sütun grafiğinde ilk dönem 0,9 ve ikinci dönem 1,2 okunuyorsa gerçek değerler 900 ve 1.200 adettir. Fark 1.200−900=300 adettir. İlk döneme göre göreli artış 300/900×100≈%33,33'tür. Aynı sonuca grafiğin binlik sayılarıyla da ulaşılır: (1,2−0,9)/0,9=1/3. Birim dönüştürülmeden hesap yapmak yüzdede sorun çıkarmaz, ancak sonucu “0,3 adet artış” diye yazmak yanlıştır; 0,3 bin adet artış olmuştur.

Bir grafikte iki farklı niceliğin birimleri farklıysa oran birimli olabilir. Örneğin 120 başvuru ile 4 gün arasındaki oran 120/4=30 başvuru/gündür. İki adet serisinin oranı ise aynı birimlerin sadeleşmesiyle birimsizdir. Grafiklerde görülen sayıları yalnız büyüklüklerine göre işlemeye başlamak yerine eksenlerdeki birimin sonuç birimine nasıl geçtiği izlenmelidir.

15. Sıfır başlangıç, negatif değer ve yüzde değişimin sınırları

Bir dönemde değer sıfır, sonraki dönemde 30 ise artış 30 birimdir; başlangıca göre yüzde değişim hesabında payda sıfır olacağı için standart oran tanımsızdır. Buna “sonsuz yüzde artış” denmesi, hesaplanabilen sonlu bir yüzdeyi ifade etmez. Başlangıç sıfır iken “%30 artış” gibi bir sonuç da yanlıştır. Grafik sıfırdan başlayan ayrı bir düzeyi gösteriyorsa mümkün olan kesin ifade, değişimin 30 birim olduğudur.

Negatif değerler, sıcaklık veya kâr-zarar dengesi gibi farklı bağlamlarda anlamlı olabilir. Örneğin net denge −40'tan −20'ye yükselirse yönlü değişim +20 birimdir; açık −40 iken −20'ye düşmüştür. Standart formülde payda −40 olduğundan (+20)/(−40)×100=%−50 bulunur; bunu gündelik dilde “%50 azaldı” diye söylemek, denge değerinin gerçekte yükselmiş olmasıyla karışır. İşaretli büyüklüklerde en güvenilir ilk ifade +20 birimlik değişimdir. Gerekirse karşılaştırma için “ilk açığın mutlak büyüklüğüne göre açık yarıya indi” şeklinde açık bir referans seçilir.

Yüzde değişimin tanım sınırı Başlangıç değeri sıfır olduğunda [(son−ilk)/ilk] biçimindeki yüzde değişim tanımsızdır. Negatif başlangıçta cebirsel oran hesaplanabilse bile alışılmış “arttı/azaldı” yorumu ters görünebilir; işaretli değişim ve seçilen referans ayrıca açıklanmalıdır.

16. Eşit ağırlıklı olmayan yüzdelerin birleştirilmesi

Bir grafikte A grubunda 40 kişinin %25'i, B grubunda 160 kişinin %50'si belirli bir özelliği taşısın. A'da 10, B'de 80 kişi olmak üzere toplam 90 kişi söz konusudur. Genel toplam 200 kişi olduğundan birleşik pay 90/200=%45'tir. %25 ile %50'nin basit aritmetik ortalaması %37,5 olur; fakat bu sonuç grupların 40 ve 160 kişi olmak üzere farklı büyüklükte olması nedeniyle tüm bireylerin ortak oranını temsil etmez.

Yüzdeleri birleştirmek için her oran kendi grup toplamına uygulanır, uygun birey sayıları toplanır ve bütün grupların toplamına bölünür. Birinci gruba 40 kişi daha eklenip oranı aynı kaldığında toplam oran da yeniden hesaplanmalıdır; önceki grubun yüzdesini diğer gruba eşit ağırlıkla katmak yeterli olmaz. Bu işlem, oranın yalnız grafikteki sütunların ortalaması olmadığını, arkasındaki kayıtların büyüklüğüyle birlikte anlam kazandığını gösterir.

$$\text{Birleşik oran} = [n_1 \times r_1 + n_2 \times r_2 + \ldots] / [n_1 + n_2 + \ldots]; \quad \text{birleşik yüzde} = 100 \times \text{birleşik oran}.$$

Anlamı: Grupların farklı büyüklükte olduğu durumda, her grubun oranının kendi kayıt sayısıyla ağırlıklandırılması.

Koşullar: n değerleri negatif olmayan grup toplamlarıdır; bütün payda pozitiftir; r değerleri yüzde değil 0 ile 1 arasındaki pay biçiminde girilir. Gruplar aynı ölçütü ifade eder ve birbiriyle çakışmaz.

17. Dönem uzunluğu farklıysa günlük veya haftalık oran

Bir çizgi grafiğinin iki noktasında sırasıyla 60 ve 100 dosya görülsün. Birinci nokta iki günlük, ikincisi beş günlük toplamı temsil ediyorsa doğrudan 100>60 karşılaştırması yalnız toplam dosya sayısı için doğrudur. Gün başına ortalamalar 60/2=30 ve 100/5=20 dosyadır. İlk dönem daha az dosya tamamlamış görünse bile günlük hız açısından ikinci dönemden 10 dosya/gün fazladır.

İlk dönemin günlük ortalaması ikincinin 30/20=1,5 katıdır, yani ikincisine göre %50 daha fazladır. Dönemlerin süreleri eşit olsaydı 60 ve 100 değerleri doğrudan aynı zaman aralığına karşılık geldiğinden başka bir normalleştirme gerekmeyebilirdi. Gerçek kayıtlar tatil, yoğunluk ve hizmet türü bakımından da farklılaşabilir; bu örnekte yalnız zaman başına aritmetik ortalamalar karşılaştırılmıştır.

18. Son değerden başlangıcı bulma ve ters yüzde işlemi

Bir sütun grafiğinde sonraki dönem değeri 240 ve yanında “bir önceki döneme göre %20 artış” açıklaması bulunsun. Yeni değer, eski değerin 1,20 katıdır. Dolayısıyla başlangıç değeri 240/1,20=200 bulunur. Bağımsız denetimde 200'ün %20'si 40 ve 200+40=240'tır. Son değerden %20 çıkarmak 240−48=192 verir; bu yanlış sonuç, yüzdeyi son değerin üzerinden düşmeye çalışmaktan doğar.

Başlangıç ve sonuç birlikte verildiğinde yüzde bulunabildiği gibi, sonuç ve yüzde birlikte verildiğinde başlangıç da bulunabilir. Örneğin 125'ten 150'ye yükselme 25/125×100=%20 artıştır; burada sonraki değer 150 olduğundan geriye doğru 150/1,20=125 hesaplanır. Kuralın iki yönde aynı başlangıç-sonuç ilişkisini sağlaması ikinci denetim olarak kullanılabilir.

Başlangıç = son değer / (1+p/100).

Anlamı: Başlangıca göre p yüzde değişimi uygulanarak elde edilen son değerden başlangıcı bulma.

Koşullar: 1+p/100 sıfır olmamalıdır; p işaretli yüzde değişimidir. Başlangıcın pozitif kabul edildiği artış/azalış modellerinde yorum doğrudandır.

19. Kümülatif çizgi ile dönemlik sütunun karşılaştırılması

Bir çizgi grafiğinde yıl başından beri birikmiş toplam kayıtlar ilk ay sonunda 100, ikinci ay sonunda 160 ve üçüncü ay sonunda 230 olarak verilmiş olsun. Bu üç sayı ayrı ayların kayıtları değil, o ana kadarki birikimlerdir. Dönemlik miktarlar ilk ay 100, ikinci ay 160−100=60 ve üçüncü ay 230−160=70 kayıttır. Dolayısıyla ikinci ayın dönemlik kaydı birinci ayın %60'ı kadar, üçüncü ayın kaydı ikinci aydan 10 kayıt veya %16,67 daha fazladır.

Birinci ay sonundaki kümülatif 100 ile ikinci ay sonundaki kümülatif 160 arasındaki %60 artış, o ayın kendi kayıt sayısının ilk aydan %60 arttığı anlamına gelmez. Nitekim ayrı aylık adetler 100'den 60'a düştüğü için dönemlik yüzde değişim %−40'tır. Kümülatif ve dönemlik yorumlar farklı pay ve paydaya sahiptir; ikisi aynı grafik üzerinden bile farklı gerçekleri anlatır.

Kümülatif grafikten dönemlik değere geçiş

Dönem	Kümülatif toplam	O dönemin artışı	Bir önceki dönemlik değere göre fark
Birinci ay	100	100	Başlangıç
İkinci ay	160	60	−40
Üçüncü ay	230	70	+10

20. Görsel ölçek, yuvarlama ve yüzde toplamının güvenilirliği

Y ekseni sıfırdan değil 70'ten başlayan bir sütun grafiğinde 80 ve 100 değerlerinin görsel yükseklikleri 10 ve 30 birim gibi görünebilir. Ancak bu ölçüler mutlak değer değildir; gerçek oran 100/80=1,25'tir. Sütunların görünen uzunluklarının oranı 30/10=3 olsa da “ikinci değer birincinin üç katıdır” denilemez. Grafik ölçeğinde kesilme varsa yüzdeler y eksenindeki gerçek rakamlar üzerinden hesaplanmalıdır.

Daire grafiğinde eşit üç kategorinin her biri tam olarak 1/3, yani %33,333… paya sahiptir. Etiketler tam yüzdeye yuvarlanırsa her biri %33 yazılır; görünen toplam %99 olur. Bu, temel dağılımın eksik olduğu anlamına gelmez. Benzer biçimde yüzdelerin yuvarlanması %101 gibi bir toplam da oluşturabilir. Kesin adetler mevcutsa kontrol adetlerle yapılır; yuvarlanmış etiketler kullanılırsa sonucun yaklaşık olduğu belirtilir.

Kesik eksen ve yuvarlanmış paylar Sütunun kâğıt üzerindeki boyundan değil eksendeki sayısal değerinden oran hesaplanır. Yuvarlanmış kategorik yüzdelerin toplamı %100'den küçük veya büyük görünebilir; bu durumda açıkça verilen tam adetler varsa onlar önceliklidir.

21. Bütünleşik grafik yorumu: fark, yüzde, oran ve daireye dönüşüm

Yatay eksende dört çeyrek dönem, düşey eksende o çeyrekte tamamlanan temsili dosya sayıları gösterilen bir sütun grafiğinin değerleri 80, 100, 120 ve 100 olsun. Bütün çeyreklerin toplamı 80+100+120+100=400 dosyadır. İkinci çeyrek birinciden 20 dosya, yani 20/80×100=%25 fazladır. Üçüncü çeyrek ikinciden 20 dosya, yani %20 fazladır. Dördüncü çeyrek üçüncüden 20 dosya daha azdır; bu, üçüncü çeyreğe göre −20/120×100≈%−16,67 değişimdir. Birinci çeyrekten dördüncü çeyreğe net değişim +20 dosya, başlangıca göre %+25'tir.

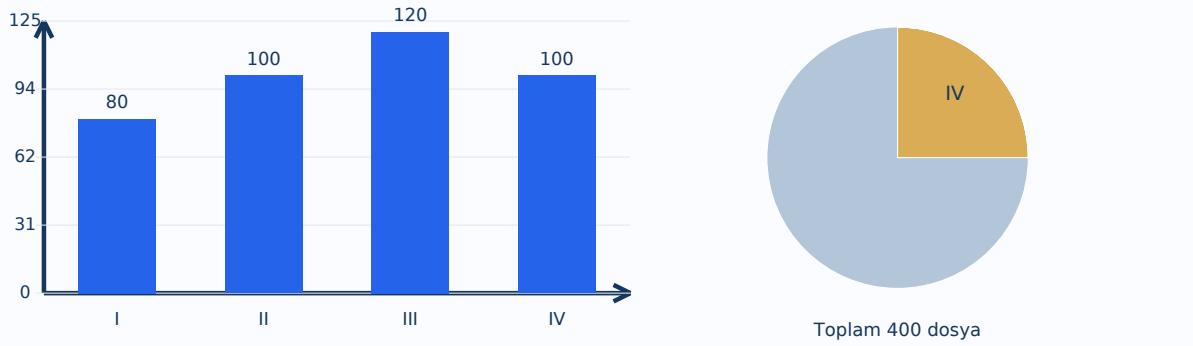
Bu toplam daire grafiğine dönüştürüldüğünde her çeyreğin yüzde payı sırasıyla %20, %25, %30 ve %25 olur. İlgili merkez açılar 72°, 90°, 108° ve 90°'dir; toplam 360°'dir. İkinci ve dördüncü çeyreklerin aynı yüzde payı, ikisinin de 100 dosya olmasıyla uyumludur. Üçüncü çeyreğin 120 dosyası ilk çeyrekteki 80'in 1,5 katıdır. Çeyreklerin aritmetik ortalaması 400/4=100 dosyadır; dördüncü çeyrek bu ortalamaya tam eşittir.

İki bağımsız denetim yapılabilir. Önce çeyrek değerleri toplanarak 400 elde edilir. Sonra her daire diliminin açısı 360'a bölünüp 400 ile çarpılır: 72/360×400=80, 90/360×400=100, 108/360×400=120, 90/360×400=100. Aynı dört sayı yeniden bulunduğu için çubuk grafiğiyle daire grafiği tutarlıdır. Bu kontrol, yüzdelerin yalnız dört değer arasındaki oranı gösterdiğini; kurumun bütün yıllardaki toplamı veya bütün kurumların verileri hakkında bir bilgi vermediğini değiştirmez.

Bütünleşik dört çeyreğin aynı veriden iki grafik gösterimi

Çeyrek	Dosya (adet)	Daire payı	Merkez açı	Bir önceki çeyreğe göre yüzde
I	80	%20	72°	Başlangıç
II	100	%25	90°	+%25
III	120	%30	108°	+%20
IV	100	%25	90°	Yaklaşık −%16,67
TOPLAM	400	%100	360°	Ardışık yüzdeler toplanmaz

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

Bütün grafik hesaplarında üç aşama birbirini tamamlar: Grafikten birimiyle birlikte doğru sayı okunur, karşılaştırmanın payı ve paydası açıkça yazılır, sonuç alternatif bir yolla yeniden sınanır. Mutlak farkın birimi, yüzde değişimin başlangıç tabanı ve pay yüzdesinin bütünü birbirinden ayrıldığında görsel temsilin olası yanıltıcılığı büyük ölçüde azalır. Sonraki konu, tek bir grafikteki hesabın ötesinde birden çok veri dizisini birlikte değerlendirme üzerinedir.

KONU 5.4

ÇOKLU VERİ KARŞILAŞTIRMASI

Birden fazla kurum, grup, dönem veya ölçüt aynı anda değerlendirildiğinde tek bir sayıyı okumak yeterli olmaz. Aynı grup kimi dönemde önde, kimi dönemde geride olabilir; en yüksek toplamı veren grup, en hızlı büyüyen grup olmayabilir. Üstelik farklı grafiklerde gösterilen değerler birbirinden farklı birimlere, kapsamlara ya da hesaplama yöntemlerine dayanıyorsa onları doğrudan karşılaştırmak matematiksel bakımdan uygun değildir. Çoklu veri karşılaştırması, bu sınırları açıkça belirleyerek birden fazla veri kaynağından güvenilir ve gerekçeli sonuç elde etmeyi konu alır.

Bu bölümde yer alan bütün kişi, işlem, dönem ve performans değerleri öğretim amacıyla oluşturulmuş temsili verilerdir; gerçek bir kamu kurumunun faaliyetlerine veya herhangi bir resmî istatistiğe karşılık gelmez. Grafikler PDF hazırlığında çizilebilir; ancak burada bütün grafik bilgileri, eksen birimleri ve değerler metin ve tablolarla da eksiksiz verilmiştir.

1. Karşılaştırmanın kapsamını sabitlemek

Bir karşılaştırmada önce “neyi, kiminle, hangi dönemde, hangi ölçüte göre” karşılaştırdığımız tanımlanır. Örneğin A biriminin birinci çeyrekte tamamladığı dosya sayısı ile B biriminin bütün yılda tamamladığı dosya sayısı aynı zaman aralığına ait değildir. A'nın işlem adedi ile B'nin işlem süresi de aynı tür nicelikler değildir. Görsellerde iki çubuk yan yana durduğu için bu bilgileri doğrudan büyüklük sırasına koymak doğru olmayabilir.

İki veri serisi aynı niceliği, aynı birimle, aynı tanımla ve aynı kapsamdaki dönemlerde gösteriyorsa doğrudan mutlak karşılaştırma mümkündür. Dönem, grup büyüklüğü veya ölçü türü farklıysa önce uygun normalleştirme yahut payda seçimi gerekir. Normalleştirme bütün farkları ortadan kaldırmaz; yalnız seçilen ölçüte göre karşılaştırılabilir bir nicelik oluşturur. Dolayısıyla yöntem, sorulan amaca bağlıdır.

Çoklu veri karşılaştırması öncesinde denetlenecek özellikler

Özellik	Uyumlu örnek	Doğrudan karşılaştırılamayan örnek
Zaman	İki grubun aynı çeyrek işlem sayısı	Bir grubun bir ayı ile diğerinin bir yılı
Birim	İki grupta dosya sayısı	Dosya sayısı ile çalışma saati
Grup tanımı	Aynı kriterle kayıtlı iki birim	Biri tüm başvurular, diğeri yalnız sonuçlananlar
Ölçek	İki eksende bin dosya	Biri dosya, diğeri bin dosya; dönüşüm yapılmamış
Payda	İki grup için kişi başına işlem	Birinde toplam işlem, diğerinde kişi başına işlem

2. Temsili çoklu veri tablosunu kurmak

A, B ve C olarak adlandırılan üç hizmet biriminin dört çeyrekte tamamladığı dosya sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Birim “tamamlanan dosya adedi”, dönem her biri eşit uzunlukta üç aylık çeyrektir. Kayıtların aynı dosyanın iki kere sayılmadığı ayrı birimler için tutulduğu ve aynı çeyreğe ilişkin sayım tanımlarının değişmediği varsayılmaktadır. Bu koşullar, toplam almayı ve birimler arasında doğrudan karşılaştırma yapmayı mümkün kılar.

Temsili üç birimin dört çeyrekte tamamladığı dosya adetleri

Birim	I. çeyrek	II. çeyrek	III. çeyrek	IV. çeyrek	Yıl toplamı
A	80	100	90	130	400
B	120	110	150	140	520
C	60	90	120	110	380
Çeyrek toplamı	260	300	360	380	1300

Önce bağımsız denetim yapılabilir: A satırının toplamı 80+100+90+130=400, B'nin 120+110+150+140=520 ve C'nin 60+90+120+110=380'dir. Bunların toplamı 1300'dür. Çeyreklerden gidilirse 260+300+360+380=1300 elde edilir. Genel toplamın iki ayrı yolla aynı bulunması hesapların tutarlı olduğuna işaret eder; ancak kayıtların gerçekliği veya eksiksizliği hakkında ayrıca güvence oluşturmaz.

3. Aynı dönemde grupları, aynı grupta dönemleri okumak

Dikey karşılaştırma, belirli bir çeyrekte üç birimin değerlerine bakmaktır. I. çeyrekte B'nin 120 dosyası, A'nın 80 ve C'nin 60 dosyasını aşar. III. çeyrekte de B, 150 ile öndedir; ancak A ile C'nin büyüklük sırası değişmiştir: C=120, A=90'dır. Yatay karşılaştırma ise belirli bir birimin çeyrekler arasında nasıl ilerlediğini gösterir. A'nın değerleri 80→100→90→130 biçimindedir; her adımda artış olduğunu söylemek yanlıştır, çünkü II'den III'e 10 dosya azalma vardır.

Dördüncü çeyrekte sıralama B=140, A=130, C=110 biçimindedir. Yıl toplamlarında da B=520 birinci, A=400 ikinci, C=380 üçüncüdür. Sıralamanın burada aynı çıkması bütün dönemler veya başka ölçütler için aynı kalacağını göstermez. Sonuca ulaşmak için her karşılaştırma düzeyinde uygun hücreler yeniden seçilir.

Çeyreklik liderler ve birim içi değişimlerin karşılaştırması

Ölçüt	A	B	C	Sonuç
I. çeyrek dosya	80	120	60	Lider B
III. çeyrek dosya	90	150	120	Lider B; ikinci C
IV. çeyrek dosya	130	140	110	Lider B; ikinci A
Yıllık toplam dosya	400	520	380	Lider B
İlk-son çeyrek mutlak farkı	+50	+20	+50	A ve C eşit artış

4. Dönem toplamı ile dönem değişimini birbirinden ayırmak

Bir çeyrekte bütün birimlerin tamamladığı dosya sayısına bakıldığında 260, 300, 360 ve 380 sayıları elde edilir. Çeyrekten çeyreğe toplam değişimler +40, +60 ve +20 dosyadır. Buna göre dördüncü çeyreğin toplamı en yüksektir, fakat bir önceki çeyreğe göre artış büyüklüğü en yüksek değildir. En büyük çeyrekler arası mutlak artış II. çeyrekten III. çeyreğe geçişte yaşanır.

Tek bir birimdeki azalışın bütün birimlerin toplamında artışla aynı anda görülebilmesi mümkündür. A'nın II. çeyrekte 100 olan değeri III'te 90'a inerken B 110'dan 150'ye, C 90'dan 120'ye çıkmıştır. Böylece üç grubun toplamı 300'den 360'a yükselir; artış +60'tır. Alt gruplardan birinin düşmesi bütünün de düşmesini gerektirmez.

$$\Delta T = (A_2 - A_1) + (B_2 - B_1) + (C_2 - C_1) = T_2 - T_1.$$

Anlamı: Aynı kapsam ve aynı birimdeki grupların toplam değerindeki değişim, grupların ayrı değişimlerinin toplamıdır.

Koşullar: Her iki dönemdeki toplamlar aynı ayrık grupları kapsar; tanım ve birim değişmez; eksik grup bulunmaz. Burada ΔT dosya adedidir.

II–III geçişi için A −10, B +40 ve C +30 değiştiğinden toplam −10+40+30=+60 dosyadır. Alternatif denetimde III. çeyrek toplamı 360'tan II. çeyrek toplamı 300 çıkarılır ve yine +60 elde edilir. Grup farklarını toplarken aynı birimin değişimi iki kez sayılmamalıdır.

5. Mutlak değişim aynıyken göreli değişimin farklı olması

İlk ve son çeyrek arasındaki mutlak değişim A için 130−80=50, B için 140−120=20 ve C için 110−60=50 dosyadır. A ile C aynı sayıda ek dosya tamamlamıştır. Buna karşılık başlangıç değerleri eşit değildir: A'nın göreli değişimi 50/80=%62,5; C'nin göreli değişimi 50/60≈%83,33'tür. Dolayısıyla mutlak artışta eşitlik varken göreli artışta C öndedir. B'nin göreli artışı 20/120≈%16,67'dir.

Bu yüzdeler tüm yılın toplamından değil, seçilmiş başlangıç çeyreğinden hesaplanır. “En yüksek yüzdesel artış” ile “en yüksek son dönem değeri” farklı sorulardır; ilkinde C, ikincisinde B öne çıkar. Karşılaştırılacak değişim ölçütü belirlenmeden “en başarılı” gibi genel bir sıralama kurmak, tabloda tanımlanmayan bir değerlendirme yargısı üretir.

$$\text{Değişim yüzdesi} = (\text{son değer} - \text{ilk değer}) / \text{ilk değer} \times 100.$$

Anlamı: Aynı niceliğin iki dönem arasındaki göreli değişimini başlangıç dönemi değerine göre ölçer.

Koşullar: Başlangıç değeri sıfırdan farklı olmalıdır; yüzdeye yorum kazandırmak için iki dönem aynı birimde ve aynı kapsamda ölçülmelidir. Negatif başlangıç durumları ayrıca anlam bakımından değerlendirilir.

I. ve IV. çeyrek arasında iki ayrı değişim ölçütü

Birim	Başlangıç	Son	Mutlak fark (dosya)	Başlangıca göre değişim
A	80	130	+50	%62,50
B	120	140	+20	Yaklaşık %16,67
C	60	110	+50	Yaklaşık %83,33

6. Farklı grupların toplam içindeki ağırlıklarını karşılaştırmak

Yıl boyunca toplam 1300 dosyanın A biriminde 400, B'de 520, C'de 380'i tamamlanmıştır. Birimlerin bütün içindeki payları sırasıyla 400/1300≈%30,77; 520/1300=%40 ve 380/1300≈%29,23'tür. Bu yüzdelerin paydası ortak olduğundan yıllık katkılar arasında doğrudan karşılaştırma yapılabilir. Yuvarlama ile yazılan oranlar burada %100'ü verir; diğer veri setlerinde her oranın bağımsız yuvarlanması küçük toplama sapmaları doğurabilir.

B'nin III. çeyrekteki 150 dosyasının aynı çeyrek toplamındaki payı 150/360≈%41,67'dir. Fakat 150 dosyanın B'nin yıllık 520 dosyası içindeki payı 150/520≈%28,85 olur. Aynı sayı farklı bir bütünün parçası olarak ele alındığında pay değişir. Burada ilk oran “III. çeyrekte B'nin ağırlığı”, ikincisi “B'nin yıllık üretiminde III. çeyreğin ağırlığı” sorularını karşılar.

Grup payı = grup toplamı / genel toplam; dönem içi grup payı = grubun dönem değeri / o dönemin toplamı.

Anlamı: İki ayrı karşılaştırmada uygun bütünün değiştiğini gösterir.

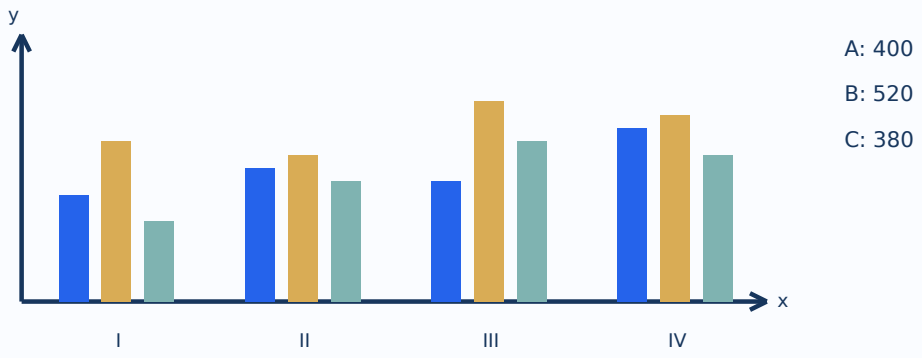
Koşullar: Payda sıfırdan büyük ve sayılan kayıtlar aynı bütünün ayrık parçaları olmalıdır; oran yorumunda dönem ve grup kapsamı belirtilmelidir.

7. İki grafik aynı veriyi anlatıyorsa tutarlılık kontrolü

Bazen bir grafikte üç birimin dönemlik dosya değerleri, başka bir grafikte bütün birimlerin çeyreklik toplamları verilmiş olur. Bu grafikler eşit sayıda veri noktası içermeyebilir, ancak aynı kayıtların iki görünümüyseler aralarında bir tutarlılık zorunluluğu vardır: Her çeyrekte üç birimin ayrı değerleri toplandığında toplam grafiğindeki sayı elde edilmelidir. Örneğin III. çeyrekte 90+150+120=360 ve IV. çeyrekte 130+140+110=380 olmalıdır.

Bir grafiğin 360, diğerinin aynı dönem için 350 göstermesi hemen “hata vardır” demeye yetmeyebilir; biri tamamlanan, diğeri kayda alınan dosyaları sayıyor olabilir. Önce başlık, tanım, tarih, ölçü birimi, kapsam ve varsa revizyon bilgisi okunur. Bunlar aynıysa farklılığın kaynağı araştırılır; farklıysa doğrudan eşitlik beklemek yanlış olur. Karşılaştırmada eşdeğer verilerin saptanması, sayısal işlemin ön şartıdır.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

8. Daire grafiğini başka veri serileriyle birleştirirken payda kontrolü

Yıllık 1300 dosyanın birimlere dağılımı daire grafiğiyle temsil edilirse her birim dilimi 360°'nin bir payıdır. A dilimi 400/1300×360≈110,77°, B dilimi 520/1300×360=144°, C dilimi 380/1300×360≈105,23° olur. Bu üç açı 360°'yi verir. Bir daire grafiğinin toplamı 1300 dosya olduğundan aynı açıyı temsil eden dilim, toplamı 650 olan başka bir grafikte aynı mutlak miktara karşılık gelmez.

Örneğin ikinci bir daire grafiğinde 200 dosyanın %40'ı işlenmişse bu dilim 80 dosyayı anlatır. İlk grafikteki %40'lık B dilimi ise 520 dosyadır. Oranların ikisi de %40 olduğu için iki dilimin açıları eşit, ancak temsil ettikleri adetler farklıdır. Daire grafiklerini birbiriyle karşılaştırırken hem yüzdeyi hem dairenin temsil ettiği toplamı okumak gerekir.

$$\text{Dilim açısı} = (\text{parça} / \text{bütün}) \times 360°;\ \text{parça} = \text{bütün} \times (\text{dilim açısı} / 360°).$$

Anlamı: Daire dilimi açısıyla kendi grafiğinin toplamındaki miktar arasında dönüşüm.

Koşullar: Kategoriler bütünü örtüşmeden tüketir, bütün sıfırdan büyüktür ve açı derece cinsindendir.

9. Birikimli seri ile dönemlik seri ayrı okunmalıdır

Temsili dosya tablosunda bütün birimlerin çeyreklik toplamları 260, 300, 360 ve 380'dir. Bunlar her çeyrekte o dönemde gerçekleşen, birbirinden ayrık dosya adetlerini gösterir. Yıl başından itibaren birikimli toplamlar ise sırasıyla 260, 560, 920 ve 1300'dür. Aynı dört dönemin grafiğinde her iki seri de yükselebilir; fakat birikimli toplamların değerleri dönemlik toplamlarla karıştırılmamalıdır.

Birikimli grafikte ikinci nokta 560, üçüncü nokta 920 ise III. çeyrekte tamamlanan dosya 920 değil, 920−560=360'tır. İkinci noktanın 560 olması da ilk iki çeyrekteki 260+300 toplamını gösterir. Birikimli serinin dört değerini 260+560+920+1300 diye toplamak aynı dosyaları tekrar tekrar sayar. Ayrıca birikimli seri bir noktadan diğerine düşerse, bunun yeni dönemde negatif üretim anlamına mı yoksa geriye dönük kayıt düzeltmesine mi karşılık geldiği tanım olmadan kesinleşmez.

Dönemlik ve birikimli verinin karşılığı

Çeyrek	Dönemlik tamamlanan dosya	Yıl başından beri birikimli dosya	Birikimden dönemlik kontrol
I	260	260	260
II	300	560	560−260=300
III	360	920	920−560=360
IV	380	1300	1300−920=380

10. Grup büyüklükleri farklıysa kişi başına ölçüt oluşturmak

IV. çeyrekteki tamamlanan dosya adedi A için 130, B için 140 ve C için 110'dur. Aynı dönemde bu birimlerde sırasıyla 5, 7 ve 5 kişinin çalıştığı kabul edilsin. Toplam dosyada B en yüksek değere sahipken kişi başına dosyada A=130/5=26, B=140/7=20 ve C=110/5=22 bulunur. Dolayısıyla toplam hacim ile kişi başına hacim karşılaştırmasında lider farklı olabilir. Kişi başına hesap ortalama bir iş yükü göstergesidir; kişilerin gerçekte eşit sayıda işlem yaptığı varsayımını içermez.

Üç birimin toplamı 380 dosya, toplam kişi sayısı 17'dir; bütün grup için kişi başına ortalama 380/17≈22,35 dosyadır. Üç ayrı birim ortalamasının basit ortalaması (26+20+22)/3≈22,67 olur. Bu iki sonucun farklı olmasının nedeni birimlerin çalışan sayılarının eşit olmamasıdır. Grup başına ortalamaların doğrudan aritmetik ortalamasını almak, her gruba aynı ağırlığı verir; tüm kişilerin ortalamasında ise gruplar kişi sayısına göre ağırlıklandırılmalıdır.

$$\text{Birleşik kişi başına ortalama} = (x_1+x_2+\ldots+x_k)/(n_1+n_2+\ldots+n_k) = [n_1\cdot(x_1/n_1)+\ldots+n_k\cdot(x_k/n_k)]/(n_1+\ldots+n_k).$$

Anlamı: Ayrık gruplardaki toplam üretim x_i, çalışan sayısı n_i olduğunda kişi başına birleşik ortalama.

Koşullar: Her n_i pozitif kişi sayısıdır; gruplar birbirini tekrar etmez; her dosya ilgili dönemde bir kez sayılır; personel sayısı dönem boyunca anlamlı bir karşılaştırma tabanıdır. Çalışma süreleri belirgin farklıysa kişi yerine kişi-saat gibi uygun maruziyet ölçüsü gerekebilir.

IV. çeyrekte hacim ve kişi başına hacim karşılaştırması

Birim	Dosya adedi	Çalışan kişi sayısı	Kişi başına dosya
A	130	5	26
B	140	7	20
C	110	5	22
Genel	380	17	Yaklaşık 22,35

11. Eşit olmayan sürelerde aynı zaman birimine geçmek

İki hizmet noktasının tamamladığı iş miktarı karşılaştırılırken biri dört, diğeri altı haftalık dönem raporlamış olabilir. İlk nokta 240 işlemi dört haftada tamamlamış, ikincisi 330 işlemi altı haftada tamamlamış olsun. Toplam açısından ikinci nokta 90 işlem daha fazladır. Ancak haftalık ortalama birincide 240/4=60, ikincide 330/6=55 işlemdir. Haftalık ortalama karşılaştırmasında ilk nokta öndedir. İkisi için dört haftalık eşdeğer miktar sırasıyla 240 ve 220 işlemdir.

Böyle bir dönüştürme, çalışmanın her haftaya eşit dağıldığını kanıtlamaz. Ölçü yalnız gözlenen dönem boyunca ortalama hızdır. İşlerin zorlukları, haftalık çalışma günü sayısı ve hizmet alan kişi sayısı farklıysa karşılaştırmanın bağlamsal sınırı ayrıca belirtilmelidir. Örneğin dönemlerin iş günü sayısı verilmişse işlem/iş günü oranı işlem/hafta oranından daha anlamlı olabilir.

12. İki yönlü tabloda satır yüzdesi ile sütun yüzdesinin farklılığı

Bir tarama çalışmasında iki başvuru türü için üç birimin kayıtları incelenmiş olsun. A biriminde Tür X 40, Tür Y 10; B'de X 30, Y 30; C'de X 20, Y 70 kişidir. Satır toplamları sırasıyla 50, 60 ve 90; sütun toplamları X için 90, Y için 110 ve bütün kayıtlar için 200'dür. Bu tablodaki bir hücrenin oranı, seçilen paydaya göre farklı bir anlam kazanır.

Örneğin A'daki X türünün A içindeki oranı 40/50=%80'dir. A'nın bütün X türü başvurular içindeki payı 40/90≈%44,44; aynı 40 kaydın bütün tablo içindeki payı ise 40/200=%20'dir. Bu değerlerin hiçbiri diğerinin yerine geçmez. Sütun yüzdesi ile satır yüzdesini karşılaştırıp sırf farklı oldukları için bir çelişki bulunduğunu söylemek hatalıdır.

İki yönlü temsili kayıt tablosu

Birim	Tür X	Tür Y	Toplam
A	40	10	50
B	30	30	60
C	20	70	90
Toplam	90	110	200

A ile C'nin toplam kayıtları 50 ve 90'dır. Buna karşılık X türünde A=40, C=20 olduğundan toplam büyüklüğü daha küçük A'nın bu alt türdeki sayısı daha fazladır. Bir grubun genel toplamının küçük olması, her alt türde de küçük olacağını gerektirmez. Tür seçimi ve toplam tabanı bu nedenle birlikte belirtilir.

13. Aynı iki grubun farklı alt kümelerdeki oranlarının birleşik sonuçla tersleşmesi

Farklı büyüklükte ve bileşimde alt grupların birleştirilmesi, yalnız toplam yüzdelerine bakıldığında yanıltıcı olabilir. Öğretici bir örnekte A ve B gruplarının kolay ve güç olarak iki alt koşuldaki başarı adetleri aşağıda verilmiştir. A, kolay koşulda 9/10=%90; B, 80/100=%80 başarı göstermiştir. Güç koşulda A=20/100=%20, B=1/10=%10'dur. Yani her iki koşulun kendi içinde A'nın başarı oranı B'den yüksektir.

Tüm kayıtlar birleştirildiğinde A'nın başarılı 9+20=29, toplam 10+100=110 kaydı vardır; oranı 29/110≈%26,36'dır. B'nin başarılı sayısı 80+1=81, toplamı 100+10=110 olduğundan oranı 81/110≈%73,64'tür. Birleşik oran sıralaması B lehine tersine dönmüştür. Bunun nedeni A kayıtlarının büyük kısmının güç, B kayıtlarının büyük kısmının kolay koşulda bulunmasıdır. Bu olay, alt grupların bileşim ve ağırlıklarının toplam oranı değiştirebilmesine örnektir; veriden gruplardan birinin neden başarılı olduğuna dair nedensel sonuç çıkarılamaz.

Alt koşullarda ve birleştirilmiş durumda başarı oranlarının karşılaştırılması

Koşul	A başarılı / toplam	A oranı	B başarılı / toplam	B oranı
Kolay	9 / 10	%90	80 / 100	%80
Güç	20 / 100	%20	1 / 10	%10
Birleşik	29 / 110	Yaklaşık %26,36	81 / 110	Yaklaşık %73,64

Bu tür bir durumda “A her koşulda daha yüksek orana sahipti, öyleyse bütün kayıtlar birleştiğinde de daha yüksek olmalıdır” çıkarımı geçerli değildir. İki grubun alt koşullardaki payları aynı olsaydı toplam sonuç başka biçimde oluşabilirdi. Burada öncelikle her grubun paydasının hangi alt koşullarda yoğunlaştığına bakılır.

14. Başlangıcı yüz kabul eden endeksle büyüme hızlarını kıyaslamak

Farklı başlangıç büyüklüklerine sahip serilerde göreli gelişim eğilimini görmek için seçilen başlangıç döneminin değeri 100 kabul edilebilir. Bu endeks yöntemi A, B ve C'nin ilk çeyrek değerlerini ayrı ayrı 100 yapar. Dördüncü çeyrekte A endeksi 130/80×100=162,5; B endeksi 140/120×100≈116,67; C endeksi 110/60×100≈183,33 olur. Endeksi yüksek olan serinin mutlak son değeri en yüksek olmak zorunda değildir.

Bu gösterim, tüm gruplar için başlangıcı ortak 100 düzeyine getirir; başlangıçtaki işlem hacimlerinin eşit olduğu anlamına gelmez. Dördüncü çeyrekte C'nin endeksi 183,33 iken tamamladığı dosya sayısı 110'dur. B'nin endeksi yalnız 116,67 olsa da mutlak hacmi 140 dosyadır. Endeks, büyüklüğü değil, seçilen tabana göre göreli düzeyi gösterir. Başlangıç değeri sıfırsa bu oranla endeks kurulamaz.

$$\text{Endeks}(t) = [x(t) / x(\text{başlangıç})] \times 100.$$

Anlamı: Aynı veri serisinin başlangıç düzeyi 100 kabul edildiğinde karşılaştırılan dönemdeki göreli düzeyi.

Koşullar: Başlangıç değeri sıfırdan farklıdır; değerler aynı türden ölçülmüştür; seçilen başlangıç dönemi tüm seriler için açıkça belirtilir.

15. Ortak ölçek ve çift eksenli grafiklerin sınırı

İki grafikte y ekseni farklı aralıklarla işaretlenmişse çizgi veya sütunların görsel eğimleri yanıltıcı olabilir. Örneğin bir panel 0–200 dosyayı, diğeri 100–160 dosyayı gösteriyorsa ikincide 120'den 140'a değişen seri daha dik görünse bile mutlak artış yalnız 20 dosyadır. Grafikler karşılaştırılırken eksenin başlangıcı, adım büyüklüğü ve birim açık biçimde okunmalıdır. Eşit ölçekli grafikler kullanılabiliyorsa görsel karşılaştırma daha nettir.

Çift eksenli grafiklerde sol eksenin dosya, sağ eksenin kişi sayısı gösterdiği bir çizim düşünelim. İki çizginin kesişmesi veya aynı yükseklikten geçmesi, bu iki niceliğin sayısal olarak eşit olduğu anlamına gelmez. Grafik tasarımında eksenlerden birinin keyfî ölçekte büyütülmesi iki seri arasında güçlü bir ilişki varmış izlenimi verebilir. Bu nedenle ortak olmayan ölçüler, yalnız grafik üzerindeki konumlarına bakılarak bölünmez veya çıkarılmaz.

> **Görsel yakınlık sayısal eşitlik değildir** Farklı birim veya ölçek kullanan grafik çizgilerinin aynı piksel yüksekliği, sayısal değerlerinin aynı olduğunu göstermez. Her nicelik kendi açıklanmış ekseninden okunur; gerekiyorsa ortak birime dönüştürülür.

16. Tarih aralıkları, eksik kayıtlar ve örtüşen veri kümeleri

Bir grafikte ocak–haziran, diğerinde mart–ağustos dönemi yer alıyorsa doğrudan toplam karşılaştırması iki ayrı süreyi kapsar. Her iki serinin ortak ayları mart–hazirandır. Yalnız ortak dönemler karşılaştırılmak isteniyorsa önce her grafikten bu dört ayın değerleri alınır. Her grafikte ayların tam ve karşılaştırılabilir kayıtlar içerdiği ayrıca değerlendirilir. İlk grafikte ocak–şubat bulunması, ikinci grafikte temmuz–ağustos bulunması bunların ortak döneme otomatik katılacağı anlamına gelmez.

Ayrıca aynı dosyanın iki sistemde kayda girebildiği bir veri kümesinin toplamı, iki kayıt sayısının basit toplamı olmayabilir. Örneğin sistem X'te 70, sistem Y'de 55 dosya görünür ve bunların 15'i iki sistemde de bulunursa tekil dosya sayısı 70+55−15=110'dur. Ortak kayıt sayısı 15 bilinmiyorsa toplam tekil dosya sayısı kesin belirlenemez. Ayrık gruplar için toplam formülü ile kesişen kayıt kümelerinin birleşim formülü aynı değildir.

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Anlamı: İki veri sistemindeki tekil kayıtların toplamı bulunurken her iki sistemde de yer alan ortak kayıtlar yalnız bir kez sayılır.

Koşullar: X ve Y sonlu kayıtlardır, kimlik eşlemesi ortak kayıtları güvenilir biçimde belirler ve ölçülen dönem/kapsam aynıdır.

17. Güvenilir çıkarım için veri toplama kapsamı ve nedensellik ayrımı

İki grubun ortalamaları veya artışları farklı olduğunda gözlenen farkın nedeni yalnız sayılardan kesin olarak belirlenemez. Bir grupta işlem adedinin yüksek olması, personelin bireysel hızının ya da hizmet kalitesinin daha yüksek olduğunu kendiliğinden göstermez. Gruplar farklı sayıda çalışanla, farklı tür dosyayla, farklı çalışma sürelerinde veya farklı kayıt kurallarıyla çalışmış olabilir. Sayısal sonuç açık biçimde söylenebilir; bunu açıklayan nedenin ayrıca ölçülmesi gerekir.

Veri setinin temsili olduğu durumlarda hesaplanan oranların ülke çapında geçerli olduğu veya belirli bir resmî birimin performansına karşılık geldiği iddia edilemez. Örneklem üzerinden daha geniş kitleye sonuç aktarırken örneklemin seçim biçimi, gözlemlerin bağımsızlığı ve dağılımı önem taşır. Buradaki karşılaştırmalar, verilen kayıtlar üzerinde matematiksel işlem ve yorum yapma yöntemini öğretmek için kullanılmıştır.

18. Bütünleşik örnek: dört dönem ve üç birimden karar ölçütü üretmek

Temsili A, B ve C birimlerinin dört çeyrek tablosuna yeniden dönelim. Bir yöneticinin yalnız “en çok toplam dosyayı tamamlayan birim” ölçütünü kullandığı düşünülürse yıl toplamları A=400, B=520, C=380 olduğundan B birinci olur. Aynı kişi “ilk ve son çeyrek arasında mutlak dosya artışı en yüksek birim” ölçütünü kullanırsa A ve C, +50 ile eşit birinci olur. “Aynı dönemdeki yüzdesel artış” ölçütünde ise C yaklaşık %83,33 ile birincidir. Bunlar aynı verinin farklı fakat açıkça belirtilmiş ölçütlerle ürettiği farklı sonuçlardır.

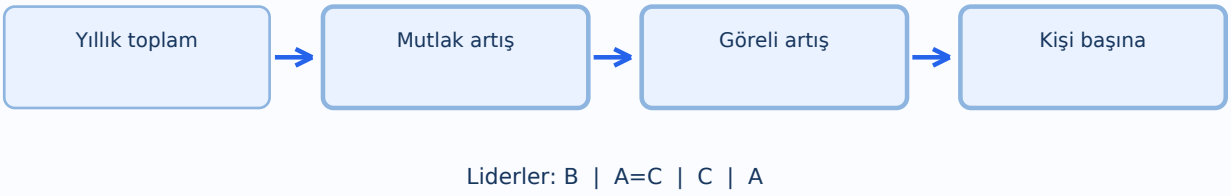
IV. çeyrek için çalışan sayıları A=5, B=7 ve C=5 kabul edildiğinde "kişi başına en fazla dosya" ölçütünde A, 26 dosya/kişiyle öndedir. B'nin toplam dosya adedi 140 ile en yüksek olmasına rağmen kişi başına sayısı 20'dir. Genel kişi başına ortalama ise 380/17≈22,35 dosyadır. Yıllık dosya değerlerini IV. çeyreğin kişi sayılarına doğrudan bölüp yıllık kişi başına üretim diye adlandırmak uygun değildir; yıl boyunca personel sayısı bilinmediğinden pay ve payda aynı zaman kapsamını temsil etmez.

Bir başka ölçüt de bütün birimlerin çeyreklik toplam artışına bakmaktır: 260→300→360→380 dizisinde en büyük mutlak dönemler arası artış +60 dosyayla II'den III'e geçiştedir. Bu sonuç A'nın aynı geçişte 10 dosya düşmesiyle çelişmez; B ve C'deki toplam +70 artış bu azalışı aşar. Böylece toplam, bireysel katkı, kişi başı hacim ve göreli büyüme birbirine karıştırılmadan birlikte yorumlanabilir.

Aynı temsili veri seti için farklı karar ölçütleri

Ölçüt	Hesaplanan değerler	Veriden kesin çıkan sonuç
Yıllık en yüksek toplam	A 400; B 520; C 380 dosya	B en yüksek
I–IV mutlak artış	A +50; B +20; C +50 dosya	A ve C eşit
I–IV göreli artış	A %62,50; B yaklaşık %16,67; C yaklaşık %83,33	C en yüksek
IV kişi başı dosya	A 26; B 20; C 22 dosya/kişi	A en yüksek
En yüksek toplam çeyrek	I 260; II 300; III 360; IV 380 dosya	IV en yüksek
En yüksek çeyrekten çeyreğe mutlak artış	+40; +60; +20 dosya	II'den III'e geçiş

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

19. Çoklu karşılaştırmada sonuçların yorumlanma sınırı

Birden fazla veri serisinde güvenilir sonuç bulmanın yöntemi, grafikleri bir arada görmeye çalışmaktan önce hangi karşılaştırmanın anlamlı olduğunu belirlemektir. Önce veri kaynaklarının kapsamları ve birimleri eşleştirilir; sonra istenen ölçüte uygun satır, sütun, dönem ve gruplar seçilir; toplam, fark, pay, göreli değişim, kişi başına oran veya dönemlik ortalama bunların tanımlarına uygun hesaplanır. Sonuç en az bir alternatif toplam, çapraz karşılaştırma ya da ters işlemle denetlenir.

Veri bulunmaması sıfır değere, görsel benzerlik nicel eşitliğe, oran büyüklüğü mutlak üstünlüğe ve birlikte değişim nedenselliğe dönüştürülmemelidir. Birbirini kesen grupların birleşimi ile birbirinden ayrık grupların toplamı farklı kurallara bağlıdır. Birleşik ortalamalarda her grubun ağırlığı vardır. Bütün bu ayrımlar, birden fazla gösterim veya veri grubuyla çalışırken matematiksel tutarlılığı ve yorumun dayanağını korur. Sonraki

bölümde artık mevcut verileri karşılaştırmanın ötesine geçilerek, eksik verinin hangi koşullarda hesaplanabileceği ve hangi koşullarda belirsiz kalacağı incelenecektir.

KONU 5.5

EKSİK VERİYİ HESAPLAMA VE ÇIKARIM

Bir tabloda boş bırakılmış hücre, bir grafikte etiketi silinmiş sütun veya daire grafiğinde değeri yazılmamış dilim her zaman bilinmeyen bir sayı anlamına gelmez. Kimi zaman değeri belirlemek için yeterli toplam, oran, ortalama ya da değişim bilgisi vardır; kimi zaman da çeşitli sonuçlar aynı verilerle uyumludur. Eksik veriyi hesaplamada ilk amaç, bulunmayan sayının matematiksel olarak tek biçimde belirlenip belirlenemediğini anlamaktır. Ardından doğru bağıntı kurulur, gerekli işlemler yapılır ve bulunan değer ilk koşullara geri yerleştirilir.

Bu konuda kullanılan bütün kurum, kişi, işlem, dönem, tutar ve grafik verileri öğretim amacıyla üretilmiş temsili sayılardır; herhangi bir kamu kurumunun gerçek istatistikleri değildir. Görsel grafiklerin PDF sürümünde çizilebilmesi için gereken değerler, ölçekler ve ilişkiler metinde de verilmiştir. Konunun ağırlığı grafik oluşturmak değil, bir grafik veya tabloda bulunmayan niceliğin hangi koşullarla hesaplanabileceğidir.

1. Eksik veri ile sıfırın, ölçülmeyen değerin ve uygun olmayan hücrenin ayrılması

Bir hücrede 0 yazıyorsa ilgili ölçüt bakımından gerçekten sıfır kayıt bulunduğu anlaşılabilir; ancak boş hücre, çoğunlukla değerin kaydedilmediğini ya da gösterilmediğini anlatır. "–" işareti bazı tablolarda uygulanamaz, bazılarında veri yok, bazılarında da gizlenmiş değer demektir. Bu işaretlerin açıklaması tablonun dipnotundan okunmalıdır. Açıkça belirtilmedikçe boş hücreyi sıfır kabul ederek toplama sokmak da her boş hücreye tahminî bir değer yazmak da geçersizdir.

Örneğin üç dönem için 35, 0 ve boş işareti yer alsın. Bilinen iki dönemin toplamı 35'tir; üç dönemin toplamı 35'tir demek için üçüncü dönemin sıfır olduğu da bilinmelidir. Buna karşılık toplamın 52 olduğu ayrıca ve aynı kapsamla belirtilmişse, boş hücrede $52-35-0=17$ kayıt bulunması zorunludur. Bu son hesap, toplamın bütün dönemleri kapsadığı ve bir kaydın yalnız bir dönemde sayıldığı varsayımına dayanır.

Aynı işaretin farklı bilgi durumları

Gösterim	Anlam	Hesaplama açısından sonuç
0	Ölçülen değer sıfır	Toplama sıfır olarak katılır
Boş hücre	Değer belirtilmemiş	İlave kural yoksa bilinmez
Uygulanamaz	O hücre için nicelik tanımlı değil	Sıfır gibi toplanmaz
Gizlenmiş değer	Değer vardır ama gösterilmemiş	Toplam veya ek koşulla çıkarılabilir

2. Tek eksik hücre ve aynı kapsamlı toplam

Birbirinden ayrık n grubun değerleri $a_1,a_2,\ldots,a_n$ olsun. T, bu grupların aynı birimdeki toplamını göstersin. Yalnız bir değer x eksik ve diğerlerinin tamamı biliniyorsa T'nin bilinenlerin toplamından çıkarılması x'i verir. Burada bağıntı salt aritmetik değil, grupların toplam kapsamı eksiksiz temsil ettiği kabulüne bağlıdır. Farklı dönemlerin aynı dosyayı yeniden saydığı kümülatif bir tabloda bu yöntem doğrudan uygulanmaz.

$$x=T-(a_1+a_2+\ldots+a_k)$$

Anlamı: T toplamını oluşturan k bilinen ayrık kalem dışındaki tek eksik değeri hesaplama.

Koşullar: Bilinen kalemlerle x aynı birimdedir; bütün kalemler toplamı tam ve çifte sayım olmaksızın oluşturur; başka bilinmeyen yoktur.

Öğretici bir kayıt çizelgesinde A, B, C ve D birimlerinin aynı ayda sırasıyla 48, 67, bilinmeyen ve 35 işlem yaptığı, toplamın 210 olduğu bildirilsin. Bilinenler 48+67+35=150 olduğundan C=210−150=60 işlemdir. Yeniden toplandığında 48+67+60+35=210 bulunur. Çıkarma ile elde edilen sonuç, dört grubun toplamına geri konarak bağımsız biçimde denetlenmiştir.

Toplam yardımıyla boş hücreyi tamamlama

Birim	A	B	C	D	Toplam
İşlem sayısı	48	67	Bilinmiyor	35	210
Tamamlandıktan sonra	48	67	60	35	210

3. Satır ve sütun toplamlarından birden çok eksik hücreyi bulma

İki yönlü bir tablonun satır toplamı, her bir satırdaki hücrelerin; sütun toplamı da her sütundaki hücrelerin toplamıdır. Tek bir hücreyi bulmak için bazen ilgili satırdaki bilinenleri, bazen ilgili sütundakileri kullanmak daha kolaydır. Birden çok eksik hücre varsa farklı toplamlar birbirini tamamlayabilir. Ancak satır ve sütun toplamları aynı kayıtların iki farklı özetidir; bunlar birbirinden bağımsız yeni veriler gibi iki kez genel toplama eklenmez.

Aşağıdaki tamamen temsili tabloda birimlerin ocak, şubat ve mart işlem sayıları ile dönem toplamları verilmiştir. Bilinmeyen A-şubat hücresi x, B-mart hücresi y, C-ocak hücresi z ile gösterilmiştir. Aynı hücreye ait her kayıt bir defa sayılır.

Üç birim ve üç ay için eksik hücreli temsili işlem tablosu

Birim	Ocak	Şubat	Mart	Satır toplamı
A	80	x	110	300
B	70	90	y	250
C	z	60	70	200
Sütun toplamı	220	260	270	750

A satırından 80+x+110=300, dolayısıyla x=110 bulunur. B satırında 70+90+y=250 olduğundan y=90'dır. C satırında z+60+70=200 eşitliği z=70 sonucunu verir. Satır hesabı dışında sütunlarla da denetim yapılır: Ocak 80+70+70=220, şubat 110+90+60=260, mart 110+90+70=270'tir. Toplamlar 300+250+200=750 ve 220+260+270=750 olarak eşleşir. Bu örnekte yalnız tek tek hücreler değil, bütün tablonun genel toplamı da doğrulanmıştır.

$$x=300-80-110=110;\ y=250-70-90=90;\ z=200-60-70=70$$

Anlamı: Her satırın bilinen hücrelerinin toplamını kendi satır toplamından çıkarma.

Koşullar: Bütün değerler aynı üç ayda kaydedilen işlem adetleridir; satırlar birbirini dışlayan birimlerdir.

4. Birden fazla bilinmeyende tek sonuca ulaşma koşulu

İki bilinmeyen x ve y için yalnız x+y=80 bilgisi varsa tek bir değer çifti zorunlu değildir: x=35,y=45 veya x=50,y=30 aynı toplamı verir. x ve y sıfır ya da pozitif tam sayı olsa bile birden çok seçenek kalır. İkinci ve gerçekten yeni bir bağıntı, belirsizliği giderebilir. Örneğin x−y=20 verilirse iki denklemi toplayarak 2x=100, x=50 ve y=30 bulunur. Çözümün doğrulaması 50+30=80 ve 50−30=20 biçimindedir.

Fakat ikinci koşul "2x+2y=160" olsaydı yeni bilgi sağlanmazdı; bu ifade yalnız ilk toplamın iki katıdır. İki eşitlik yazılmış olması, iki farklı bilgimizin bulunduğunu göstermez. Eksik verinin tek olması için bağımsız kısıtların yeterli, uyumlu ve değişkenlere ilişkin olması gerekir. Aksi durumda çözüm sayısı birden fazla olabilir veya çelişik veriler yüzünden hiç çözüm bulunmayabilir.

İki eksik değerin belirlenebilirlik durumu

Verilen bağıntılar	Uygun değer çiftleri	Sonuç
x+y=80	(35,45), (50,30) ve diğerleri	Tek sonuç yok
x+y=80; x−y=20	Yalnız (50,30)	Tek sonuç
x+y=80; 2x+2y=160	İlk koşulun tekrarı	Tek sonuç yok
x+y=80; x+y=90	Ortak değer çifti yok	Çelişki

5. İki yönlü tabloda eksik satır ve sütun hücreleri

İki kategorik özelliğin kesişiminde yer alan kayıtlar, satır ve sütun toplamları üzerinden de tamamlanabilir. Bir çalışma grubunda A türünden 70, B türünden 50 kayıt olsun. Kategori 1'de toplam 60, kategori 2'de toplam 60 kayıt bulunuyor. A grubunun kategori 1'de 30 kayıt oluşturduğu bilinsin. O hâlde A'nın kategori 2 değeri 70−30=40; kategori 1'de B değeri 60−30=30; B'nin kategori 2 değeri 50−30=20'dir. B için 30+20=50, ikinci sütunda 40+20=60 kontrolü sonucu doğrular.

Satır ve sütun toplamından çift yönlü eksik hücre hesabı

Grup	Kategori 1	Kategori 2	Satır toplamı
A	30	40	70
B	30	20	50
Sütun toplamı	60	60	120

Bu tablodaki A-kategori 1 hücresi 30 olarak verilmemiş olsaydı, yalnız satır ve sütun toplamlarından dört hücrenin her biri kesin bulunamazdı. Örneğin A-kategori 1 değeri 25 seçilirse diğer hücreler sırasıyla 45,35 ve 15; 30 seçilirse 40,30 ve 20 olur. İki düzen de aynı satır ve sütun toplamlarını karşılar. Bu nedenle toplamların iki yönde dengeli olması tek başına bütün hücrelerin bilindiğini göstermez.

6. Oran ve yüzdeyle gizli adet hesabı

Bir grubun bütündeki payı p yüzde ve bütünün adedi T ise grubun sayısı x=T·p/100 bağıntısıyla hesaplanır. T'nin gerçekten ilgili grubun dâhil olduğu toplam olması zorunludur. Oran, "bütünün %30'u" şeklindeyse 600 kayıt içinde 180 kayıt bulunur. Bütünün %25'i olan ikinci grup 150 kayıttır. Üç grup bütün kayıtları birbirini dışlayarak kapsıyorsa üçüncü grup 600−180−150=270 kayıt, toplamın %45'i olur.

$$x=T\cdot p/100;\ p=100x/T\ (T>0)$$

Anlamı: Toplam adet ve yüzde payı bilinen grubun adedi ile grup adedinden yüzde payına dönüşüm.

Koşullar: T sıfırdan büyüktür; p aynı bütüne göre tanımlanmıştır; adet gerekiyorsa tam sayı uyumluluğu kontrol edilir.

İkinci yoldan 180+150+270=600, yüzdelerden %30+%25+%45=%100 bulunduğunda iki gösterim tutarlıdır. Bununla birlikte yüzde tam olarak mı, yoksa yuvarlanmış mı bildirildiği önemlidir. Örneğin "yaklaşık %30" ibaresinden 600 kaydın kesinlikle 180'i olduğunu ileri sürmek mümkün değildir; yaklaşık oran birden fazla tam sayı adediyle uyumlu olabilir.

Yüzde paylarından eksik grup adedi

Grup	Toplam içindeki pay	Adet
A	%30	180
B	%25	150
C	%45	270
Genel toplam	%100	600

7. Koşullu yüzdede doğru paydayı kullanma

Bir tabloya göre A grubunda toplam 40 kişiden 24'ü katılmış, 16'sı katılmamış olsun. B grubunda toplam 60 kişi bulunsun. İki grubun toplam katılımcı sayısı 54 olarak verilirse B'de katılanlar 54−24=30, katılmayanlar 60−30=30 olur. Böylece A'da katılım oranı 24/40=%60, B'de 30/60=%50 ve bütün 100 kişi içindeki katılım oranı 54/100=%54'tür.

Koşullu yüzde ve genel yüzdeden tamamlanan katılım tablosu

Grup	Katılan	Katılmayan	Toplam	Grup içi katılım yüzdesi
A	24	16	40	%60
B	30	30	60	%50
Bütün gruplar	54	46	100	%54

Burada "A grubunun katılımı %60" ifadesinin paydası 40'tır; "katılanlar arasında A grubunda bulunanların payı" incelenirse payda 54 olur ve oran 24/54≈%44,44 çıkar. İki yüzde farklı soruların sonucudur. Bir tabloya yüzde değeri eklenip eksik kayıt hesaplanırken hangi satırın, sütunun veya genel toplamın yüzde tabanı olduğu önce belirlenir. Grupların büyüklükleri farklıysa grup içi yüzdelerin düz aritmetik ortalaması genel oranı vermez: (%60+%50)/2=%55 iken gerçek genel oran %54'tür.

8. Daire grafiğinde bilinmeyen merkez açısı ve dilim değeri

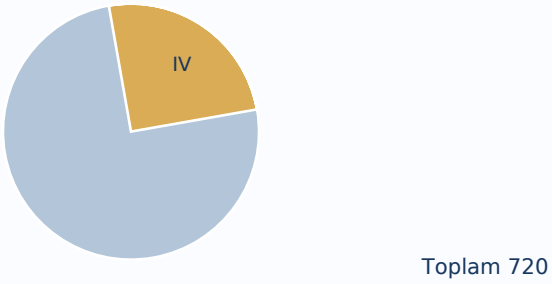
Bir daire grafiği bir bütünün tamamını gösteriyorsa merkez açıların toplamı 360 derecedir. Üç dilimin açıları 80°, 110° ve 90° olup dördüncünün açısı gösterilmemişse eksik açı 360°−80°−110°−90°=80° bulunur. Toplam 720 dosyanın dağılımı çizilmişse 80 derecelik dilimin adedi 720·80/360=160 dosyadır. Aynı hesabın oran yoluyla kontrolünde 80/360=2/9 ve 720·2/9=160 olur.

$$\theta_e = 360° - \Sigma\theta_i;\ x = T \cdot \theta_e / 360°$$

Anlamı: Tam daireyi oluşturan bilinen açılardan kalan dilimin açısını, toplam T ile eksik dilim adedini hesaplama.

Koşullar: Dilimler bütünün ayrık parçalarıdır; tüm merkez açılar aynı daireye ve aynı toplam T'ye aittir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

Daire grafiğindeki açıları başka dönem veya başka toplamla hazırlanmış bir dairenin açılarıyla doğrudan birleştirmek yanlıştır. Örneğin toplamı 360 kayıt olan ikinci bir grafikte yine 80°'lik dilim 80 kayıt eder; ilk grafiğin 160 kaydıyla aynı adet değildir. Dilim açılarının eşitliği, ancak toplamlar eşitse adet eşitliği verir.

9. Sütun grafiğinde eksik değer: eksen, ölçek ve başlangıç

Grafikte bir sütunun sayısal etiketi bulunmasa bile eksen değerleri ve ölçek biliniyorsa sütunun yüksekliğinden karşılık gelen sayı okunabilir. Dikey eksen sıfırdan başlayıp her santimetrede 20 dosya artıyorsa tabandan 4,5 santimetre yükselen sütun 4,5·20=90 dosyayı gösterir. Bu çıkarım, kağıt üzerindeki ölçümün temsili çizimle gerçekten uyumlu olması şartıyla geçerlidir. Sütun tepesi çizgiler arasında kalıyorsa çizim yaklaşık sonuç verebilir; kesin etiket bulunmadıkça gereksiz kesinlik iddia edilmez.

Öte yandan eksen 50'den başlayıp santimetrede 10 dosya artıyorsa tabandan 4,5 santimetre yukarıdaki sütunun değeri 50+4,5·10=95'tir; 45 değildir. Kesilmiş eksen veya farklı aralıklı ölçek, yalnız görüntüdeki uzunlukla sayısal değeri aynı tutmaz. Değer bulunabiliyorsa da eksenin başlangıç ve adım birimi hesabın parçasıdır.

Aynı çizim yüksekliğinin iki ölçeğe göre değeri

Dikey eksen başlangıcı	1 santimetrede artış	Yükseklik	Okunan değer
0 dosya	20 dosya	4,5 cm	90 dosya
50 dosya	10 dosya	4,5 cm	95 dosya

10. Çizgi grafiğinde birikimli toplamdan dönemlik değeri çıkarma

Birikimli bir çizgi grafiği, her dönem sonunda o ana dek tamamlanan toplamı gösterir. Başlangıç toplamı sıfır ve birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü dönem sonu değerleri 125, 280, 460, 710 olsun. Dönemlik işlemler sırasıyla 125, 280−125=155, 460−280=180 ve 710−460=250'dir. Üçüncü dönem sonu etiketi bulunmayıp üçüncü dönemde 180 işlem yapıldığı ayrıca bildiriliyorsa eksik toplam 280+180=460 olarak hesaplanabilir.

$$d_1=C_1-C_0;\ d_n=C_n-C_{n-1}\ (n\geq 2)$$

Anlamı: Birikimli C değerlerinin ardışık farklarından tek dönemlik d değerini bulma.

Koşullar: C_0 başlangıç birikimli toplamıdır; bütün C değerleri aynı kayıt tanımına, aynı zaman uzunluğu bağlamına ve sıralı bitiş tarihlerine dayanır.

Birikimli veride eksik dönem ve genel toplam kontrolü

Dönem	Dönem sonu birikimli	Dönemdeki işlem	Kontrol
Başlangıç	0	—	Başlangıç noktası
I	125	125	125−0
II	280	155	280−125
III	460	180	460−280
IV	710	250	710−460

Dört dönemlik işlemler toplandığında 125+155+180+250=710 elde edilir; bu son birikimli toplamdır. Buna karşılık 125+280+460+710=1.575 işlemi gerçek dönem toplamı olarak sunmak, önceki dönemlerdeki kayıtları defalarca saymak olur. Ayrıca birikimli çizginin iki noktası arasındaki doğru parçası, ara günlerde mutlaka aynı hızda işlem yapıldığı anlamına gelmez; ayrı dönemlik gözlemler verilmedikçe ara değerleri kesin olarak belirlemez.

11. Aritmetik ortalamadan bir eksik gözlemi bulma

Aynı ölçüde n adet gözlemin aritmetik ortalaması m ise bütün değerlerin toplamı n·m'dir. Gözlemlerden biri bilinmiyorsa eksik değeri bulmak için n·m toplamından bilinen gözlemler çıkarılır. Örneğin dört günlük ölçüm değerleri 18, 24, x ve 30 olsun; dört günün ortalaması 25 bildirilsin. Toplam 4·25=100 olmalı; bilinenler 18+24+30=72 olduğundan x=28 bulunur. Tekrar hesaplandığında (18+24+28+30)/4=100/4=25 çıkar.

$$x=n\cdot m-\Sigma(\text{bilinen } a_i)$$

Anlamı: Gözlem sayısı ve aritmetik ortalamadan bütün toplamı, ardından bilinmeyen tek gözlemi geri elde etme.

Koşullar: Ortalama bütün n gözleme eşit ağırlıkla uygulanır; bilinenler n−1 adettir; birimler aynıdır.

Ortalama bir tam sayı olmadığı hâlde bütün gözlemler tam sayı olabilir. Böyle durumlarda elde edilen toplam ve x'in ölçülen niceliğe uygun olup olmadığı ayrıca denetlenir. Ortalamanın yuvarlanmış olarak verildiği bir çizelgede n·m işlemi kesin toplamı değil yaklaşık bir değeri gösterebilir; tek kesin gözlem çıkarmak için daha ayrıntılı kayıt gerekir.

12. Ağırlıklı ortalamada gizli grup değeri

İki grup farklı sayıda gözlem içeriyorsa birleşik ortalama, grupların ortalamalarının basit ortalaması değildir. Birinci grupta 40 dosya ortalama 6 dakikada, ikinci grupta 60 dosya bilinmeyen x dakika ortalamayla tamamlanmış ve bütün 100 dosyanın birleşik ortalaması 7,8 dakika olsun. Toplam işlem süresi 100·7,8=780 dakikadır. İlk grubun süresi 40·6=240 dakika olduğundan ikinci grubun toplamı 780−240=540 dakikadır. Buna göre x=540/60=9 dakikadır.

$$m=(n_1m_1+n_2m_2)/(n_1+n_2);\ m_2=[m(n_1+n_2)-n_1m_1]/n_2$$

Anlamı: Grupların büyüklüklerine göre toplam ortalama ve bilinmeyen ikinci grup ortalaması.

Koşullar: Gruplar ayrık ve bütün dosyaları kapsar; n_1,n_2 pozitif tam sayıdır; zaman birimleri aynıdır.

Bağımsız denetimde 40·6+60·9=240+540=780 dakika ve 780/100=7,8 dakika elde edilir. Burada (6+9)/2=7,5 dakika seçmek iki grupta dosya sayısının eşit olduğu yanlış varsayımını eklemek olur. Bir toplam süre eksikse başka, bir grup ortalaması eksikse başka nicelik arandığından değişkenin birimi hesap öncesinde belirlenmelidir.

13. Oran verilmiş iki eksik değeri birlikte belirleme

Bir çizelgede iki grubun toplamı 168, sayıları arasındaki oran 3:4 olarak verilmiş olsun. Grupların sayıları 3k ve 4k ile gösterilir. 7k=168 olduğundan k=24; grup adetleri 72 ve 96'dır. Bunun doğrulaması 72+96=168 ve 72/96=3/4 biçimindedir. Aynı grupları 3 ve 4 diye yazmak, oranı gerçek adede dönüştürmeden bırakmak anlamına gelir.

$$x:y=a:b \text{ ve } x+y=T \Rightarrow x=T\cdot a/(a+b),\ y=T\cdot b/(a+b)$$

Anlamı: Toplamı ve parça oranı bilinen iki eksik değerin paylaştırılması.

Koşullar: a,b pozitif, T aynı iki parçanın toplamı, a+b sıfırdan farklıdır; istenen adetler gerekiyorsa tam sayı olmalıdır.

Buradaki 3:4 oranı ayrı iki dilimin yüzde paylarını doğrudan bildirmez. Önce bütün yedi paylık yapıda ilk grubun 3/7, ikinci grubun 4/7 payı olduğu anlaşılır. Toplam 168'in bu paylara dağıtılmasıyla bulunan adetlerin tam sayı olması da bağlamla uyumludur.

14. Birleşim verisinde çifte sayımı düzeltme

A ve B başlıklı iki kayıt grubu kısmen örtüşüyorsa bu grupların adetlerini doğrudan toplamak aynı kayıtları iki kez sayar. A grubunda 45, B grubunda 35, en az birine giren toplam farklı kayıt sayısı 68 ise iki grupta da bulunan kayıt sayısı 45+35−68=12'dir. Kontrol için yalnız A'da bulunanlar 45−12=33, yalnız B'dekiler 35−12=23 ve her ikisindekiler 12 olduğundan farklı kayıt toplamı 33+23+12=68 olur.

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|;\ |A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|$$

Anlamı: Kesişen iki kayıt grubunun ortak ve tekil sayımlarını ilişkilendirme.

Koşullar: A ve B, aynı tanımlı kayıt evreninin kümeleridir; adetler farklı kayıt sayısını gösterir.

Bununla birlikte tüm kayıtlar birden fazla kez sayılmış veya üç ayrı grupta ortak kayıtlar bulunuyorsa basit iki kümeli bağıntı doğrudan genellenemez. Sınav düzeyindeki iki küme örneğinde ortaklığın bilinmesi gereken nicelik olduğu açıktır; gerçek veri tablolarında önce kayıtların tekilleştirme ölçütü araştırılmalıdır.

15. Yuvarlanmış veya yaklaşık veriden kesin sayı çıkarılamaması

Bir grafiğin yanında "yaklaşık %42" yazması, toplam 200 kişiden mutlaka 84 kişinin kastedildiğini kanıtlamaz. Eğer yüzde en yakın tam sayıya yuvarlanmışsa, gerçek oran en az %41,5 ve %42,5'ten küçüktür (yarım değerler yukarı yuvarlanıyorsa). Bu aralık 200 kişi için en az 83 ve 85'ten küçük bir adet verir; dolayısıyla 83 veya 84 kişi söz konusu olabilir. Yuvarlama kuralı bilinmiyorsa sınırların kesinliği de belirsizleşebilir.

Ölçümün yaklaşık verilmesi, doğruluk aralığının eksik değere taşınmasını gerektirir. Daire grafiğindeki bir dilim "yaklaşık 100°" diye belirtilmişse kalan açı için yalnız yaklaşık bir sonuç bulunur. "En yakın 10 derece"

gibi açık yuvarlama kuralı bulunması sonuç aralığını daraltır, ancak gerçek değeri otomatik olarak tekleştirmez.

Yüzde yuvarlamasıyla uyumlu iki farklı adet

Toplam kişi	Tam sayı adet	Gerçek yüzde	En yakın tam yüzde
200	83	%41,5	%42 (yarım yukarı)
200	84	%42	%42

16. Eksik veri hakkında kesin, aralıklı ve mümkün çıkarımlar

Bir veri grubunda x+y=100 olduğu, x'in en az 30 ve y'nin en az 20 olduğu bilinsin. x≥30, y≥20 ve y=100−x olduğundan 100−x≥20, yani x≤80 bulunur. Böylece 30≤x≤80 kesin sınırıdır. Ancak x'in tek bir değer olduğu söylenemez: (x,y)=(30,70), (50,50) ve (80,20) koşullarla uyumludur. Verilerin tam sayı olduğu kabul edilirse bu aralıkta birçok tam sayı çözümü bulunur.

> **Belirlenebilirlik sınırı** Bir eksik verinin tek sayı olarak bulunamaması, hiçbir matematiksel sonuç çıkarılamadığı anlamına gelmez. Toplam, alt-üst sınır, mümkün değer kümesi veya zorunlu oran aralığı kesin olarak belirlenebilir.

Aynı mantık bir sütun grafiğinde tepe değerin belirli iki eksen çizgisi arasında bulunmasına da uygulanır. Çizimin çözünürlüğü değeri tam okumaya yetmiyorsa kesin 57 demek yerine yaklaşık 55–60 aralığında bulunduğu söylenebilir; ancak bu aralığın kendisi de eksen ve görsel güvenilirliğine dayanır. Matematiksel olarak tekleştiren bilgiyle yalnız yaklaşık konum veren gösterim birbirinden ayrılmalıdır.

17. Tutarsız toplamlar, negatif sonuçlar ve hata denetimi

Dört grubun adetleri 45, 38, 27 ve x, bütün toplamları 100 olarak verilmişse x=100−45−38−27=−10 çıkar. İşlemin aritmetik olarak sonucu vardır, fakat kayıt adedi negatif olamayacağından başlangıç verileri aynı kapsamda gerçek bir adet tablosu oluşturamaz. Bu durumda eksik hücreye −10 kayıt yazmak yerine toplam veya gruplardan en az birinin yanlış bildirildiği, farklı kapsam kullandığı ya da çifte sayım içerdiği değerlendirilir.

Bazen satır toplamları ile sütun toplamları farklı sonuçlar üretebilir. Örneğin aynı tablonun satır toplamları 80 ve 70, sütun toplamları 75 ve 85 olarak verilmişse satırdan genel toplam 150, sütundan 160 bulunur. Aynı kayıtların tam ve eksiksiz iki yönlü toplamı hem 150 hem 160 olamayacağı için en az bir bilgi yanlıştır. Yalnız birkaç hücreyi cebirsel olarak doldurmak bu çelişkiyi ortadan kaldırmaz.

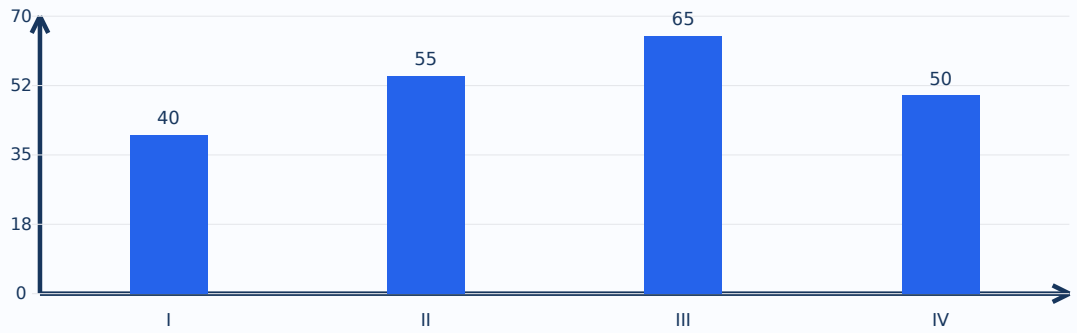
Eksik veri hesabında geçersiz sonuç işaretleri

Verilen bilgi	Aritmetik sonuç	Veri yorumu
45+38+27+x=100	x=−10	Adet bakımından geçersiz, veri/kapsam denetimi gerekir
Satır toplamları 80+70	150	Sütun toplamıyla eşleşmelidir
Sütun toplamları 75+85	160	Satır toplamından farklı; veri tutarsız

18. Görselde eksik çizilmiş sütun ve sıfırdan farklı eksen

Bir grafikte sütun çizilmemiş ancak toplamı diğer sütunlarla birlikte verilmişse eksik yükseklik, toplama dayalı adet belirlendikten sonra ölçeğe çevrilir. Örneğin dört aylık sıfır başlangıçlı ve her 1 santimetresi 10 dosyayı gösteren bir grafikte ilk üç sütun 40, 55 ve 65 dosya; toplam 210 dosyaysa dördüncü sütunun değeri 210−40−55−65=50 dosyadır. Çizimde bu sütunun yüksekliği 50/10=5 santimetre olmalıdır.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

Dikey eksenin 30'dan başladığı bir gösterimde aynı 50 dosya değeri için çizilen yüksekliğin yalnız (50−30)/10=2 santimetre olması gerekir. İki grafiğin eksen başlangıçları farklıysa aynı niceliği farklı sütun boylarıyla çizmesi çelişki değildir; görsel uzunluk değil sayısal eksen esas alınır.

19. Bütünleşik öğretici örnek: üç hücre, iki gösterim ve bağımsız denetim

Bölümün temel ilkelerini birleştirmek için A, B ve C birimlerinin üç ayda yaptığı işlemleri tekrar ele alalım. A'da 80, x ve 110 işlemin toplamı 300; B'de 70, 90 ve y işlemin toplamı 250; C'de z, 60 ve 70 işlemin toplamı 200'dür. Ay sütunlarının toplamı sırasıyla 220, 260 ve 270'tir. Aynı kaydın tek hücrede tutulduğu ve bütün değerlerin işlem adedi olduğu açıkça kabul edilsin.

İlk yoldan satır toplamları x=300−80−110=110, y=250−70−90=90, z=200−60−70=70 verir. İkinci yoldan şubat sütunundan x=260−90−60=110; mart sütunundan y=270−110−70=90; ocak sütunundan z=220−80−70=70 çıkar. Üçüncü denetim genel toplamdır: üç birimin satır toplamları 300+250+200=750, ay toplamları 220+260+270=750'dir. Böylece eksik üç değerin yalnız tek bir hesap zinciriyle değil, aynı tabloyu farklı yönde okuyan bağımsız denklemlerle de doğrulandığı görülür.

Eksik değerler tamamlandıktan sonra verileri dört parçalı bir daire grafiğine dönüştürmek yerine önce hangi bütünü temsil ettiğimizi açıklamak gerekir. Üç birimin bütün üç ay toplamına göre payları sırasıyla 300/750=%40, 250/750=%33⅓ ve 200/750=%26⅔'tür. Bu payların daire açıları sırasıyla 144°, 120° ve 96° olup 360° yapar. Başka bir deyişle tabloda bulunan 750 işlemin birimlere göre dağılımı, üç dilimli daireyle tutarlı biçimde gösterilebilir. Bu grafik birimlerin her bir ayındaki ayrı payları değil, üç ayın birlikte oluşturduğu bütünü temsil eder.

Eksik hücreler tamamlandıktan sonra üç birimin toplam içindeki dağılımı

Birim	Üç aylık toplam	750 içindeki pay	Dairede merkez açı
A	300	%40	144°
B	250	%33⅓	120°
C	200	%26⅔	96°
Genel toplam	750	%100	360°

İki bağımsız toplam yolu, üç farklı eksik hücrenin tekleşmesi ve aynı toplamın daire grafiğiyle tutarlı ifade edilebilmesi, eksik veri çözümünde güvenilir bir denetim zinciri kurar. Başka bir veri setinde bu zincir için yeterli bilgi bulunmayabilir; o durumda yalnız mümkün değerleri ya da bir aralığı açıklamak, uydurulmuş tek bir değerden daha doğrudur. Sonraki konu, tablo ve grafik değerlerini çok adımlı bir problem içinde birlikte değerlendirmeyi ele alacaktır.

KONU 5.6

GRAFİK DESTEKLİ PROBLEMLER

Grafik destekli bir problem, sayısal bir verinin görsel bir gösterimden alınmasıyla başlayan; bu verinin başka niceliklerle, bir hesap kuralıyla ya da bir karar koşuluyla ilişkilendirilmesini gerektiren durumdur. Sütun grafiğinde tek bir değeri okumak, çizgi grafiğindeki iki noktanın farkını hesaplamak veya daire diliminin yüzde payını bulmak tek başına temel grafik yorumudur. Buna karşılık bir dönem için elde edilen veriden iş gücü ihtiyacını, bir bütçe sınırına göre yapılabilecek işi veya birden fazla grubun karşılaştırılabilir verimini belirlemek birkaç aşamalı matematiksel model kurmayı gerektirir.

Bu bölümde kullanılan tüm kişi, paket, işlem, süre ve maliyet değerleri öğretim amacıyla oluşturulmuş TEMSİLİ VERİLERDİR; gerçek bir kurumun istatistiği, resmî işlem süresi veya ücret tarifesi değildir. Grafikler TXT biçiminde açıklamalı veri dizileri ve şema çizim yönergeleriyle temsil edilir. Bunların her biri metin üzerinden tek başına anlaşılabilecek şekilde yazılmıştır. İşlem sonuçları, sadece ilk grafik okumasına değil, işlemin sonunda farklı bir yoldan yapılan kontrolüne de dayandırılır.

1. Grafik destekli problemin katmanları: gözlem, model, sonuç

Bir grafikte Ocak, Şubat ve Mart dönemlerinde tamamlanmış dosya sayıları 120, 150 ve 180 olarak gösterilsin. Bu üç değer grafikte görülen gözlemlerdir. «Her dosya için ortalama 12 dakika iş ayrıldığı» bilgisi ise grafiğin kendisinde yer almayan, problemde ayrıca verilen bir hesap varsayımıdır. Üç ayın toplam dosya sayısı 120+150+180=450, toplam tahmini iş süresi 450×12=5.400 dakika, yani 90 saattir. Bu 90 saat gözlenen veri değildir; verilen dosya adedinin 12 dakika/dosya katsayısıyla modellenmesinden çıkan sonuçtur.

İlk kontrol dönemseldir: 120×12=1.440, 150×12=1.800, 180×12=2.160 dakika; toplam 1.440+1.800+2.160=5.400 dakikadır. İkinci kontrol birim üzerinden yapılır: 450 dosyanın her biri için 12 dakika ayrıldığında 450×(12/60)=90 saat bulunur. İş süresinin gerçekten 90 saat sürdüğünü iddia etmek için bütün dosyaların 12 dakikada tamamlandığı ayrıca bilinmelidir; ortalama ya da planlama katsayısı, tekil kayıtların gerçek zamanını göstermez.

$$T=\sum(n_i \cdot t_i);\ \text{aynı birim süre } t \text{ kullanıldığında } T=t\cdot\sum n_i.$$

Anlamı: Grafikten okunan her gruptaki iş adedi n_i ile bu gruba ait birim iş süresi t_i çarpılarak toplam çalışma süresi bulunur.

Koşullar: n_i sayım adedi, t_i dakika/iş veya saat/iştir; toplamda süre birimleri aynı olmalı; aynı işler iki kez sayılmamalıdır. Sabit t kısaltması yalnız bütün gruplarda aynı süre kabul ediliyorsa geçerlidir.

Temsili sütun grafiğinden süre modeline geçiş

Dönem	Grafik değeri (dosya)	Dosya başına süre (dakika)	Toplam süre (dakika)
Ocak	120	12	1.440
Şubat	150	12	1.800
Mart	180	12	2.160
Toplam	450	—	5.400

2. Grafik eksenini okuyup problemi doğru sayı ile başlatma

Dikey eksende 0, 20, 40, 60, 80 ve 100 işaretleri bulunan bir sütun grafiğinde 60 çizgisiyle aynı yükseklikte olan sütun 60 birimi gösterir. Grafiğin başlığı «haftalık tamamlanan başvuru» ise bu sayı başvurudur; «bin başvuru» yazıyorsa 60 bin başvurudur. Aynı sütun yalnızca «60» diye hesaplamaya taşındığında ölçekte bin çarpanı unutulabilir. Özellikle para, enerji ve nüfus örneklerinde, gösterilen sayı ile o sayının karşılık geldiği gerçek büyüklük ayrı yazılmalıdır.

Örneğin bir grafiğin ekseni «bin TL» olarak işaretlenmiş ve üç sütun 25, 30 ve 35 düzeylerine ulaşmış olsun. Bunlar sırasıyla 25.000 TL, 30.000 TL ve 35.000 TL'dir. Üç dönemin toplamı 90 bin TL, yani 90.000 TL'dir. Aynı veri için «ortalama 30» sonucu tek başına eksiktir; doğru ifade «dönem başına ortalama 30 bin TL»dir. Yükseklikleri santimetreyle ölçmek gerekmiyorsa gerçek eksen değerleri kullanılmalıdır. Dikey eksen sıfırdan değil 20'den başlıyorsa görsel sütun boyunun iki katına çıkması verinin iki katına çıktığını göstermez.

Grafik verisinin gerçek birimi Problemin hesabında eksen değerinin kendisi kadar eksenin ölçek çarpanı, veri birimi ve dönemin uzunluğu da korunur. Sıfırdan başlamayan eksenlerde görünen sütun boyları sayısal oran olarak yorumlanmaz.

3. Çizgi grafiğinden net değişim ve toplam hareket ayırımı

Bir depodaki gün sonu stokunu gösteren çizgi grafiğinin ardışık dört noktası 80, 110, 90 ve 130 adet olsun. Birinci gün sonu ile dördüncü gün sonu arasındaki net stok değişimi 130−80=50 adettir. Oysa grafik üzerindeki adım değişimleri +30, −20 ve +40 olduğundan mutlak hareket büyüklüklerinin toplamı 30+20+40=90 adettir. 90, net artış değildir; gözlenen üç günlük stok seviyesi değişimlerinin işaretsiz toplamıdır. Gün sonu stok seviyeleri ayrıca teslim alınan ve teslim edilen ürünlerin ayrı ayrı toplamlarını da göstermez. Aynı gün içinde giriş ve çıkış gerçekleşebileceği için bu iki akışın büyüklüğü çizgiden tek başına belirlenemez.

Kontrol için günlük farklar işaretleriyle toplanır: 30−20+40=50. İlk stok 80'e bu net değişim eklendiğinde 130 bulunur. Böylece çizgi grafiğinde iki farklı sonuç, aynı başlangıç ve bitiş değerinden bağımsız denetlenmiş olur. Yalnız gün sonu stokları bilindiği için söz konusu farklara «net stok değişimi» denir; «gelen mal» veya «satılan mal» denmez.

$$\text{Net değişim} = \text{son seviye} - \text{ilk seviye} = \sum(\text{ardışık işaretli değişimler}); \text{toplam seviye hareketi} = \sum|\text{ardışık değişim}|.$$

Anlamı: İşaretli değişimler birbirini kısmen götürürken mutlak değerler tüm yukarı ve aşağı hareketleri birlikte toplar.

Koşullar: Grafik aynı niceliğin karşılaştırılabilir zaman noktasındaki seviyelerini vermelidir. İşaretli seviye farkı akış giriş-çıkış miktarlarını tek başına belirlemez.

Gün sonu stok grafiğindeki seviye ve farkların ayrımı

Gün	Gün sonu stok (adet)	Önceki güne göre net fark
1	80	Başlangıç gözlemi
2	110	+30
3	90	−20
4	130	+40
İlk–son fark	130−80	+50

4. Dönemsel adet ve birikimli değerleri aynı problemde karıştırmama

Bir çizgi grafiği yapılan işlemlerin birikimli toplamını göstermekte ve hafta sonlarında sırasıyla 70, 170, 290 ve 440 dosyaya ulaşmaktadır. Bu dört noktanın 70+170+290+440 olarak toplanması, daha önceki haftaların işlemlerini tekrar tekrar sayar. İlk dört haftanın dönemlik adetleri sırasıyla 70, 100, 120 ve 150'dir; bunların toplamı 440 olup dördüncü hafta sonundaki birikimli değere eşittir. Böylece son dönemdeki iş adedi 150 ve ilk dört haftadaki toplam 440 dosyadır.

Son iki haftanın birlikte 270 işlem yaptığı sonucu 120+150=270 olarak bulunur. Aynı sonuca birikimli üçüncü haftanın bitişi ile ikinci haftanın bitişi arasını değil, dördüncü hafta sonu 440'tan ikinci hafta sonu 170'i çıkararak da ulaşılır: 440−170=270. Grafik üzerinde «birikimli» ibaresi bulunmasa da art arda artan değerler bunun ipucu olabilir; ancak tek başına artıyor olmak birikimli grafik olduğunu kesinleştirmez. Grafik başlığındaki tanım belirleyicidir.

Birikimli çizgi grafiğinden dönemlik işlem adetleri

Hafta	Birikimli toplam (dosya)	Haftalık işlem (dosya)
1	70	70
2	170	100
3	290	120
4	440	150
Toplam	Son değer 440	440

5. Grafikten ölçülen kapasite ve hedefe ulaşma süresi

Bir hizmet biriminin bir haftada 60 dosya tamamladığını gösteren sütun, bu dönemin gözlenen üretimini verir. İşin aynı düzenle sürmesi varsayıldığında 270 dosyalık bir ek iş yükünün kaç haftada biteceği ileriye dönük bir tahmindir. Her hafta 60 dosya tamamlandığı ve dosyaların haftalar arasında aktarılabildiği kabul edilirse 270/60=4,5 haftalık iş hacmi bulunur. Fakat iş yalnız tam haftalık dönemlerle planlanıyorsa beşinci haftanın içinde tamamlanır; «en az beş tam hafta dönemi» gerekir.

Başka bir ifadeyle dört haftada 240 dosya tamamlanır, 30 dosya kalır; beşinci haftanın kapasitesi 60 olduğundan kalan 30 dosya tamamlanabilir. Bu hesap doğrusal üretim varsayımına bağlıdır. Grafikte yalnız bir haftanın üretimi bulunuyorsa gelecekte bütün haftaların da 60 dosya süreceği kesin bir grafik sonucu değildir. Kapasite ile gerçekleştirilen üretim de ayrılmalıdır: 60 bir dönemin gerçekleşen çıktısıdır; bu kişinin veya birimin üst kapasitesinin her koşulda 60 olduğu anlamına gelmez.

> Gerekli tam dönem sayısı = ⌈hedef / bir dönemdeki uygun çıktı⌉.
>
> **Anlamı:** İş yalnız tam dönem sınırında sonuçlandırılıyor ve her dönem sabit miktarda çıktı üretiyorsa hedefi karşılamak için gereken en küçük dönem sayısı.
>
> **Koşullar:** Hedef ve çıktı aynı birimdedir; çıktı sıfırdan büyüktür; dönemler arasında kapasite kaybı yoktur; tam döneme yuvarlama gerekir. Tamamlanma zamanı dönem içinde soruluyorsa ayrıca kesirli süre hesabı yapılır.

6. Birden fazla sütun dizisiyle birim maliyet ve toplam bütçe

A ve B gruplarının bir haftada yaptığı işlem sayıları iki sütunlu temsili grafikte sırasıyla 80 ve 120 olsun. A işleminin birim gideri 15 TL, B işleminin birim gideri 10 TL olarak ayrıca verilsin. Toplam gider A için 80×15=1.200 TL, B için 120×10=1.200 TL ve genel toplamda 2.400 TL'dir. A grubu daha az sayıda işlem yapmasına rağmen iki grubun toplam gideri eşittir; işlemlerin birim maliyetleri farklıdır.

Tüm 200 işlemin ortalama birim gideri 2.400/200=12 TL'dir. 15 TL ile 10 TL'nin basit ortalaması olan 12,5 TL, grupların işlem sayıları eşit olmadığından doğru değildir. Diğer bir kontrolde A toplam gider payı %50, B payı %50'dir; fakat işlem payları sırasıyla 80/200=%40 ve 120/200=%60'tır. Aynı grafikte iki farklı dağılımın yüzdeleri, farklı sayısal bütünlerin paylarını gösterir.

> Ortalama birim maliyet = $(\sum n_i \cdot c_i)/(\sum n_i)$.
>
> **Anlamı:** Grupların adetleri n_i ve birim maliyetleri c_i ile hesaplanan toplam giderin toplam iş adedine bölünmesi.
>
> **Koşullar:** $n_i \geq 0$, toplam adet>0; bütün maliyetler aynı para birimindedir; gruplar çifte sayım yapmayacak biçimde belirlenmiştir.

İki grup sütun grafiğinden toplam ve ağırlıklı gider

Grup	Adet	Birim gider (TL/iş)	Toplam gider (TL)	Adet payı
A	80	15	1.200	%40
B	120	10	1.200	%60
Toplam	200	—	2.400	%100

7. Daire grafiği ile toplam miktar ve birim ücretin birleştirilmesi

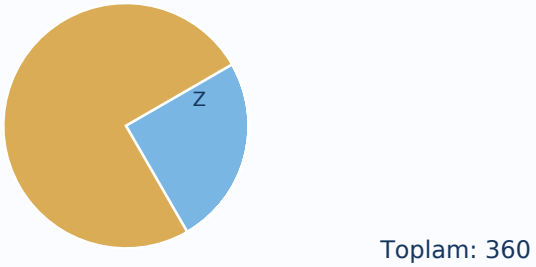
Toplam 360 adet gönderinin türlere dağılımını gösteren bir daire grafiğinde X dilimi 120°, Y dilimi 90°, Z dilimi 150° olsun. X gönderilerinin adedi 360×120/360=120, Y gönderilerinin adedi 360×90/360=90 ve Z gönderilerinin adedi 360×150/360=150'dir. Dairede toplam 360 adet seçilmesi hesap kolaylığı sağlasa da genel kural değişmez: Dilimin toplamda kapladığı pay, açısının 360°'ye oranıdır.

Gönderi başına taşıma giderleri X için 6 TL, Y için 8 TL, Z için 4 TL olarak eklenirse toplam gider sırasıyla 720 TL, 720 TL ve 600 TL'dir. Genel gider 2.040 TL, gönderi başına ağırlıklı ortalama gider 2.040/360=17/3 TL, yani yaklaşık 5,67 TL'dir. Bağımsız kontrolde adetler 120+90+150=360 ve merkez açılar 120+90+150=360° eder; tür giderleri de 720+720+600=2.040 TL'dir. Açılarla doğrudan maliyeti çarpmak yanlıştır: Açı bir niceliğin payını, gider birimi ise tek gönderinin ücretini gösterir.

Temsili gönderi dairesi ve türlere göre gider

Gönderi türü	Merkez açı	Gönderi adedi	Birim gider	Toplam gider
X	120°	120	6 TL	720 TL
Y	90°	90	8 TL	720 TL
Z	150°	150	4 TL	600 TL
Toplam	360°	360	—	2.040 TL

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

8. Grafikte toplam ve pay verilmişken hedef düzeyini hesaplama

Bir daire grafiğinde toplam 800 başvurunun %35'inin A grubunda, %25'inin B grubunda ve %40'ının C grubunda olduğu belirtildiğinde başvuru adetleri sırasıyla 280, 200 ve 320'dir. A grubundaki her başvuru için farklı bir tarama işlemi yapıldığı ve bu işlem için 4 dakika planlandığı varsayılsın. A'nın iş yükü 280×4=1.120 dakika, yani 18 saat 40 dakikadır. B grubunda her başvuruya 3 dakika ayrılmışsa 200×3=600 dakika, yani 10 saattir.

A ile B toplamda 1.720 dakika, yani 28 saat 40 dakikalık planlama yükü verir. Bu iki gruptaki başvuru adetlerinin 480 olması, kişi başına ortalama sürenin 3,5 dakika olduğu anlamına gelmez; doğru ortalama 1.720/480=43/12 dakika, yaklaşık 3,58 dakikadır. 4 ve 3 dakikalık sürelerin basit ortalaması 3,5, farklı büyüklükteki iki grubu eşit ağırlıklı saydığı için uygun değildir. Kontrolde 280/800=%35 ve 200/800=%25 olmak üzere veri payları geri elde edilir.

9. Çizgi grafiği, hız ve eşit olmayan zaman aralıkları

Bir cihazın yaptığı toplam tarama sayısı zamanın sıfırıncı saatinde 0, ikinci saatinde 100 ve beşinci saatinde 220 olarak verilmiş olsun. İlk aralıktaki ortalama tarama hızı 100/2=50 tarama/saat, ikinci aralıktaki ortalama hız (220−100)/(5−2)=120/3=40 tarama/saattir. Başlangıçtan beşinci saatin sonuna kadarki ortalama hız 220/5=44 tarama/saattir. 50 ile 40'ın basit ortalaması olan 45, aralıkların süreleri eşit olmadığından toplam dönem hızını vermez.

Doğru kontrol 50×2+40×3=100+120=220 taramadır. Zaman ekseninde 0, 2, 5 noktalarının birbirinden eşit uzaklıkta çizilmesi ölçeği bozabilir; eşit bir zaman ölçeğinde 2 ile 5 arasındaki aralık 0 ile 2 arasındakinin 3/2 katı uzunluğunda olmalıdır. Bu verilerin gerçek bir cihazın azami kapasitesini veya iki aralık içinde her an aynı hızla çalıştığını kanıtlamadığı da açıktır; hesaplar dönem ortalamasıdır.

> Ortalama değişim hızı = (son birikimli değer − ilk birikimli değer)/(son zaman − ilk zaman).
>
> **Anlamı:** Bir zaman aralığındaki net birikimli artışın, geçen zaman birimine bölünmesi.
>
> **Koşullar:** Son zaman ilk zamandan büyük olmalıdır. Yatay eksendeki sayısal aralıklar eşit kabul edilmeden gerçek zaman farkı kullanılır. Hızın birimi (adet/zaman) korunur.

Farklı süreli iki aralıkta ortalama hız

Zaman aralığı	Başlangıç–son tarama	Süre	Aralık ortalaması
0–2 saat	0→100	2 saat	50 tarama/saat
2–5 saat	100→220	3 saat	40 tarama/saat
0–5 saat	0→220	5 saat	44 tarama/saat

10. Bir grafikten belirlenen sayının diğer grafikteki oranı değiştirmesi

İlk temsili sütun grafiğinde A birimindeki üç aylık işlem sayıları 80, 100 ve 120, B birimindekiler 60, 90 ve 150 olsun. Birinci grafikte toplamlar her iki birim için de 300'dür. İkinci grafikte aynı birimlerin tamamladığı işlemlerden belgeli olanların adetleri A için 240, B için 210 gösterilsin. Burada belgeli işlem oranları A'da 240/300=%80, B'de 210/300=%70'tir.

Toplam iş adedi eşit olmasına rağmen belgeli iş oranları farklıdır. İki birim birlikte ele alındığında 600 işlemin 450'si belgeli olduğundan birleşik oran 450/600=%75'tir. %80 ile %70'in ortalaması burada %75'e eşittir; ancak bunun nedeni iki birimin paydalarının aynı olmasıdır. Birimlerden birinin toplamı farklı olsaydı yüzde değerlerinin basit ortalaması yerine bütün belgeli işlemler bütün işlemlere bölünmeliydi. «Belgeli» tanımının iki grafikte aynı olması ve bir işin birimlerden yalnız birinde sayılması karşılaştırmanın koşullarıdır.

Bir grafikten payda, diğerinden pay alınması

Birim	Toplam işlem	Belgeli işlem	Belgeli oranı
A	300	240	%80
B	300	210	%70
İkisi birlikte	600	450	%75

11. Hedefe göre fark ve yüzde artış gereksiniminin modellenmesi

Grafikte bir birimin gerçekleşen aylık işlem sayısı 240, hedef değeri 300 olarak gösterilsin. Hedefin gerisindeki mutlak fark 300−240=60 işlemdir. Hedefe ulaşmak için gereken artışın mevcut üretime oranı 60/240=%25'tir. Buna karşılık mevcut üretimin hedefi karşılama oranı 240/300=%80 ve hedefin eksik kalan payı 60/300=%20'dir. «%25 artırmak gerekir» ile «hedefin %20'si eksik» ifadeleri farklı paydalara dayandığından ikisi de doğrudur.

Hedefe ulaşmak için gereken 60 ek işlem iki gün boyunca eşit olarak tamamlanacaksa günde 30 işlem gerekir. Ancak «iki güne yayılmış ek kapasite» bilgisinin grafik tarafından verilmediği unutulmamalıdır. Burada planlama varsayımı grafikten okunan farkı uygulamaya dönüştürmektedir. Bağımsız kontrolde 240×1,25=300 ve 300×0,80=240 sonuçları başlangıç ile hedef ilişkisini doğrular.

> Hedef açığı = Hedef − Gerçekleşen; gerekli artış oranı = (Hedef − Gerçekleşen)/Gerçekleşen; hedefe ulaşma oranı = Gerçekleşen/Hedef.
>
> **Anlamı:** Aynı açığın mevcut performansa göre artış ihtiyacı ve hedef bütüne göre karşılanma payı biçimindeki iki farklı yorumu.
>
> **Koşullar:** Aynı dönem ve birimdeki değerler karşılaştırılır; «gerekli artış oranı» için gerçekleşen>0, «hedefe ulaşma oranı» için hedef>0 gerekir. Hedef aşılmışsa açık negatif olup ayrıca yorumlanmalıdır.

12. Yüzde değişim grafiğiyle mutlak miktarı geri kurma

Bir çizgi grafiği miktar yerine önceki aya göre yüzde değişimi gösterebilir. İlk ayın işlem miktarı 200, sonraki ayların bir önceki aya göre artışları sırasıyla %20 ve %10 ise ikinci ay 200×1,20=240, üçüncü ay 240×1,10=264 işlem olur. İlk aya göre toplam artış 264−200=64 işlem, oranı 64/200=%32'dir. Yüzdeleri %20+%10=%30 olarak toplamak doğru değildir; ikinci artışın tabanı 200 değil 240'tır.

Ters kontrolde üçüncü ayın ikinci aya oranı 264/240=1,10, ikinci ayın ilk aya oranı 240/200=1,20'dir. Bu çarpanların bileşimi 1,20×1,10=1,32 olup başlangıç seviyesinin %132'sine karşılık gelir. Bazı grafiklerde oranlar yaklaşık ya da yuvarlanmış verildiğinde sonuçları aynı hassasiyette raporlamak gerekir. Yalnız yüzdeler biliniyor, ilk ayın miktarı verilmiyorsa mutlak adetlerin kesin bulunması mümkün değildir.

> Son miktar = İlk miktar·(1+r_1)·(1+r_2)·…·(1+r_k).
>
> **Anlamı:** Ardışık dönemlerde bir önceki dönemi temel alan göreli değişimlerin çarpanlarla birleştirilmesi.
>
> **Koşullar:** r_i ondalık biçimli değişim oranıdır (ör. %20 için 0,20); her adımın oranı bir önceki miktara göre verilmelidir. Yüzde azalmalarda r negatiftir. Son miktar tek başına başlangıcı belirlemez.

13. Grafiklerde iş gücü, zaman ve kişi sayısını birlikte kullanma

Üç günlük grafik bir kurum içi eğitim materyalinin 36, 48 ve 60 dosyadan oluşan iş gruplarını gösteriyor olsun. Her dosyanın hazırlanması 15 dakika sürüyor ve bir çalışan günde 6 saatini bu iş için ayırabiliyorsa, toplam iş hacmi 36+48+60=144 dosya; toplam emek 144×15=2.160 dakika yani 36 kişi-saat olur. Üç çalışan tek bir gün boyunca altışar saat çalışırsa toplamları 18 kişi-saat olduğundan bütün iş bir günde tamamlanamaz.

Aynı üç çalışan iki gün boyunca günde altışar saat ayırırsa toplam 3×2×6=36 kişi-saat oluştururlar; teorik olarak iş tam karşılanır. Bu çıkarım, çalışanların birbirinden bağımsız iş parçalarını paylaşabildiği, kayıp ve ek iş bulunmadığı ve 15 dakika/dosya varsayımının geçerli olduğu modele dayanır. Kontrolde 36 kişi-saat×60 dakika=2.160 dakika ve 2.160/15=144 dosya bulunur. Grafikte «üç günde üretilen dosya» yazması, bu

dosyaların tek tek ne zaman hazırlanmış olması gerektiğine ilişkin bir zaman çizelgesi sunmaz; burada toplam hacim, geleceğe yönelik iş planına aktarılmıştır.

Grafik toplamından insan kaynağı planına geçiş

Bileşen	Değer	Ölçü ve dönüşüm
Grafik dosya toplamı	144	36+48+60 dosya
Dosya başına süre	15 dakika	0,25 kişi-saat/dosya
İş yükü	36 kişi-saat	144×0,25
Üç kişi, bir gün	18 kişi-saat	3×1×6
Üç kişi, iki gün	36 kişi-saat	3×2×6

14. Grafik destekli karar probleminde açık eşik ve tam sayı kısıtı

Bir teslimatın günlük iş miktarını gösteren grafikte Pazartesi 45, Salı 60, Çarşamba 75 parça tamamlandığı görülüyor. Toplam 180 parçadır. Bir araca en fazla 50 parça yüklenebildiği ve bütün parçaların aynı özellikte olduğu kabul edilirse bütün parçaları tek seferde taşımak için en az ⌈180/50⌉=4 araç gerekir. Üç araç 150 parçayı taşıyabilir ve 30 parça geride kalır; dört araç toplam 200 parçalık kapasite sunduğundan 180 parçayı taşıyabilir.

Bu sonuç, «en fazla 50» ifadesinin her aracın mutlaka 50 parça taşıması gerektiği anlamına gelmediği ayrımıyla birlikte değerlendirilmelidir. Bir aracın kapasitesinin kalan 30 parça için kısmen kullanılması mümkündür. Eğer araç başına sabit sefer ücreti 400 TL ise toplam sabit gider 4×400=1.600 TL'dir; ancak bu son gider grafikten değil, ayrıca verilmiş tarife varsayımından çıkarılır. Kontrolde 45+60+75=180, 3×50<180≤4×50 eşitsizliği ve sabit gider çarpımı birbirini doğrular.

> En az araç = ⌈parça sayısı / araç kapasitesi⌉.
>
> **Anlamı:** Sabit üst kapasiteyle bütün parça yükünü karşılayan en küçük tam araç sayısı.
>
> **Koşullar:** Parça sayısı ≥0; kapasite pozitif tam sayı; parçalar araçlar arasında ayrılabilir ve taşımaya engel başka ağırlık/hacim koşulu yoktur. Sıfır parçanın gerektirdiği araç sayısı sıfırdır.

15. Grafik ve oran birleştirildiğinde kesinlik sınırı

İki ayrı bölgede yapılan toplam 200 ve 300 işlem grafikte gösterilmiş olsun. Bu bölgelerde işlemlerden sırasıyla yaklaşık %80 ve yaklaşık %70'inin aynı gün sonuçlandığı ifade edildiğinde toplam aynı gün sonuçlanan işlemin yaklaşık 160+210=370 olması beklenir. Ancak yüzdeler yuvarlanmış ise 160 ve 210 kesin adet sayılmamalıdır. Özellikle küçük gözlem sayılarında yuvarlama payı tekil sonuçları değiştirebilir. Buradaki «yaklaşık» kaydı sonuçta da korunmalıdır.

Buna karşılık yüzdeler tam değer olarak verildiğinde 200×0,80=160 ve 300×0,70=210, toplam 370 kesin hesaplanır; birleşik oran 370/500=%74'tür. %80 ile %70'in basit ortalaması %75'tir ve paydalar farklı olduğu için birleşik oran değildir. Karşılaştırılan bölgelerin adedinin değil işlemlerinin ağırlık olduğu bu örnekte, grafik verisinin birleşik oranı yeniden tanımladığı görülür. «Yaklaşık %70» oranını «tam 210» diye sunmak verinin hassasiyetini gerçekte olduğundan fazla gösterir.

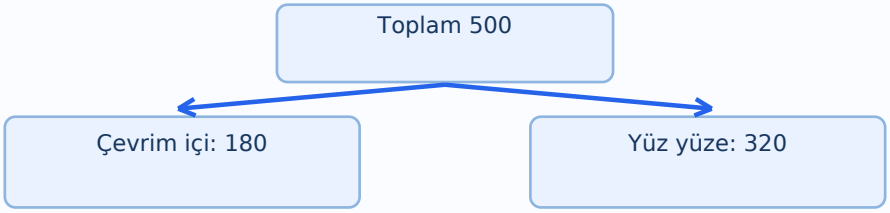
Grafik destekli modelin kesinlik derecesi Grafikten kesin okunan sayıyla temsili birim maliyet ya da süre varsayımından bulunan tahmini çıktı aynı kesinlikte değildir. Yaklaşık yüzde ve yuvarlanmış eksen değerleriyle çalışılıyorsa sonuç da uygun hassasiyetle ifade edilir.

16. Çoklu grafikte aynı veriyi iki kez saymayı önleme

Bir grafikte toplam 500 işlem, diğer grafikte bu işlemlerin 180'inin çevrim içi, 320'sinin yüz yüze tamamlandığı gösteriliyorsa iki grafik ayrı işlem evrenleri sunmaz. 500+180+320=1.000 işlemlik bir sonuç üretmek aynı 500 işlemi iki kez saymaktır. İkinci grafik, birincinin ayrıntılı dağılımıdır. Aynı işlem iki grafikte farklı yönlerden sınıflandırılmış olsa da kendi içinde yalnız bir kayıt olarak tutulmuş olabilir.

Kontrol için ikinci grafiğin parçaları 180+320=500 olarak birinci grafiğin toplamına bağlanır. Öte yandan başka bir grafikte «çevrim içi başlayan» 210 işlem bulunuyorsa bu gruptaki işlemlerle «çevrim içi tamamlanan» 180 işlemin aynı kayıtları gösterdiği otomatik olarak kabul edilemez. Kategoriler olayın farklı aşamalarını anlatabilir; tek ve çift sayımın sınırı kaynak tanımlarıyla belirlenir. Grafik destekli problemlerde doğru toplama işlemi, farklı grafiklerin birbirinden ayrık topluluklar mı yoksa aynı topluluğun alt grupları mı olduğunu açıklamakla başlar.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

17. Birden fazla çözüm yolu ve tutarsız grafik verisini tanıma

Üç birimin haftalık çıktılarını gösteren grafikte A=90, B=110, C=100 ise toplam 300 iştir. Başka bir grafikte aynı hafta ve aynı kapsam için birimlerin toplamını 315 iş gösteren değer bulunuyorsa, ek tanım olmadan iki gösterim tutarlı değildir. 15 işlik farkı grafikte açıklanmayan «ilave işlemler» diye adlandırmak yerine, birimlerin ve dönemlerin kapsamlarının gerçekten aynı olup olmadığına bakmak gerekir. Bazen aylık ve haftalık toplamların, kişi ve dosya sayılarının ya da planlanan ve gerçekleşen değerlerin karıştırılması, görünen farkın nedenidir.

Aynı dönem, aynı birim ve ayrık A-B-C grupları gerçekten tanımlıysa 90+110+100=300 değeri zorunludur. Toplam gösterimdeki 315 sayısına ulaşmak için açıklanmamış 15 iş eklemek yorum değil yeni veri üretmek olur. Grafik destekli problem çözümü, gerektiğinde «Veriler bu koşullarla çelişiyor» sonucuna varmayı da içerir. Her grafik için sayısal bir cevap bulmak zorunlu değildir; verinin tutarlılığı da çözümün parçasıdır.

Aynı bütün için grafiklerin tutarlılık kontrolü

Grafik veya gösterim	Okunan değer	Kapsam	Sonuç
Ayrık A-B-C sütunları	90+110+100=300	Aynı hafta, işlem	300
Genel toplam gösterimi	315	Aynı hafta, işlem	315
Fark	315−300=15	Kapsam aynıysa	Tutarsızlık

18. Bütünleşik öğretici model: grafik, oran, maliyet, kapasite ve doğrulama

Bir eğitim merkezinde yürütülen tamamen temsili belge dijitalleştirme çalışmasının dört haftalık toplam tamamlanan dosya sayıları sütun grafiğinde 100, 140, 160 ve 200 olarak verilmiş olsun. Yatay eksen I–IV. haftalar, düşey eksen 0'dan başlayarak 50'şer dosya artan 0,50,100,150,200 işaretlerinden oluşsun. Buna göre dört haftada toplam 600 dosya tamamlanmıştır. İkinci grafikte bu dört haftanın toplam dosyalarının türlerine göre dağılımı için A=180°, B=120°, C=60° dilimleri bulunur. Bu dilimler dört hafta toplamının sırasıyla yarısı, üçte biri ve altıda biri anlamına gelir; adetler A=300, B=200, C=100 dosyadır.

Üç türün bir dosyasını dijitalleştirme için birim sürelerin A'da 6, B'de 9, C'de 12 dakika olduğu ayrıca verilsin. A türündeki toplam iş 300×6=1.800 dakika, B'de 200×9=1.800 dakika, C'de 100×12=1.200 dakikadır. Genel toplam 4.800 dakika veya 80 kişi-saattir. Bu iki verinin neden farklı kavramlar olduğu açıktır: İlk grafik haftalara göre dosya sayısının dağılımı; ikinci grafik ise aynı 600 dosyanın türlere göre dağılımıdır. Dolayısıyla haftalık adetler ile tür adetleri iki farklı çalışma toplamı oluşturmaz.

Şimdi bir çalışanın günde 5 saatini yalnız bu işe ayırabildiğini ve ek süre kaybı olmadığını kabul edelim. Bu çalışan toplam 80 kişi-saatlik işi tek başına bitirmek için en az 80/5=16 iş gününe ihtiyaç duyar. İki çalışan birlikte aynı düzenle çalıştığında toplam 10 kişi-saat/gün üretirler ve işin tamamı için 80/10=8 iş günü yeterli olur. Bu günlük süre gerçek grafik verisi değil, varsayımdır; işin kaç takvim gününe yayıldığını belirlemek için haftalık çalışma günlerinin ayrıca bilinmesi gerekir.

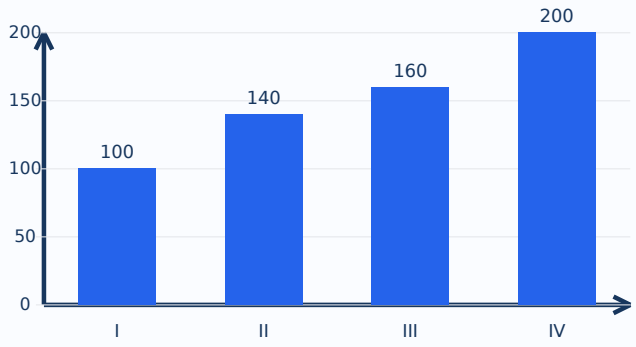
Dosya türü başına 4, 5 ve 7 TL olmak üzere farklı sarf giderleri verilsin. Toplam gider A için 300×4=1.200 TL, B için 200×5=1.000 TL, C için 100×7=700 TL; genel toplam 2.900 TL'dir. Dosya başına ağırlıklı gider 2.900/600=29/6 TL, yaklaşık 4,83 TL'dir. Üç türün basit birim gider ortalaması (4+5+7)/3=16/3 TL, yaklaşık 5,33 TL olup gerçek dosya ağırlıklarına dayanmadığından aynı sonucu vermez.

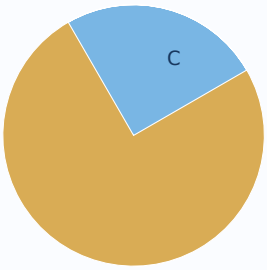
Son kontrol birinci grafikte 100+140+160+200=600; ikinci grafikte 180+120+60=360° ve 300+200+100=600 biçimindedir. Süre hesabı 1.800+1.800+1.200=4.800 dakika, gider hesabı 1.200+1.000+700=2.900 TL verir. Alternatif yoldan süreler toplamı A-B-C dağılımının ağırlıklı ortalaması ile bulunabilir: (300×6+200×9+100×12)/600=8 dakika/dosya; 600×8=4.800 dakika. Bu alternatif doğrulama, gruplar arasındaki iş süresi farkının doğru hesaba katıldığını gösterir.

Bütünleşik modelin aynı 600 dosya üzerinden tür bazlı hesapları

Tür	Daire açı (derece)	Dosya	Birim süre (dakika)	Süre toplamı (dakika)	Sarf gideri (TL)
A	180	300	6	1.800	1.200
B	120	200	9	1.800	1.000
C	60	100	12	1.200	700
Toplam	360	600	Ağırlıklı 8	4.800	2.900

Konuya ait açıklayıcı şema





600 dosya; 4.800 dk; 2.900 TL

Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

19. Grafik destekli problemleri çözmenin bütüncül yaklaşımı

Grafik destekli çok adımlı muhakemede ilk iş, görselin neyi gösterdiğini ve neyi göstermediğini ortaya koymaktır. Sütun, çizgi ve dairede okunan sayıların birimi, bütünün kapsamı, eksen aralıkları, dönem ve grup ayrımı bir problem cümlesi kurmaya başlamadan saptanır. Ardından soruda ayrıca verilen süre, ücret, kapasite, hedef veya seçim koşulu tanımlanır. Grafikten alınan veri ile kurala dayalı yeni sonuç aynı kavram gibi yazılmaz.

Çözümün her aşamasında birimli denklik korunur: Dosya adedi dosya başına dakika ile çarpılırsa dakika, dakika 60'a bölünürse saat, dosya adedi dosya başına TL ile çarpılırsa TL elde edilir. Toplama işlemi aynı birimleri gerektirir. Gerektiğinde oran için pay ve payda, tam araç veya hafta hesabı için yukarı yuvarlama koşulu, birikimli grafikte dönem farkı ve birden fazla grafikte veri evreni denetlenir. Sonuç farklı bir hesap yolu, son değerden geri dönüş veya satır/sütun toplamlarıyla yeniden doğrulanır.

En önemli sınır, görselleştirilmiş verinin kendiliğinden neden-sonuç ilişkisi ya da gelecek için kesin tahmin sunmamasıdır. Aynı eğilimin süreceği, bir işin sabit dakika alacağı veya iki kategorinin bütünü eksiksiz oluşturduğu bilgileri ayrıca verilmiyorsa matematiksel sonucun koşullu olduğu açıkça belirtilmelidir. Böylece Grafik Destekli Problemler başlığı, bu modül boyunca öğrenilen veri okuma, gösterim, yüzde/oran, karşılaştırma ve eksik veriyi belirleme yöntemlerini tek bir hesap akışında birleştirir. Bir sonraki ana modülde, metinlerin sözcük, cümle ve paragraf düzeyinde doğru anlamlandırılması ele alınacaktır.

BÖLÜM 06

TÜRKÇE ANLAMA VE PARAGRAF

KONU 6.1

SÖZCÜKTE ANLAM VE ANLAM İLİŞKİLERİ

Bir metnin anlaşılması, sözcüklerin sözlükteki karşılıklarını tanımakla başlar ancak bununla sınırlı kalmaz. Okuyucu, sözcüğün o cümlede hangi anlamıyla kullanıldığını, başka sözcüklerle nasıl bir ilişki kurduğunu ve düşünceye nasıl bir sınır çizdiğini de belirlemelidir. Örneğin «Kurul bu öneriyi ağır buldu.» cümlesinde ağır sözcüğü bir nesnenin tartıdaki ağırlığını değil, önerinin uygulanmasının güç veya sonuçlarının ciddi görüldüğünü anlatır. Buna karşılık «Koli ağır olduğu için iki kişi taşıdı.» cümlesinde ölçülebilen fiziksel ağırlık söz konusudur. Aynı sözcüğün iki kullanımı arasındaki fark, tek bir kelimeye bakılarak değil, cümlenin bütünü incelenerek anlaşılır.

Sözcükte anlam konusu, hem anlam türlerini hem de sözcükler arasında kurulan benzerlik, karşıtlık, kapsama ve çağrışım ilişkilerini ele alır. Bu bilgi, daha sonra işlenecek cümlede kesin yargı ve paragrafta çıkarım konularının temelini oluşturur. Ancak burada asıl amaç, bir cümlenin bütün yargılarını çözümlemek değil, söz varlığının anlamı nasıl taşıdığını kavramaktır.

1. Sözcük, anlam ve bağlam ilişkisi

Sözcük, dilde bir kavramı, varlığı, hareketi ya da niteliği karşılayan anlamlı birimdir. Sözcüğün tek başına akla getirdiği anlam ile belirli bir kullanımda kazandığı anlam her zaman örtüşmeyebilir. Bağlam; bir sözcüğün önünde ve arkasında bulunan ifadelerin, konuşma konusunun ve kullanım koşullarının oluşturduğu bütündür. Sözcüğün hangi anlamıyla kullanıldığını bağlam belirginleştirir.

«Dosya kapandı.» ifadesinde kapandı eylemi, bilgisayardaki bir belgenin ekrandan kaldırılmasını, bir incelemenin sonuçlanmasını veya fiziksel bir dosyanın kapağının örtülmesini anlatabilir. «İnceleme sonunda dosya kapandı.» cümlesindeki sonunda ve inceleme sözleri, işlemin tamamlanması anlamını öne çıkarır. Dolayısıyla olası anlamlar arasında seçim yapılırken sözcüğü çevresindeki ipuçlarından koparmamak gerekir.

Bağlam sözcüğün anlamını sıfırdan ve sınırsız biçimde yaratmaz. Kullanımın dilde yerleşik anlamlarla, yaygın aktarmalarla veya açıklanan özel bir kullanım koşuluyla desteklenmesi gerekir. Metnin izin vermediği bir anlam, yalnız okuyucuya ilginç geldiği için kabul edilemez.

2. Çok anlamlılık: Tek sözcüğün birden fazla kullanım alanı

Bir sözcüğün birbiriyle bağlantılı birden çok anlam kazanmasına çok anlamlılık denir. «Açmak» sözcüğü, «Pencereyi açtı.» cümlesinde kapalı durumu gidermeyi, «Yeni bir yol açtılar.» cümlesinde bir geçit oluşturmayı, «Bu açıklama konuyu açtı.» cümlesinde ise konuyu daha anlaşılır hâle getirmeyi anlatır. Bu kullanımlar arasında, bir şeyin erişilir veya belirgin duruma gelmesi yönünde bir anlam bağı bulunur. Aynı ses ve yazılışa sahip her ayrı kullanım ise otomatik olarak çok anlamlı sayılmaz; eş seslilikle farkı ayrıca ele alınacaktır.

Çok anlamlılığın temel sonucu şudur: Bir sözcüğe ait sözlük anlamlarından biri, o sözcüğün her cümledeki anlamı değildir. «Keskin» sözcüğü bıçak için kullanıldığında kesme gücünü, «keskin koku» ifadesinde yoğun ve etkili olmayı, «keskin eleştiri» ifadesinde sertliği belirtir. Okuyucu, ortak sözcükten hareketle bütün cümleleri aynı yargıya indirgeyemez.

Aynı sözcüğün bağlama göre değişen anlamı

Kullanım	Bağlamın öne çıkardığı anlam	Yorum sınırı
İnce bir ip kullandı.	Kalınlığı az	Fiziksel özellik
İnce bir hesap yaptı.	Ayrıntılı, dikkatli	Hesabın fiziksel kalınlığı değil
İnce bir davranış sergiledi.	Düşünceli, özenli	Kişiye yönelik nitelik
Salon doldu.	Boş yer kalmadı	Mekânın doluluğu
Programı doldu.	Kullanılabilir zamanı kalmadı	Zaman çizelgesinin yoğunluğu

3. Gerçek ve temel anlam

Gerçek anlam, bir sözcüğün temel anlamını ve bu anlamla doğrudan bağlantılı kullanımını kapsayabilecek geniş bir başlıktır. Temel anlam, sözcüğün ilk ve en belirgin karşılığıdır. «Elini soğuk suyla yıkadı.» cümlesindeki el, insanın uzvunu; «Masanın yüzeyi pürüzsüz.» cümlesindeki yüzey, bir cismin dış bölümünü karşılar. Bu kullanımlarda fiziksel varlıklar ve özellikler doğrudan anlatılır.

«Gerçek anlam» ile «yalnız elle tutulabilen anlam» aynı şey değildir. «İki gün sonra döneceğim.» cümlesindeki gün, «Sabah erken başladı.» cümlesindeki sabah, soyut sayılabilecek zaman ilişkilerine dayanmasına rağmen yerleşik, doğrudan anlamlarıyla kullanılır. Bu nedenle gerçek-mecaz ayrımı ile somut-soyut ayrımı birbirinin yerine geçmez.

4. Yan anlam: Temel anlama bağlı genişleme

Yan anlam, bir sözcüğün temel anlamından benzerlik veya işlev ilişkisiyle genişlemesi ve bu bağın belirgin biçimde korunmasıdır. «Masanın ayağı sallanıyor.» ifadesinde ayak, insanın yere basmasını sağlayan uzvuna benzeyen ve masayı taşıyan bölümü karşılar. «Şişenin ağzı dar.» ifadesinde ağız, şişenin sıvı giriş çıkışına yarayan açıklığıdır. Bunlar sözcüğün doğrudan ilk anlamı değildir; ancak ilk anlamla şekil ya da işlev yönünden açık ilişki içindedir.

Yan anlamın ayırt edici yönü, kullanımın alışılmış ve somut bir nesne parçasını adlandırmaya elverişli olmasıdır. «Kapının kolu gevşedi.» cümlesinde kol bir nesne parçasıdır; «Bu iş için güçlü bir kol bulmalıyız.» cümlesinde ise kolun insan gücünü veya desteği temsil etmesi, bağlama göre başka bir aktarmaya dönüşebilir. Tek bir sözcüğe her yerde değişmez tür etiketi vermek sağlıklı değildir.

Temel anlam ve yan anlamın karşılaştırılması

Sözcük	Temel anlamlı kullanım	Yan anlamlı kullanım	Bağ
Ayak	Ayağına uygun ayakkabı aldı.	Sehpanın ayağı kırıldı.	Taşıma ve alt bölüm
Ağız	Ağzını suyla çalkaladı.	Mağaranın ağzı kapandı.	Açıklık, giriş
Kol	Kolundaki ağrı geçti.	Koltuğun kolu yıprandı.	Yan uzantı, destek
Baş	Başını yana çevirdi.	Köprünün başında durdu.	Başlangıç ve uç bölge

5. Mecaz anlam: Somut ya da doğrudan karşılıktan uzaklaşma

Mecaz anlamda bir sözcük, benzerlik, ilgi veya çağrışım yoluyla temel karşılığından uzaklaşarak başka bir durumu anlatır. «Uzun görüşmeler sonunda buzlar eridi.» cümlesinde fiziksel buzun erimesi değil, taraflar arasındaki soğukluğun azalması anlatılır. «Sözleri içime oturdu.» ifadesinde de bir nesnenin bedenin içine yerleşmesi değil, sözlerin derin üzüntü bırakması söz konusudur. Buradaki sözcükler, fiziksel olayların özelliklerini insan ilişkileri ve duygulara taşır.

Mecazı belirlerken tek başına bir kelimenin «somut» olup olmadığına değil, tüm ifadenin anlamına bakılır. «Keskin bıçağı dikkatle bıraktı.» gerçek, «Keskin bir üslupla karşı çıktı.» mecaz kullanımdır. «Üslup» zaten soyut bir kavram olduğu için onunla kullanılan keskin, fiziksel kesicilik bildirmez. Bununla birlikte anlamın aktarıldığı her ifade doğrudan yanlış veya abartılı değildir; mecaz, dilin yerleşik ve etkili anlatım yollarından biridir.

> **Önemli ayrım** Gerçek, yan ve mecaz anlam ayrımı tek tek sözcüklerin değişmez özelliği değil, belirli kullanımlarının özelliğidir. «Ayak» sözcüğünü cümleden çıkararak sınıflandırmak, yan anlamla mecazı birbirine karıştırabilir.

6. Terim anlam: Bir alana özgü kesin kavram

Terim, bilim, sanat, spor, hukuk veya meslek gibi alanlarda belirli bir kavramı karşılamak için kullanılan sözcük ya da söz grubudur. Matematikte «kök» denklemin çözümünü, botanikte bitkinin toprakla ilişkili organını, dil bilgisinde sözcüğün türetmeye temel bölümünü karşılayabilir. Bağlam, hangi alan teriminin kullanıldığını gösterir. «Denklemin kökünü buldu.» cümlesinde anlatılan, bitkinin kökü değildir.

Terim olmak için sözcüğün günlük dilde hiç kullanılmaması gerekmez. «Alan» günlük yaşamda açık yer, geometride iki boyutlu büyüklük ölçüsü olabilir. «Vurgu» günlük konuşmada önemi öne çıkarma, dil incelemesinde hecenin diğerlerine göre belirgin söylenmesi anlamında kullanılabilir. Bir sözcük teknik belgede geçiyor diye kendiliğinden terim sayılmaz; ilgili alanda tanımlı özel kavramı karşılaması önemlidir.

Terim anlamın bağlamla belirlenmesi

Sözcük	Gündelik kullanım	Terim kullanımı	Alan
Kök	Ağacın kökü toprağın altındadır.	2x = 8 denkleminin kökü 4'tür.	Matematik
Perde	Odanın perdesi kapalıydı.	Eserin ikinci perdesi başladı.	Tiyatro
Hücre	Küçük bir bölmeye hücre dedi.	Hücre canlıların temel yapısal birimidir.	Biyoloji
Basınç	Üzerinde yoğun baskı hissetti.	Basınç, kuvvetin yüzey alanına oranıyla tanımlanır.	Fizik

7. Anlam aktarımının farklı yolları

Sözcükler yalnızca benzetme yoluyla değil; parça-bütün, yer-insan, araç-işlev gibi yakınlıklar üzerinden de başka anlamlarda kullanılabilir. «Bütün salon konuşmacıyı dinledi.» ifadesinde fiziksel salonun dinlemesi mümkün değildir; salon sözcüğü orada bulunan insanları karşılar. «Yeni kitabın ilk sayfalarını okudum.» ifadesinde ise sayfalar hem fiziksel kâğıtları hem onların üzerindeki yazıları gündeme getirebilir. Bu tür aktarmalar, sözcüğün işaret ettiği şey ile asıl kastedilen şey arasındaki ilişkiden anlaşılır.

Benzetmeye dayalı aktarımda iki varlığın ortak niteliği öne çıkar: «Düşüncelerini keskinleştirdi.» sözü, keskinliğin ayırt etme gücüyle ilişkilendirilmesidir. Yakınlığa dayalı aktarımda ise iki unsur aynı ortamda, süreçte veya bütün içinde bağlantılıdır: «Sahne dakikalarca alkışlandı.» denildiğinde sahnenin tahtası değil, orada gerçekleşen gösteri ya da sanatçılar alkışlanmıştır. İleri düzey söz sanatları ayrıntılarına girilmeden, burada önemli olan anlatımın literal ve kastedilen düzeylerini ayırabilmektir.

8. Eş anlamlı sözcükler: Anlamdaşlığın kapsamı

Yazılış ve söylenişleri farklı olup anlamları büyük ölçüde örtüşen sözcükler eş anlamlı veya anlamdaş sayılır. «Yanıt» ile «cevap», «neden» ile «sebep», «olanak» ile «imkân» yaygın anlamdaş çiftleridir. Bununla birlikte tam bir eş anlamlılık her bağlamda kusursuz yer değiştirme anlamına gelmez. Sözcükler kullanım sıklığı, resmiyet derecesi, çağrışım ve deyimleşmiş yapılara katılma bakımından farklılaşabilir.

«Sorunun cevabı açıklandı.» ile «Sorunun yanıtı açıklandı.» anlamca oldukça yakındır. Buna karşılık «neden olmak» kalıbı çoğu zaman «sebep olmak» ile değiştirilebilirken her deyim ve kalıp aynı serbestliğe sahip değildir. Sözcüklerin anlamdaşlığı, sabit ifadelerin içindeki bütün kullanım sınırlamalarını ortadan kaldırmaz. Yer değiştirme denetiminde yalnız sözlük karşılığına değil, cümlenin doğal ve doğru kalıp kalmadığına da bakılır.

9. Yakın anlamlı sözcükler: Ortak yön ile ince ayrım

Yakın anlamlı sözcükler benzer kavram alanlarında yer alır fakat tam olarak aynı şeyi anlatmaz. «Kaygı» ile «korku» olumsuz beklenti ve tedirginlik yönünden ilişkilidir; kaygı çoğu zaman belirsiz veya geleceğe yönelik bir endişeyi, korku ise belirgin bir tehlikeye verilen tepkiyi öne çıkarır. «İncelemek» ile «araştırmak» da bilgi edinme yönünden yakındır; araştırmak yeni bilgi arama sürecini, incelemek bir konuya ayrıntılı bakmayı daha güçlü biçimde vurgulayabilir.

Yakın anlamlılık aynı şeyin başka sözcükle tekrar edilmesi değildir. «Titiz» bir çalışmada ayrıntılara dikkat ve özen, «dikkatli» bir çalışmada hata veya tehlikeyi gözetme öne çıkabilir. «Bu uzman titizdir.» cümlesindeki titiz yerine dikkatli getirildiğinde söylenen tümüyle yanlış olmaz; fakat kişinin niteliğine yüklenen vurgu değişir. Bu nedenle bir ifadeyi aynı anlamı koruyarak yeniden yazarken yakınlık tek başına yeterli değildir.

Eş anlamlılık ile yakın anlamlılığın ayrımı

İlişki	Sözcükler	Ortaklık	Dikkat edilmesi gereken
Yaygın eş anlamlı	Yanıt — cevap	Karşılık bildirme	Kalıplaşmış kullanımlar ayrı kontrol edilir.
Yaygın eş anlamlı	Olanak — imkân	Yapabilme şartı veya fırsat	Her kalıpta üslup ve doğallık eşit olmayabilir.
Yakın anlamlı	Kaygı — korku	Olumsuz duygu	Belirsizlik ve belirgin tehlike vurguları farklıdır.
Yakın anlamlı	Tasarlamak — planlamak	Geleceğe yönelik düşünmek	Tasarımın ana hatları ile uygulama düzeni farklı ağırlık taşıyabilir.
Yakın anlamlı	Titiz — dikkatli	Özen gösterme	Ayrıntıcılık ve tehlike/hata gözetimi ayrı nüanslardır.

10. Zıt anlamlı sözcükler ve karşıtlığın sınırları

Zıt veya karşıt anlamlı sözcükler, aynı anlam ekseninin birbirine ters uçlarını belirtir: uzun-kısa, geniş-dar, erken-geç, sıcak-soğuk gibi. Gerçek bir karşıtlıktan söz edebilmek için iki sözcüğün aynı özelliği karşıt yönlerde nitelemesi gerekir. «Geniş oda» ile «dar oda» bu ilişkiyi açıkça gösterir. Buna karşılık «geniş bilgi» ifadesinde geniş, kapsamın çokluğunu anlatırken «dar görüş» ifadesinde dar düşünsel sınırlılığı anlatır; bunlar sözcük düzeyinde ilişkili olsa da karşılaştırılan varlıkların ve özelliklerin aynı olmaması cümle düzeyinde yorumun değişmesine yol açar.

Olumsuzluk eki tek başına zıt anlam oluşturmaz. «Başarılı değil» ifadesi doğrudan «başarısız» ile her zaman aynı derecede olumsuz yargı taşımaz; bir kişi henüz yeterince başarılı olmayabilir ama başarısız diye nitelendirilmeyebilir. «Gitmedi» ve «geldi» de otomatik zıt değildir; gitmemek bir yerde kalmak anlamına gelebilir. Bu ayrım, bir yargının değillemesi ile o yargının karşıt kavramını ayırmayı gerektirir; cümledeki koşullu ve kesin sonuçlar sonraki başlığın konusudur.

> **Önemli ayrım** «Zıt anlam» aynı anlam boyutunda karşıtlık gerektirir. «Gelmedi» ifadesinden «gitti» sonucuna ulaşılamaz. Bir sözcüğün önüne olumsuzluk getirilmesi, karşıt anlamlı yeni bir sözcük kullanıldığı anlamına gelmeyebilir.

11. Eş sesli sözcükler ile çok anlamlılığın farkı

Eş sesli veya sesteş sözcükler, aynı biçimde seslendirilip farklı anlamlara gelen ve anlamları arasında tarihsel ya da kavramsal birlik bulunmayan ayrı sözcüklerdir. «Yaz» sözcüğü «Yaz gelince kıyı hareketlendi.» cümlesinde mevsim, «Bu notu okunaklı yaz.» cümlesinde yazmak eyleminin emir biçimidir. «Gül» sözcüğü bir çiçeği veya gülmek fiilinin emir biçimini karşılayabilir. Ortak yazılış ve ses, tek bir anlamın genişlediğini göstermez.

Çok anlamlılıkta ise kullanımlar arasında bağlantı vardır: «Masaya ince bir örtü serdi.» ile «İnce bir ayrıntıyı fark etti.» cümlelerinde inceliğin fiziksel küçüklükten ayrıntılı olma yönüne geçişi açıklanabilir. Sesteşlikte iki ayrı kavramın sırf ses ve yazılış bakımından karşılaşması söz konusudur. Bu ayrım için sözcüğün cümledeki görevini ve anlam bağını göz önünde bulundurmak gerekir. Eş seslilikle eş anlamlılık da farklıdır: İlkinde ses aynı, anlam farklı; ikincisinde biçim farklı, anlam benzerdir.

Sesteşlik ve çok anlamlılık örnekleri

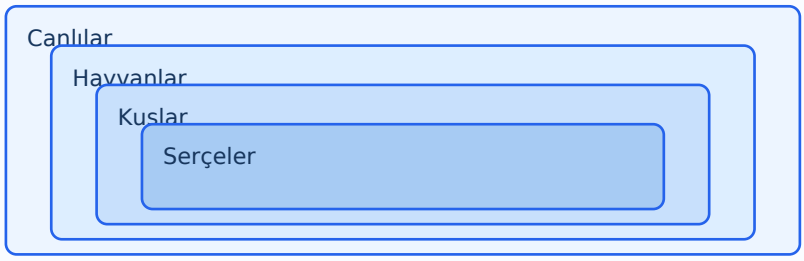
Kullanım çifti	İlişki	Gerekçe
Yaz mevsimi — Deftere yaz.	Sesteşlik	Mevsim adı ile eylem arasında anlam bağı yoktur.
Bahçede gül açtı. — Biraz gül.	Sesteşlik	Çiçek adı ile gülme eylemi ayrıdır.
Odanın kapısını açtı. — Yeni bir alan açtı.	Çok anlamlılık	Erişim sağlama ve ortaya çıkarma arasında aktarım bağı vardır.
Ağacın dalı — Kurumun yeni dalı	Çok anlamlılık	Fiziksel kolun başka bir yapının alt bölümüne aktarılmasıdır.

12. Genel ve özel anlam: Kapsamın genişliği

Sözcükler, karşıladıkları varlıkların oluşturduğu sınıf bakımından farklı genişlikte olabilir. «Canlı», «hayvan», «kuş» ve «serçe» sıralamasında kapsam giderek daralır. Her serçe kuştur; her kuş hayvandır; fakat her hayvan kuş veya her kuş serçe değildir. Genel anlam, daha geniş bir sınıfı; özel anlam, karşılaştırıldığı sözcüğe göre daha dar sınıfı karşılar. Aynı sözcük bir başka sözcük karşısında genel, üçüncü bir sözcük karşısında özel olabilir: Kuş sözcüğü serçeye göre genel, hayvana göre özeldir.

Kapsam ilişkisi niteliklerin üstünlüğünü veya değer sırasını bildirmez. «Araç» sözcüğü «otomobil»den daha genel olduğu için her araç otomobil değildir; otomobiller de diğer araçlardan mutlaka daha iyi değildir. Kapsamda doğru yönü seçmek, metinlerdeki «tümü», «bazısı», «hiçbiri» gibi ifadelerin sınırını anlamaya temel hazırlar.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

13. Somut ve soyut anlam

Somut anlam, duyularla algılanabilen varlık veya özelliklerle ilgilidir: taş, yağmur, koku, ses, sertlik ve sıcaklık uygun bağlamlarda somut algıya dayanır. Soyut anlam ise doğrudan duyu organlarıyla algılanmayan duygu, düşünce, ilişki veya kavramlara dayanır: umut, adalet, özlem, güven, süreklilik gibi. «Koku yayıldı.» somut duyusal algıya, «Umut arttı.» soyut bir duyguya işaret eder.

Somutluk ile gerçek anlam birbirine eşit değildir. «Taş ağırdı.» sözünde taş somut ve kullanım doğrudandır. «İçinde taş gibi bir sessizlik vardı.» ifadesinde taş sözcüğünün somut nesne olarak bilinen sertlik özelliği, soyut bir sessizliğe aktarılır. Aynı şekilde «Zaman ilerliyor.» ifadesinde zaman soyut olmasına rağmen kullanımın anlaşılması için mutlaka mecaz türü aranmaz. Sınıflandırma, sözcüğün metinde karşıladığı kavrama dayanır.

14. Nicel ve nitel anlam

Nicel anlam, sayılabilir, ölçülebilir veya miktarı karşılaştırılabilir özelliklere yönelir. «Uzun koridor», «üç katlı bina», «ağır çanta» gibi örneklerde fiziksel uzunluk, kat adedi ve ağırlık nicel yönden ele alınabilir. Nitel anlam ise bir varlığın nasıl olduğunu, hangi özelliği taşıdığını belirtir: «güvenilir kaynak», «özenli çalışma», «zarif tasarım» gibi. Buradaki nitelik doğrudan bir ölçü birimine indirgenmez.

Sözcüğün kendi başına nitel veya nicel sayılması yerine kullanımının belirlenmesi daha doğrudur. «Ağır koli» ölçülebilen kütleyi ima ederken «ağır sorumluluk» önem ve güçlük yönünden niteleyicidir. «Yüksek bina» fiziksel boyu, «yüksek beklenti» ise beklenti düzeyinin fazlalığını anlatır; ikincisi bir ölçekle nicelleştirilebilse de olağan kullanımda değerlendirici bir nitelik olarak işlev görebilir. Sınır durumlarında bağlamda açık ölçü bulunup bulunmadığı kontrol edilir.

Anlam sınıflandırmasında farklı ölçütler

İfade	İncelenen boyut	Gerekçeli yorum
Soğuk metal	Somut/soyut	Duyusal sıcaklık niteliği, somut algı
Soğuk karşılama	Gerçek/mecaz	İlgisizlik duygusu; mecaz kullanım
Geniş salon	Nicel/nitel	Fiziksel alan ölçülebilir; nicel
Geniş bakış açısı	Nicel/nitel	Düşünsel çeşitlilik ve kapsayıcılık; nitel/mecaz kullanım
Duyarlı çalışan	Nicel/nitel	Davranış özelliği; nitel
Yedi çalışan	Nicel/nitel	Sayılabilir miktar; nicel

15. Duygu, değerlendirme ve çağrışım

Bir sözcüğün temel sözlük karşılığı ile okuyucuda uyandırdığı duygu veya değer yargısı farklı katmanlardır. «Ev» sözcüğü barınılan yeri karşılayabilir; bir metinde güvenlik, aidiyet veya geçmişi de çağrıştırabilir. «Yuva» sözcüğü fiziksel barınma yanında sıcaklık ve yakınlık duygusunu güçlü biçimde taşıyabilir. Bu fark, iki sözcüğün her cümlede aynı etkiyi yaratmadığını gösterir.

«Tutumlu» ve «cimri» de parayı dikkatli kullanmakla ilgili görünse bile değerlendirme bakımından ayrılır. Tutumlu çoğu durumda ölçülü harcamayı olumlu, cimri ise gereğinden fazla kısmayı olumsuz anlatır. «Israrcı» ile «kararlı» aynı davranışın farklı yorumlarını çağrıştırabilir. Sözcükteki olumlu veya olumsuz duygu yükü, nesnel bir olgu ile konuşanın değerlendirmesini birbirine karıştırmamak açısından önemlidir.

Çağrışım kişiden kişiye değişebilir; ancak metin yorumunda kişisel anı değil, ifade ve bağlamla desteklenebilen anlam esas alınır. «Bu mahalle ona çocukluğunu hatırlatıyordu.» cümlesinde geçmiş çağrışımı açıkça belirtilmiştir; herhangi bir mahalle sözcüğünün bütün metinlerde mutluluk veya özlem taşıdığı söylenemez.

16. Kalıplaşmış söz gruplarının anlamı

İki veya daha çok sözcüğün bir araya gelmesiyle oluşan bazı ifadelerin anlamı, parçaların tek tek karşılıklarından bütünüyle çıkarılamaz. «Gözden düşmek» değer veya güven kaybetmeyi, «elini taşın altına koymak» sorumluluk üstlenmeyi anlatır. Bunlar sözcüklerin düz anlamıyla açıklanırsa metnin asıl iletisi kaçırılır. Deyimlerin kalıplaşmışlığı, özellikle sözcükleri keyfî eş anlamlılarıyla değiştirmeyi sınırlar.

Her söz grubu deyim değildir. «İnce dosya» sözcüklerin doğrudan birleşimi olabilir; «ince eleyip sık dokumak» ise bir işi ayrıntılı biçimde değerlendirmeyi anlatan kalıplaşmış ifadedir. Ayrıca bir ifade hem gerçek hem mecaz olarak bağlamdan bağımsız düşünülemez. «Kapıyı açtı.» fiziksel bir eylem iken «Yeni fırsatların kapısını açtı.» yeni olanakları mümkün kılmaya yönelik aktarmadır.

Atasözü, genel bir deneyim veya yargı aktarabilen kalıplaşmış cümle; deyim çoğunlukla bir durum ya da davranışı karşılayan kalıp söz grubudur. Bu ayrımın dil bilgisel ayrıntılarına girmeden, sözcükte anlam bakımından esas olan, ifadeyi bütün olarak yorumlamaktır. Aynı zamanda bir metindeki her mecazlı sözün mutlaka deyim olmadığı hatırlanmalıdır; «Sözleri bir kıvılcım gibi yayıldı.» özgün benzetme olabilir.

17. Bağlamdan anlam çıkarırken kullanılan ipuçları

Bilinmeyen bir sözcüğün anlamı çoğu zaman yakınındaki açıklama, karşıtlık, örnek, neden-sonuç ilişkisi veya yeniden adlandırma yoluyla daraltılabilir. «Görüşmeler tıkandı; taraflar yeni bir madde üzerinde ilerleme sağlayamadı.» cümlesinde noktalı virgülden sonraki açıklama, tıkanmanın görüşmenin durması anlamına geldiğini gösterir. Burada bir sözcüğü ayrı bir sözlük tanımıyla ezberlemekten çok, metnin sağladığı kanıtı görme becerisi önemlidir.

Açıklayıcı bağlamda yazar bir terimi hemen tanımlayabilir: «Mutabakat, tarafların belirli bir hususta ortak görüşe varmasıdır.» Karşıtlık bağlamında «İlk değerlendirme yüzeyseldi, sonraki inceleme ise ayrıntılıydı.» sözü yüzeyselin ayrıntıya girmeyen niteliğini açığa çıkarır. Örnekleme bağlamında «Sürekli gecikme, eksik bildirim ve belirsiz sorumluluk dağılımı gibi aksaklıklar...» ifadesi aksaklığın işleyişi bozan durumları kapsadığını gösterir.

Bağlam tahmini her zaman kesin anlam vermez. «Toplantıda yapılan eleştiri sertti.» cümlesinde sert sözcüğünün kırıcı, tavizsiz veya yoğun bir eleştiriyi anlattığı anlaşılabilir, fakat ses tonunu, eleştirinin haklılığını ya da kimin hedef alındığını tek başına belirlemez. Tahmin, cümledeki kanıtlar ölçüsünde tutulmalıdır; gerektiğinde güvenilir sözlükle karşılaştırılarak düzeltilir.

Bağlam ipuçları ve sınırları

İpucu türü	Özgün metin parçası	Desteklenen anlam	Desteklenmeyen yorum
Açıklama	Onay için mutabakat, yani ortak kabul gerekiyordu.	Mutabakat ortak kabul	Herkesin gönülden aynı düşünmesi zorunlu değil
Karşıtlık	Yüzeysel anlatım yerine ayrıntılı bir açıklama yaptı.	Yüzeysel: ayrıntıya girmeyen	Açıklamanın yanlış olduğu çıkmaz
Sonuç	Güzergâh kapandı, bu yüzden araçlar farklı yola yöneldi.	Kapanma geçişi engelliyor	Kapanmanın nedeni belirtilmiyor
Örnekleme	Arıza, gecikme ve kayıt kaybı gibi aksaklıklar görüldü.	Aksaklık: işleyişi bozan durum	Sayılanlar tüm aksaklık türleri değildir

18. Yerine koyma yöntemi ve anlamın korunması

Bir sözcüğün cümledeki anlamını denetlemenin yararlı yollarından biri, yerine yakın karşılıklı bir ifade koyarak anlamın korunup korunmadığını incelemektir. «Raporun dili yalın.» ifadesinde yalın yerine «sade, gereksiz süsten uzak» açıklaması getirildiğinde yargı korunur. Buna karşılık «Yalın ayak yürüdü.» cümlesinde «sade ayak» demek doğal ve doğru değildir; yalın burada «çıplak, üzerinde ayakkabı olmayan» anlamındadır. Aynı sözcüğün farklı bağlamları yöntemle ayrılır.

Yerine koyma denetimi yalnız sözcüğün temel karşılığını değil, cümlenin tüm anlamını gözetir. «Kurul öneriyi uygun buldu.» cümlesinde uygun sözcüğünü «yerinde» ile değiştirmek mümkünken «zorunlu» ile değiştirmek, kabul edilebilirlikten mecburiyet yargısına geçerek anlamı bozar. «Yalnızca bazı kayıtlar incelendi.» ifadesindeki yalnızca sözcüğünü çıkarmak da seçimin sınırını gevşetir. Bir anlam eşleştirmesinde küçük görünen belirteçler, metnin söylediğini esaslı biçimde değiştirebilir.

Sözcüğün karşılığı birden fazla sözcükten de oluşabilir. «Dosya için ön çalışma yaptı.» sözündeki ön, zaman bakımından asıl işlemden önce gerçekleşen hazırlığı belirtir; burada ön sözcüğünü her zaman tek bir kelimeyle açıklamak gerekmez. Açıklamanın uzunluğu değil, bağlama uygunluğu belirleyicidir.

19. Bütünleşik bir kısa metinde sözcük anlamı

Şu özgün kısa metin, birden çok anlam ilişkisini birlikte gösterir: «Yeni çalışma planı ilk toplantıda soğuk karşılandı. Ekip, önerinin zayıf yönlerini belirlemek için ayrıntılı bir değerlendirme yaptı. Hazırlayanlar eleştirileri kişisel bir saldırı saymak yerine planı olgunlaştıracak veriler olarak gördü. İkinci toplantıda bazı çekinceler giderildi; buna rağmen bütün üyeler aynı görüşe ulaşmadı.»

İlk cümledeki «soğuk» fiziksel sıcaklık bildirmez; isteksiz veya mesafeli bir tepkiyi anlatır. «Zayıf yönler» ifadesi bedensel güçsüzlüğü değil, planın eksik ve yetersiz kalan taraflarını karşılar. «Olgunlaştırmak» sözcüğü meyvenin olgunlaşmasıyla bağlantılı biçimde bir düşüncenin geliştirilmesini anlatan mecazlı kullanımdır. «Çekince» burada endişe ve tereddüt bildiren olumsuz değerlendirme olarak anlam kazanır; «giderilmek» bu kuşkuların ortadan kaldırılmasını belirtir.

Metnin sonundaki «bazı» ve «bütün» sözcükleri de önemli anlam sınırları taşır. Bazı çekincelerin giderilmesi, her çekincenin çözüldüğünü göstermez. Bütün üyelerin aynı görüşe ulaşmadığının söylenmesi ise hiç kimsenin anlaşmadığı anlamına gelmez. Bu tür kapsam belirleyiciler, anlamı yalnızca duygu ve mecaz yönünden değil, miktar ve mantıksal kapsam yönünden de belirler. Ancak bu bölümün odak noktası sözcüklerin işlevi olduğu için cümlede kesin yargının tüm kuralları sonraki konuda ele alınacaktır.

Metinde «değerlendirme» ve «eleştiri» yakın kavram alanlarına aittir fakat aynı sözcük değildir. Değerlendirme daha geniş biçimde güçlü ve zayıf yönleri tartmayı, eleştiri ise bunlara ilişkin görüş ve yargıları belirtmeyi öne çıkarabilir. «Soğuk karşılanma» ile «bütün üyelerin görüş birliğine varamaması» arasında da tek yönlü zorunlu bir sebep-sonuç ilişkisi kurulmaz; metin bu iki olguyu bildirir, birinin diğerine neden olduğunu açıkça kanıtlamaz. Böylece sözcükten yola çıkarak metnin söylemediği sonuçlara varma hatası önlenir.

20. Sözcükte anlamı güvenilir biçimde yorumlamanın bütünlüğü

Sözcük düzeyindeki yorum önce bağlamla başlar, ardından sözcüğün gerçek, yan, mecaz veya terim kullanımına bakılarak derinleştirilebilir. Anlamdaşlık, yakınlık ve karşıtlık ilişkileri ancak aynı bağlam ve anlam boyutu dikkate alınarak değerlendirilir. Sesteşlikte yazılış veya ses ortaklığı anlam birliği sanılmaz; genel-özel ilişkide hangi kümenin hangisini kapsadığı, somut-soyut ve nicel-nitel ayrımında ise hangi ölçütün kullanıldığı açık tutulur.

Güvenilir okuma, olası anlamı en güçlü bağlam ipucuyla destekleyen ve metnin izin vermediği ek yargıları dışarıda bırakan okumadır. Bir sözün ima ettiklerini kavramak önemlidir; fakat çağrışımı kesin bilgiye dönüştürmek farklı bir işlemdir. Bu denge, sözcüklerin işlevini çözmeyi yalnız tanım öğrenme işinden çıkarıp cümle ve paragraf düzeyinde dikkatli muhakemenin başlangıcına dönüştürür.

KONU 6.2

CÜMLEDE ANLAM VE KESİN YARGI

Bir cümleyi anlamak, yalnız sözcüklerin sözlük karşılıklarını bir araya getirmek değildir. Cümlenin kimi veya neyi anlattığını, hangi bilgiyi doğruladığını, hangi ilişkiyi kurduğunu, neyi dışarıda bıraktığını ve neyi yalnızca olası gösterdiğini birlikte değerlendirmek gerekir. Özellikle bilgi metinlerinde küçük bir zaman ifadesi, sınırlayıcı sözcük ya da olasılık belirteci yargının kapsamını değiştirebilir. «Üç birimden ikisi raporunu teslim etti.» ifadesiyle «Üç birim de raporunu teslim etti.» ifadesi arasındaki fark, yalnız bir sözcük değil, ulaşılan sonucun kendisidir.

Cümlede anlam çalışması; cümlenin temel iletisini bulmayı, yargılar arasındaki ilişkileri ayırt etmeyi, duygu ve düşünce tutumunu fark etmeyi ve metinden kesin olarak çıkarılabilenle ek varsayım gerektireni birbirinden ayırmayı kapsar. Bu bölümün amacı, bir cümleyi tek bir etiketle sınıflandırmak yerine, ifadenin sağladığı

kanıttan hareketle güvenilir okuma yapmaktır. Sözcükte anlamın bağlam ilkesi GY-06.01'de ele alınmıştır; burada odak, sözcüklerin oluşturduğu yargının sınırlarıdır.

1. Cümlenin bildirdiği yargı ile okuyucunun eklediği düşünce

Yargı, bir kişi, varlık, durum veya olay hakkında ileri sürülen düşünce ya da bilgidir. «Arşiv binası pazartesi günü ziyarete açıldı.» cümlesi bir olayın gerçekleştiğini ve zamanını bildirir. Aynı cümlede binanın geçen yıl yapıldığı, yalnız pazartesi günleri açık olduğu veya açılışa çok sayıda kişinin katıldığı söylenmemektedir. Bunlar gerçekle bağdaşabilecek ihtimaller olsa bile verilen ifadeden zorunlu olarak çıkmaz.

Bir cümle kimi zaman birden fazla bilgi taşır. «Beş yıldır hizmet veren danışma birimi, bu ay çevrim içi başvuruları da almaya başladı.» ifadesi; birimin yeni kurulmadığını, belirli bir hizmet geçmişi bulunduğunu ve çevrim içi başvuru alma işinin bu ay başladığını belirtir. Buna karşılık daha önce hiç başvuru alınmadığını söylemek yanlıştır: Önceki başvurular başka yöntemlerle alınmış olabilir. «Da» sözcüğü yeni kanalın, bağlama göre, önceden var olan hizmete eklendiğini bildirir; mevcut yöntemlerin kaldırıldığını kanıtlamaz.

Cümlenin açıkça söylediği bilgi doğrudan yargıdır. Bu bilgiyle çelişmeden zorunlu olarak ulaşılan sonuç ise çıkarımdır. Çıkarım için dışarıdan bir olgu eklenmemesi gerekir. Kısa bir cümle bile çok sayıda yorum çağrıştırabilir; bunların yalnız metnin temellendirdikleri güvenilir kabul edilir.

2. Kesin yargı: Söylenenin zorunlu sonucu ile olasılık arasındaki çizgi

«Kesin olarak çıkarılabilecek yargı», verilen cümlenin doğru kabul edilmesi hâlinde, başka bir bilgiye gerek kalmadan doğru olmak zorunda olan sonuçtur. Bu ölçüt, yazarın gerçekten doğru söyleyip söylemediğine ilişkin dış doğrulamadan farklıdır. Bir metni anlam bakımından incelerken önce metnin neyi iddia ettiği belirlenir; iddianın tarihsel veya bilimsel doğruluğu ayrı bir araştırma konusudur.

«Dört atölyeden en az ikisi bugün çalıştı.» ifadesinden bugün en az bir atölyenin çalıştığı kesin çıkar. Ama tam olarak iki atölyenin çalıştığı çıkarılamaz; üçü veya dördü de çalışmış olabilir. «Dört atölyeden yalnız ikisi bugün çalıştı.» denirse sayı tam olarak ikiye iner. «En az», «en çok», «yalnız», «hepsi», «hiçbiri», «bir kısmı» gibi belirteçler bu nedenle ayrıntı değil, kanıtın sınırını belirleyen unsurlardır.

Bir sonucun gündelik hayatta beklenmesi onu kesin yapmaz. «Yeni otobüs hattı açıldı.» cümlesi ulaşım seçeneğinin arttığına işaret edebilir; ancak yolcu sayısının arttığını, trafik sıkışıklığının azaldığını veya hattın verimli olduğunu doğrudan kanıtlamaz. Kesin çıkarım, makul tahminin daha güçlü biçimi değildir; farklı bir kanıt düzeyidir.

Cümleye dayanarak söylenebilecekler ve ek varsayım gerektirenler

Verilen cümle	Kesin olarak desteklenen bilgi	Kesin olarak desteklenmeyen yorum
İki kurul üyesi toplantıya katılmadı.	En az iki üye yoktu.	Diğer üyelerin tamamı katıldı.
Yalnız üç başvuru zamanında tamamlandı.	Zamanında tamamlanan başvuru sayısı üçtür.	Geri kalan başvuruların niçin geciktiği bellidir.
Çalışma önümüzdeki ay başlayabilir.	Başlama ihtimali dile getiriliyor.	Çalışma mutlaka başlayacak.
Dosya yeniden incelenecek.	Bir inceleme daha yapılması öngörülüyor.	Önceki incelemede kesin hata bulundu.
Sınavdan önce üç oturum düzenlendi.	Oturumlar sınavdan daha önceydi.	Sınavdan sonraki takvim bilinmektedir.

3. Yargının kapsamı: bütün, bazı, hiçbiri ve sayı sınırlamaları

Kapsam, bir yargının kimleri veya hangi nesneleri içine aldığını gösterir. «Bütün katılımcılar formu doldurdu.» sözü, ifade edilen katılımcı kümesinin her üyesine form doldurma niteliğini yükler. «Katılımcıların bazıları formu doldurdu.» sözünde en az bir katılımcı hakkında bilgi vardır; geri kalanlar için kesin hüküm kurulmaz. Konuşma dilinde «bazıları» çoğu zaman «hepsi değil» çağrışımı yapabilir, ancak ek bir sınırlama verilmedikçe mantıksal olarak bütün katılımcıların form doldurmuş olma ihtimalini tek başına dışlamaz.

«Hiçbir başvuru değerlendirmeye alınmadı.» ifadesi bütün başvurular bakımından olumsuz sonuç bildirir. «Her başvuru değerlendirmeye alınmadı.» ya da «Bütün başvurular değerlendirilmedi.» söyleyişleri ise Türkçede bağlama göre «hiçbiri alınmadı» veya «tamamı alınmadı» biçiminde farklı anlaşılabildiği için kesin sonuç ararken ihtiyatlı kullanılmalıdır. Net bir ayrım isteniyorsa «Başvuruların hiçbiri değerlendirilmedi.» ile «Başvuruların en az biri değerlendirilmedi.» farklı ve açık ifadelerdir.

«En az beş belge» beş ya da daha çok; «en fazla beş belge» sıfırdan beşe kadar (bağlama uygun sayıda); «tam beş belge» ise ne dört ne altı, doğrudan beş demektir. «Birden çok» en az iki, «birkaç» ise kesin bir sayı bildirmeyen sınırlı çokluğu anlatır. Çoğunluk ve azınlık gibi sözcükler de hangi bütün üzerinden konuşulduğu bilinmeden kesin sayı vermez. «Çoğunluk» açık bir sayısal bağlamda yarıdan fazlayı ifade etse de «büyük çoğunluk» tek başına kesin bir yüzde sağlamaz.

Kapsam belirteçleri ve izin verdikleri çıkarımlar

İfade	Güvenilir anlam	Çıkarılamayan ek sonuç
Her çalışan katıldı.	Belirtilen çalışanların tamamı katıldı.	Başka kişiler de mutlaka katıldı.
Bazı çalışanlar katıldı.	En az bir çalışan katıldı.	Geri kalanların tamamı katılmadı.
Çalışanların hiçbiri katılmadı.	Bu kümeden katılan yok.	Toplantıya hiç kimse katılmadı.
En az altı kayıt incelendi.	İncelenen kayıt sayısı altıdan az değil.	Tam altı kayıt incelendi.
En fazla altı kayıt incelendi.	İncelenen sayı altıyı aşmıyor.	Mutlaka altı kayıt incelendi.
Yalnızca A ve B birimleri davet edildi.	Davetli birimler A ve B ile sınırlandırıldı.	Bu birimlerdeki bütün personel davet edildi.

4. Olumlu ve olumsuz cümle ile karşıt yargı aynı şey değildir

Olumluluk ve olumsuzluk, cümlenin yüklediği durumun gerçekleşip gerçekleşmediğine ilişkin dilsel işaretlemelerdir. «Tutanak hazırlandı.» bir eylemin gerçekleştiğini, «Tutanak hazırlanmadı.» bunun gerçekleşmediğini bildirir. Ancak «Tutanak hazırlanmadı.» cümlesinden tutanağın hazırlanmasının yasak olduğu, hiç hazırlanamayacağı veya ileride hazırlanmayacağı çıkmaz.

Bir yargının karşıtı, yalnız sözcüğe olumsuzluk ekleyerek değil, bildirdiği anlam sınırları incelenerek belirlenir. «Her dosya onaylandı.» yargısını çürütmek için bir dosyanın onaylanmamış olması yeterlidir; «Hiçbir dosya onaylanmadı.» demek gerekmez. Benzer biçimde «Bazı üyeler gelmedi.» ifadesinden «Bütün üyeler gelmedi.» biçiminde evrensel bir hükme geçilemez. Olumsuzluk işaretinin hangi sözcük grubuna bağlandığı anlamı değiştirir.

«Toplantı yapılmadı.» ile «Toplantı yapılması önerilmedi.» farklı yargılardır; birincisi gerçekleşmeye, ikincisi öneriye ilişkindir. «Görüşme başarısız değildi.» sözü doğrudan «Görüşme son derece başarılıydı.» anlamına gelmez. Başarısız bulunmama, kuvvetli övgüyle eşdeğer değildir. Bir cümlenin olumsuzluk biçimi, sözcüğün değer derecesini kendiliğinden en uç karşıta taşımaz.

5. Zaman, sıra ve süreç işaretleri

Zaman bildiren unsurlar, olayın hangi dönemde gerçekleştiğini ve diğer olaylarla sırasını sınırlar. «İlk rapordan sonra ikinci rapor yayımlandı.» denildiğinde ikinci raporun ilkinden sonra yayımlandığı bilinir; iki raporun içeriklerinin aynı veya farklı olduğu bilinmez. «Toplantıdan önce hazırlık yapıldı.» cümlesi hazırlığın önce geldiğini doğrular, hazırlık için kaç gün harcandığını söylemez.

«Henüz», «artık», «yeniden», «ilk kez», «daha», «önceden», «son» sözcüklerinin bağlama göre önemli yükleri vardır. «Komisyon yeniden toplandı.» ifadesi daha önce de en az bir kez toplandığını düşündüren açık tekrar işaretidir. «Birim ilk kez çevrim içi duyuru yayımladı.» denildiğinde ilgili kapsam içinde daha önce böyle bir yayım bulunmadığı ileri sürülür. «Son toplantıda» sözü, anlatıcının başvurduğu dönem bakımından en yakın toplantıyı gösterebilir; ileride hiçbir toplantı yapılmayacağı anlamına gelmez.

«Henüz sonuç açıklanmadı.» mevcut ana kadar açıklama yapılmadığını, açıklamanın daha sonra yapılabileceğine ilişkin bir beklentiyi gösterebilir; kesin açıklanma tarihi vermez. «Artık gece çalışmıyor.» cümlesi önceki döneme göre bir değişime işaret eder, ancak hangi tarihte bıraktığını kesinleştirmez. Kapsamı belirtilmeyen «birinci», «ilk», «son» gibi sözcüklerde referans grubunun kendiliğinden genişletilmemesi gerekir.

Zaman ve süreç ifadesinin sınırları

Cümle	Desteklenen bilgi	Desteklenmeyen bilgi
Rapor yeniden yazıldı.	Önceden bir yazım girişimi veya sürümü vardı.	İlk metin bütünüyle yanlıştı.
Henüz karar verilmedi.	Sözü edilen ana kadar karar yok.	Mutlaka yarın karar verilecek.
Görüşme, sunumdan sonra başladı.	Sunum önce, görüşme sonra gerçekleşti.	Sunum görüşmenin nedenidir.
Yazar ilk kitabını 2018'de yayımladı.	Verilen eser ilk kitabı olarak belirtilmiştir.	Sonraki kitapların sayısı bellidir.
Bu yıl daha çok ziyaretçi geldi.	Bağlamdaki karşılaştırma ölçütüne göre artış iddia ediliyor.	Artış miktarı mutlaka bilinmektedir.

6. Neden-sonuç: Gerçekleşmiş olaylar arasındaki gerekçe ilişkisi

Neden-sonuç ilişkisinde bir durumun niçin oluştuğu diğer durumla açıklanır. «Şiddetli yağış yüzünden açık hava etkinliği ertelendi.» ifadesinde erteleme sonuç, şiddetli yağış ise bildirilen nedendir. «Yüzünden», «nedeniyle», «dolayı», «için», «-dığından» gibi yapılar bu ilişkiyi kurabilir; ancak aynı sözcüğün her kullanımının neden anlamı taşıdığı söylenemez. Bağlam, nedenselliğin mi yoksa başka bir ilişkinin mi anlatıldığını gösterir.

«Ulaşımda aksama yaşandığı için toplantıya geç kaldı.» cümlesinde geç kalma gerçekleşmiş bir olgu olarak sunulur. «Toplantıya geç kalmamak için erkenden çıktı.» ifadesinde ise amaç vardır; geç kalmadığı henüz kanıtlanmaz. Bu iki yapıda aynı «için» sözcüğünün kullanılması, anlam ilişkilerinin aynı olduğu anlamına gelmez.

Nedensel anlatımın kendisi de kaynak açısından değerlendirilmelidir. «İncelemeye göre gecikme, malzeme eksikliğinden kaynaklandı.» cümlesi, incelemenin ulaştığı neden açıklamasını aktarır. Okurun bunu doğrudan kesinleşmiş ve tartışmasız dış gerçek olarak değerlendirmesi, verilenden daha ileri bir bilgi iddiasıdır. Cümlede anlam bakımından güvenilir çıkarım, nedeni kimin ileri sürdüğünü de korur.

7. Amaç-sonuç ve sonuçlanan eylem ayrımı

Amaç-sonuç ilişkisi, bir eylemin hangi hedefe yöneldiğini açıklar. «Belgeleri kaybetmemek için dijital kopya oluşturdu.» cümlesi dijital kopya oluşturma eyleminin gerçekleştiğini, bunun belgelerin kaybolmasını önlemeye yönelik olduğunu belirtir. Belgelerin hiçbir zaman kaybolmadığını ise zorunlu olarak söylemez. Amaç bildirilen işin başarıyla tamamlandığı kanıtı değildir.

«Yeni yöntemle süreyi kısaltmayı hedefledi.» sözünde hedef ortadadır; hedefin gerçekleşip gerçekleşmediği açık değildir. «Yeni yöntem sayesinde işlem süresi kısaldı.» sözünde ise bir sonuca ulaşıldığı ve bunu açıklayan bir etken olduğu iddia edilir. Amaç ile gerçekleştirilmiş sonuç birbirine dönüştürülmemelidir. Bir metinde «için» sözcüğü sebep de gösterebilir: «Yoğunluk için ek personel görevlendirildi.» gibi eksiltili bir ifade amaç, gerekçe veya ihtiyaca yanıt bağlamında okunabilir; güvenilir yorum ancak tamamlayıcı cümlelerle yapılır.

Neden, amaç ve sonuç türlerinin karşılaştırılması

Özgün cümle	Temel ilişki	Güvenilir yorum
Sis nedeniyle sefer iptal edildi.	Neden-sonuç	Sis iptalin bildirilen nedenidir; iptal gerçekleşmiştir.
Seferin iptal edilmemesi için plan değiştirildi.	Amaç-sonuç	Plan değişmiştir; iptalin kesin önlendiği söylenemez.
Plan değişince süre on dakika azaldı.	Zamanla birlikte nedensel yorum da taşıyabilir	Süre azalması bildirilir; neden gücü bağlamla denetlenir.
Daha hızlı çalışmak amacıyla yazılım yenilendi.	Amaç-sonuç	Yenileme yapılmıştır; verim artışı henüz kanıtlanmaz.
Yeni yazılımla hazırlık süresi azaldı.	Sonuç ve araç ilişkisi	Süre azalması bildirilmiştir; ölçünün ayrıntısı verilmez.

8. Koşul-sonuç ilişkisi ve koşulun sağlanması meselesi

Koşul, bir yargının hangi şarta bağlı olduğunu gösterir. «Belgeler zamanında ulaşırsa inceleme başlayacak.» sözü, incelemenin başlamasına ilişkin koşullu bir öngörü ortaya koyar. Belgelerin ulaştığı, incelemenin başladığı veya bunların kesinlikle gerçekleşeceği bu cümleden çıkmaz. «-sa/-se», «yeter ki», «-dığında», «-madıkça» gibi yapılar koşul ilişkisine katkıda bulunabilir; fakat her kullanımda aynı kesin mantıksal yapı bulunmaz.

Güçlü bir kural niteliğindeki «Kimlik doğrulanırsa hesaba erişim açılır.» ifadesinde kimlik doğrulanması, belirtilen kural çerçevesinde erişimin açılması için yeterli bir koşul olarak sunulur. Buradan hesaba erişimi olan herkesin mutlaka aynı yöntemle kimlik doğruladığı çıkarılamaz; başka erişim yolları bulunabilir. Ayrıca «Kimlik doğrulanmazsa erişim kesinlikle açılamaz.» sonucuna, yalnız ilk koşul cümlesinden geçilemez. Bunların ayrıca söylenmesi gerekir.

«Yalnız kimliği doğrulananlara erişim verilir.» cümlesi ise erişim için doğrulamanın gerekli olduğunu bildirir; doğrulanan her kişinin mutlaka erişim alacağını tek başına bildirmez. «Kimliği doğrulanan herkes erişim alır.» şeklindeki farklı ifade, şartı yerine getiren herkes için sonuç vaat eder. Dilsel koşulun gerekli mi, yeterli mi olduğuna dikkat etmek, özellikle «ancak», «yalnızca», «yeter ki» sözlerini yorumlarken önemlidir. Gündelik dildeki koşullu sözlerin bazen temenni, uyarı veya tahmin işlevi taşıdığı da unutulmamalıdır; bunlar her zaman değişmez bir matematik yasası değildir.

Koşul cümlelerinde zorunlu ve zorunlu olmayan sonuç

Verilen ifade	Bildirilen şart ilişkisi	Kesin söylenemeyen
Şifre doğru girilirse oturum açılır.	Kural geçerliyse doğru şifre oturumu açmak için yeterlidir.	Açılan her oturumda şifre girilmiştir.
Yalnız kayıtlı kullanıcılar girebilir.	Giriş için kayıtlı olmak gerekir.	Her kayıtlı kullanıcı mutlaka girer.
Kayıt yaptırmadıkça belge alamaz.	Kayıt belge almanın gerekli koşuludur.	Kayıt yapan herkesin belgesi mutlaka hazırdır.
Belgeler tamamsa işlem yarın başlatılabilir.	Belge tamlığı altında başlangıç mümkün görülebilir.	İşlem yarın kesin başlar.

9. Karşılaştırma: Bir niteliğin bir referansa göre değerlendirilmesi

Karşılaştırma cümlesi en az iki varlığı, durumu, dönemi veya özelliği belirli bir ölçüte göre ilişkilendirir. «Bu yılın raporu geçen yılkinden daha ayrıntılı.» sözü karşılaştırılan iki raporu ve karşılaştırma ölçütünü belirtir. Ancak daha ayrıntılı olmak, raporun daha doğru, daha uzun veya daha kullanışlı olduğunu mutlaka kanıtlamaz. Karşılaştırmanın konusu hangi nitelikse çıkarım yalnız o nitelikle sınırlandırılır.

«A, B'den hızlıdır.» cümlesinde A'nın hızının B'den yüksek olduğu söylenir; her ikisinin başka kişiler karşısındaki sırası bilinmez. «A en hızlı çalışan oldu.» cümlesindeki üstünlük ise belirtilmiş grubun tamamına göre kurulur. «En» ifadesi mutlak, evrensel üstünlük göstermez; karşılaştırmanın sınırları belirtilmemişse tüm dünya veya bütün zamanlar varsayılamaz.

Karşılaştırma mutlaka «daha» sözcüğüyle yapılmaz. «Önceki tasarım uzun açıklamalar içerirken yeni sürüm daha kısa notlarla ilerliyor.» cümlesinde «-ken» iki sürümü karşılaştırır. «Bu değerlendirme diğerine göre daha tutarlı.» cümlesi ise açık karşılaştırma yapar fakat «tutarlılık» ölçütünün dayanağı verilmedikçe değerlendirme öznel olabilir. Karşılaştırma bulunması, tek başına nesnellik veya kesin kanıt anlamına gelmez.

10. Benzetme, örneklendirme, tanımlama ve açıklama

Benzetme, bir durumun özelliğini başka bir varlık veya duruma benzer yön üzerinden belirginleştirir. «Kütüphanenin sessizliği boş bir salondaki yankı gibi büyüyordu.» ifadesi bilimsel bir ses ölçümü değil, anlatısal bir benzerlik kurar. Benzetilenle benzetme unsuru her yönden aynı olmak zorunda değildir. «Bir uzman gibi titiz davrandı.» cümlesi kişinin gerçekten uzman olduğunu kanıtlamaz.

Örneklendirme, soyut bir yargının somut üyelerini sunar. «Arşivde farklı türde belgeler bulunur; sözleşmeler, çizelgeler ve yazışmalar bunlardan bazılarıdır.» ifadesindeki sayılan örnekler bütün belge türlerini tüketmek zorunda değildir. Tanımlama ise bir kavramın ne olduğunu açıklamayı amaçlar: «Çalışma takvimi, bir süreçte yapılacak işlerin zaman sırasına göre düzenlendiği plandır.» cümlesi tanıma yakındır. Her tanım biçimsel olarak «-dır» ekiyle bitmez; her «-dır» ile biten cümle de tanım değildir.

Açıklama, daha önce belirtilmiş bir düşünceyi anlaşılır kılar; örnekleme bunun araçlarından yalnız biridir. «Görev paylaşımı net değildi; aynı işlem iki kişiye verilmiş, bazı işler ise sahipsiz kalmıştı.» cümlesinde sonraki yargılar ilkini açıklamaktadır. Dolayısıyla cümleyi etiketlemekten çok, hangi bilginin hangisini desteklediği önemlidir.

11. Öznel ve nesnel yargı: Kanıtlanabilirlik ile doğruluk farkı

Öznel yargı, kişisel beğeni, duygu, değer biçme veya yoruma dayanır. «Bu sergi yılın en etkileyici etkinliğiydi.» sözü, değerlendiren kişiye göre değişebilir. Nesnel yargı, belirli ölçüt veya kaynaklarla sınanabilir bilgi iddiasıdır. «Sergi kırk gün boyunca ziyarete açık kaldı.» cümlesi doğrulama yapılabilecek bir süre bildirir. Bir yargının nesnel biçimde kurulmuş olması, onun mutlaka doğru olduğu anlamına gelmez; sayının veya olayın doğrulanması yine gerekir.

«İlçenin en güzel parkı burasıdır.» cümlesinde «güzel» değerlendirme ölçütü belirsizdir. «İlçede yüz dönümün üzerinde üç park bulunuyor.» ifadesi ise coğrafi kayıtlarla denetlenebilir niteliktedir. «Bu kitap 240 sayfadır.» objektif olarak kontrol edilebilir ama gerçek kitap başka sayıda olabilir; ifade yine nesnel türdedir, yalnız yanlış olabilir. Aynı cümlede iki boyut da bulunabilir: «Otuz sayfalık rapor, anlaşılır diliyle dikkat çekiyor.» ifadesinde sayfa sayısı sınanabilir, anlaşılır bulma ise yoruma açıktır.

«Bence», «bana göre» gibi belirteçler değerlendiren özneyi açık kılar fakat bunların bulunmaması nesnel olduğu anlamına gelmez. «Muhteşem bir çözüm geliştirildi.» cümlesindeki «muhteşem» öznel bakış taşır. Nesnel/öznel ayrımı, sonraki çıkarım aşamasında yargının dayandığı kanıtın türünü görmeyi sağlar.

Kanıtlanabilir bilgi ile değerlendirme içeren anlatım

Cümle	Anlam niteliği	Dayanak veya sınır
Program üç oturumdan oluşuyor.	Nesnel türde	Oturum sayısı programla karşılaştırılabilir.
Program son derece başarılıydı.	Öznel	Başarı ölçütü belirtilmezse yorum öne çıkar.
Yazının başlığı sekiz sözcüktür.	Nesnel türde	Sözcükler sayılabilir; ifade yine kontrol gerektirir.
Yazının başlığı gereğinden uzundur.	Öznel veya ölçüte bağlı değerlendirme	«Gereğinden» ifadesinin standardı verilmelidir.
Metin on sayfadır ve akıcıdır.	Karma	Sayfa sayısı doğrulanabilir, akıcılık bir değerlendirmedir.

12. Varsayım, olasılık, tahmin ve kesinlik derecesi

Varsayım, bir durumun geçici olarak doğru kabul edilmesiyle düşünce yürütmektir: «Yeni kayıt sisteminin yarın başladığını varsayalım.» cümlesi gerçek bir başlangıç duyurusu değil, düşünsel bir kabul sunar. Olasılık, bir olayın gerçekleşebilmesinden söz eder: «Toplantı öğleden sonraya alınabilir.» Bu ifade kararın alındığını veya mutlaka alınacağını bildirmez. Tahmin ise eldeki belirtilerden geleceğe veya bilinmeyene ilişkin sonuç öngörmektir: «Yoğunluk sürerse bekleme süresi artabilir.»

Kesinlik derecesi dilde belirteçlerle değişir. «Mutlaka gelecek», «büyük olasılıkla gelecek», «gelebilir» ve «gelmesi mümkün değil» farklı beklentiler bildirir. «Geleceğini sanıyorum.» cümlesi kişinin düşüncesini güçlü gösterebilir; gerçekte geleceğinin kesin kanıtı değildir. «Sanırım», «galiba», «belki», «olabilir» sözleri ile «kesinlikle», «kuşkusuz» sözleri cümlenin doğruluk konusundaki tutumunu yansıtır. Bununla birlikte «kesinlikle» sözcüğünü kullanmak, iddiaya dış dünyada kesin kanıt kazandırmaz.

«Belli ki» ve «anlaşılan» gibi sözler gözlemden çıkarım yapıldığını gösterebilir. «Işıklar kapalı; anlaşılan toplantı sona ermiş.» ifadesinde ikinci yargı yorumdur; ışıkların kapanmasının başka açıklamaları olabilir. Bu ayrım, sözel anlamda tahminin olgu gibi sunulmasını önler.

13. Öneri, gereklilik, uyarı, beklenti ve dilek

Bir cümle olup biten bir olayı bildirmek yerine yapılması isteneni anlatabilir. «Duyurular daha kısa cümlelerle hazırlanmalı.» bir gereklilik veya öneri bildirir; duyuruların zaten kısa hazırlandığını kanıtlamaz. «Belgeleri teslim etmeden önce kontrol edin.» ifadesinde yönlendirme ve uyarı bulunur. «Keşke hazırlığa daha erken başlayabilseydik.» cümlesi gerçekleşmemiş veya gerçekleşmesi beklenen bir duruma yönelik dilek ve eksiklik duygusu taşıyabilir.

«Yeni uygulamanın süreci hızlandırmasını bekliyoruz.» sözünde beklenen sonuç henüz gerçekleşmiş kabul edilmez. «Çalışma saatlerini uzatmanız daha uygun olur.» ifadesi değerlendirici bir öneridir; saatlerin uzatıldığı sonucu çıkarılamaz. «Gerekiyor», «şart», «zorunda», «-malı/-meli», «yerinde olur» sözcükleri bağlama göre gereklilik derecesini gösterir. Gereklilik bildirimi ile gerçekleşme kaydı arasındaki ayrım özellikle kurumsal ifadelerde önem taşır.

İstek, dilek ve temenninin güçleri farklı olabilir. «Gelecek toplantının daha verimli geçmesini umuyoruz.» sözünden mevcut toplantının verimsiz geçtiği zorunlu olarak çıkmaz; gelecek toplantıya ilişkin olumlu bir beklenti ifade edilir. «Bir daha böyle bir gecikme yaşamamayı diliyorum.» cümlesi önceki gecikmeye gönderme yapar, gelecekte gecikme olmayacağını garanti etmez.

14. Duygu ve tutum: yakınma, sitem, eleştiri, pişmanlık, hayıflanma

Cümlede yazarın tutumu, söylenen olgudan ayrı bir anlam katmanı oluşturabilir. Yakınma, olumsuz bir durumdan rahatsızlığı dile getirmektir: «Bu dosyayı her seferinde son dakikada getiriyorlar.» cümlesi tekrarlanan bir davranışa dönük şikâyet taşıyabilir. Sitem, genellikle muhatabın beklenen davranışı göstermemesinden kaynaklanan kırgınlıktır: «Bu önemli günde bir haber bile vermedin.» ifadesi beklenen ilgisizliğe duyulan üzüntüyü yansıtır.

Eleştiri, bir kişi, eser, karar veya uygulamanın yönlerini değerlendirmektir; yalnız olumsuz olmak zorunda değildir. «Raporun verileri güçlü, ancak açıklamaları yetersiz.» cümlesi olumlu ve olumsuz değerlendirmeyi birlikte içerir. Öz eleştiri, kişinin kendi karar veya davranışını sorgulamasıdır: «Zamanı iyi planlayamadığımı şimdi görüyorum.» Pişmanlık, yapılmış bir davranış nedeniyle duyulan üzüntüyü gösterir: «Keşke o sözleri söylemeseydim.» Hayıflanma ise çoğu kez kaçırılmış bir fırsat, gerçekleştirilememiş bir iş veya geçmişteki kayıp nedeniyle duyulan üzüntüdür: «O fırsatı değerlendiremediğime üzülüyorum.»

Aynı söz farklı bağlamlarda başka bir tutum taşıyabilir. «Yine erkenden geldin.» cümlesi ses tonu ve bağlama göre övgü, şaşkınlık veya alay olabilir. Bağlam verilmedikçe tek bir duygunun kesin bulunduğunu söylemek doğru olmaz. Tutum belirlerken yalnız tek sözcüğe değil, cümlenin bütünü ve konuşanın yöneldiği kişiye bakılır.

Tutum ve duygu bildiren özgün cümlelerin ayrımı

Cümle	Öne çıkan tutum	Belirleyici gerekçe
Her toplantıyı başlama saatinden sonra açıyoruz.	Yakınma taşıyabilir	Tekrarlanan gecikmeden rahatsızlık bağlamıyla oluşur.
Senden küçük bir haber bekledim, onu da göndermedin.	Sitem	Muhataba yönelik kırgınlık vardır.
Kendi payıma düşen hazırlığı ihmal etmişim.	Öz eleştiri	Kendi davranışını olumsuz değerlendirir.
Keşke o anda daha sakin konuşsaydım.	Pişmanlık	Geçmişte yapılan sözlü davranıştan üzüntü duyar.
Yıllarca ertelediğim geziyi hiç gerçekleştiremedim.	Hayıflanma bağlamı oluşabilir	Kaçırılmış imkân vurgulanır; üzüntü söylenirse netleşir.
Tasarımı yaratıcı buldum, fakat kullanımı karmaşık.	Eleştirel değerlendirme	Güçlü ve zayıf yön birlikte belirtilir.

15. Ön yargı, alışkanlık, genelleme ve kesin olmayan değerlendirme

Ön yargı, yeterli değerlendirme yapılmadan bir kişi, eser veya durum hakkında peşin hükme varmaktır. «Bu yeni yöntemin işe yaramayacağı daha denemeden belli.» cümlesi, sonuç görülmeden verilen olumsuz hükmü örnekler. «Bir kez geciken herkes daima geç kalır.» gibi aşırı genellemeler, tekil bir deneyimden bütün kişiler için zorunlu sonuç üretme hatasına dayanır.

Alışkanlık bildirimi, yinelenen davranışı anlatır: «Her ayın ilk haftasında değerlendirme yaparız.» ifadesi düzenli bir uygulamayı belirtir; tek bir ayın değerlendirmesinin yapılıp yapılmadığını ayrıca kanıtlamaya ihtiyaç olabilir. «Genellikle», «sık sık», «çoğu kez», «ara sıra» gibi sıklık sözleri kesin toplam sayı vermez. «Daima» ve «hiçbir zaman» ise geniş kapsamlı iddialardır; kullanıldığı bağlamda önemli istisna kısıtları oluşturur.

Bir kişiye ait görüşün aktarılması ile o görüşün yazar tarafından benimsenmesi de farklıdır. «Bazı uzmanlar yöntemin verimi artırdığını düşünüyor.» cümlesi uzmanların düşüncesini bildirir; yöntemin verimi kesin artırdığını söylemek anlamı güçlendirmek olur. «Yöntem verimi artırdı.» cümlesi doğrudan gerçekleşmiş sonuç iddiasıdır. Atıf kaynağı korunmadığında görüş, yanlış biçimde olguya dönüştürülebilir.

16. İhtimal, yeterlik, izin ve zorunluluğun aynı fiille karışması

«-abilir/-ebilir» eki Türkçede farklı işlevler üstlenebilir. «Bu cihaz eski dosyaları da açabilir.» yetenek veya kapasite; «Toplantı biraz geç başlayabilir.» olasılık; «Mesai bitince ayrılabilirsiniz.» bağlama göre izin bildirir. Bu üç cümleden aynı tür kesin sonuç çıkmaz. Bir cihazın dosya açabilmesi, belirli dosyanın açılmış olduğu; toplantının geç başlayabilmesi, kesin geç başlayacağı; ayrılma izni, kişinin ayrıldığı anlamına gelmez.

«Ayrılmalıdır» gereklilik, «ayrılacak» gelecek zaman yönelimli bildirim veya plan, «ayrıldı» gerçekleşmiş bir olaydır. Gerçekleşme derecesi güçlü gibi görünen biçimler bile başka sözlerle sınırlandırılabilir: «Belki ayrılacak.» kesinliği azaltır. «Ayrılmayı planlıyor.» ise planı bildirir, ayrılmayı değil. Bu fark, özellikle kısa haber, duyuru veya rapor cümlelerinde yanlış sonuç çıkarılmasını engeller.

Kesin yargıda kip ve kaynak sınırı «Yapılması gerekiyor», «yapılması planlanıyor», «yapılabilir», «yapıldığı bildirildi» ve «yapıldı» ifadeleri aynı kanıt gücüne sahip değildir. Aktarılan iddia, plan veya ihtimal gerçekleşmiş olay yerine konulmamalıdır.

17. Cümleler arasında anlamca yakınlık, karşıtlık ve farklı vurgu

İki cümlenin birbirine yakın anlam taşıması, bütün sözcüklerinin yer değiştirebilmesi demek değildir. «Başarı, düzenli çalışmanın yanında yöntem seçimine de bağlıdır.» ve «Yalnız çalışmanın süresi değil, kullanılan yöntem de başarıyı etkiler.» sözleri, başarıda çalışma ve yöntemin birlikte rol oynadığı görüşünde yakınlaşır. Buna karşılık «Başarı yalnız yöntemle sağlanır.» ifadesi diğer etkenleri dışlayarak anlamı değiştirir.

«Az kitap okudu.» ile «Kitapların azını okudu.» cümleleri farklı şeyler söyler. Birincisi okuma miktarını, ikincisi belirtilmiş bir kitap grubunun yalnız bir bölümünü tamamlamayı işaret edebilir. «Raporu yalnız müdür okudu.» ile «Müdür yalnız raporu okudu.» cümlelerinde «yalnız» sözcüğünün kapsadığı öge değiştiği için hangi kişi veya nesnenin sınırlandığı farklıdır. Cümlelerin konusu benzer görünse bile vurgunun yeri ve kapsamı aynı değilse anlam eşdeğerliği kurulamaz.

Anlamca karşıt cümleler, aynı ölçüte ilişkin zıt görüş taşıyabilir: «Ayrıntılı planlama zamanı verimli kullanmayı sağlar.» ve «Ayrıntılı planlama zamanı gereksiz yere harcar.» sözleri planlamanın zaman üzerindeki etkisini zıt değerlendirir. Ancak «Planlama yararlıdır.» ile «Planlama her durumda yararlı değildir.» mutlak karşıt kutuplar değildir: İkinci ifade planlamanın bazı durumlarda yararlı olabileceğini dışlamaz. Eşdeğerlik ve karşıtlık değerlendirmesinde mutlaklık derecesi korunur.

18. Bağlaçlar ve sınırlayıcı sözcüklerle değişen kesin anlam

Bağlaçlar iki yargının ilişkisini düzenler. «Ekip hazırdı, ancak toplantı ertelendi.» cümlesinde iki durum birlikte gerçekleşmiş olarak sunulur; «ancak» beklenmeyen karşıtlığı öne çıkarır. «Ekip hazır olduğu için toplantı yapıldı.» cümlesinde neden-sonuç bağı kurulur. «Ekip hazır olursa toplantı yapılabilir.» ise şart ve olasılık içerir. Aynı kişiler ve aynı olaylar geçse de kurulan ilişki farklıdır.

«Hem A hem B katıldı.» sözü ikisinin de katıldığını; «A veya B katılacak.» gündelik dilde bağlama göre seçenek, bazen dışlayıcı seçim, bazen en az birinin katılması anlamında kullanılabilir. «Ya A ya B katılacak, ikisi birlikte değil.» ifadesi dışlayıcılığı açıklaştırır. Belirsiz bir «veya» kullanımından tek başına diğerinin kesin katılmadığı sonucu çıkarılamaz.

«Sadece», «dahi», «bile», «oysa», «üstelik», «en az», «en fazla», «buna rağmen» sözcükleri çoğu zaman varsayımı veya karşılaştırma eksenini etkiler. «Yeni üyeler bile katıldı.» cümlesi bu katılımı beklenmedik veya dikkat çekici sunar, fakat diğer bütün üyelerin katıldığını tek başına garanti etmez. «Sadece yeni üyeler katıldı.» sözü ise katılanların bu grupla sınırlandırıldığını açıkça ileri sürer. Okuma sırasında küçük bağlantı unsurlarının çıkarılması, cümlenin desteklediği yargıyı değiştirebilir.

Bir sözcük değiştiğinde cümlenin kanıt gücü

İfade	Cümle neyi bildiriyor?	Yanlış güçlendirme örneği
Çalışma tamamlandı.	Tamamlanma gerçekleşti.	Çalışma hatasızdır.
Çalışma tamamlanmış olabilir.	Tamamlanma olasılığı var.	Çalışma kesin tamamlandı.
Çalışma tamamlanmalı.	Tamamlanma gerekliliği bildiriliyor.	Çalışma tamamlandı.
Çalışmanın tamamlandığı açıklandı.	Tamamlanmaya ilişkin bir açıklama yapıldı.	Açıklamanın doğruluğu bağımsız kanıtlandı.
Yalnız A birimi tamamladı.	Tamamlayan birim A ile sınırlandırıldı.	A biriminin her çalışanı tamamladı.

19. Belirsiz ve çok anlamlı cümlelerde aşırı yorumdan kaçınma

Bazı cümlelerde sözcükler tek tek anlaşılır olsa da bütünün iki farklı yorumu mümkün olabilir. «Yönetici yardımcısını aradı.» cümlesi bağlama ve vurgulamaya göre yöneticinin kendi yardımcısını araması veya bir kişinin yöneticinin yardımcısını araması biçiminde okunabilir. Bu durumda öznenin kim olduğunu ek bilgi olmadan kesinleştirmek güvenilir değildir. Daha açık bir ifade «Yönetici, kendi yardımcısını aradı.» veya «Müdür yardımcısı yöneticiyi aradı.» gibi kurulur.

«Eski müdürün yardımcısı geldi.» cümlesinde «eski» nitelemesinin müdüre mi yoksa yardımcılık görevine mi ilişkin olduğu bağlama bağlıdır. Dilin böyle yapısal belirsizlikleri, belirsizliği kabul etmenin bazen tek doğru yorum olduğunu gösterir. «Ali, Veli'ye dosyasını verdi.» cümlesindeki «dosyası»nın sahibinin kim olduğu da açıklaştırılmadıkça tam güvenle belirlenemeyebilir.

Kesin çıkarım, bu tür belirsizliklerde bütün makul okumaların ortaklaştığı bilgiyle sınırlanır. «Ali, Veli'ye dosyasını verdi.» sözü bir dosyanın Ali tarafından Veli'ye verildiğini ortaya koyar; dosyanın Ali'ye mi Veli'ye mi ait olduğu açık değildir. Metnin verdiğinden daha dar bir anlamı seçmek, bilgi üretmek değil tahminde bulunmaktır.

20. Kısa bir bilgilendirme metninde kesin çıkarımın bütünleşik denetimi

Şu özgün bilgilendirme metni, birden çok sınırın aynı anda korunmasını gösterir: «Bir kent kütüphanesinde bu yıl planlanan üç okuma salonundan ikisi hizmete açıldı. Üçüncü salonun donanımı tamamlanmadığı için açılış tarihi henüz açıklanmadı. Daha önce hizmet veren çocuk bölümünün çalışma saatleri uzatıldı. Kütüphane yönetimi, yeni salonların ziyaretçi sayısını artırabileceğini düşünüyor.»

İlk cümle, söz konusu üç salonluk plan içinde iki salonun açıldığını belirtir. Buradan kentteki bütün kütüphanelerin veya kütüphanenin bütün salonlarının sayısı çıkarılamaz. İkinci cümle üçüncü salonun donanımının tamamlanmadığını ve açılış tarihinin henüz duyurulmadığını bildirir. Donanım eksikliği, tarih açıklanmamasının metinde verilen gerekçesidir. Ancak açılışın hangi gün yapılacağı, donanımın tam olarak ne zaman biteceği ya da projenin iptal edildiği söylenmemektedir.

Üçüncü cümle, çocuk bölümünün önceden de hizmet verdiğini ve saatlerinin uzatıldığını kesinleştirir; kaç saat uzatıldığını ve bu artışın hangi günlerde geçerli olduğunu belirlemez. Son cümlede yönetimin görüşü aktarılır; yeni salonların ziyaretçileri kesin artırdığı bildirilmez. «Artırabileceğini düşünüyor» sözünü «artırdı» biçimine dönüştürmek hem olasılığı hem de görüş sahibini siler. Ayrıca ziyaretçi artışının hangi döneme veya büyüklüğe ilişkin olduğu da verilmemiştir.

Bütünleşik metinde kanıt ve yorum sınırı

Metindeki veri	Desteklenen kesin yargı	Desteklenmeyen genişletme
Üç planlanan salondan ikisi açıldı.	Planlanan salonlardan en az iki tanesi hizmete girdi.	Kütüphanede yalnız iki salon vardır.
Üçüncü salonun donanımı tamamlanmadı.	Bu salonun belirtilen donanım işi bitmedi.	Projeden vazgeçildi.
Açılış tarihi henüz açıklanmadı.	İlgili ana kadar bir tarih duyurusu yok.	Salon gelecek ay açılacak.
Çocuk bölümünün saatleri uzatıldı.	Önceki duruma göre çalışma süresi arttı.	Bütün kütüphane gece boyunca açık.
Yönetim ziyaretçi artışı olabileceğini düşünüyor.	Artış ihtimali hakkındaki yönetim görüşü var.	Ziyaretçi sayısı kesin arttı.

Metnin güvenilir yorumu, cümlenin açık bilgisini, olası çıkarımını ve desteklenmeyen genişletmesini farklı düzeylerde tutmaktır. Bu ayrım tek bir ifade içinde de gerekir: kütüphanenin bazı salonlarının açılması gerçekleşmiş bir olay, yöneticilerin ziyaretçi artışını düşünmesi bir beklentidir. İkisi aynı kesinlikte yorumlanamaz.

21. Cümlede anlam çözümlemesinde izlenebilecek gerekçeli okuma yolu

Önce cümlenin temel yargısı belirlenir: Kim, hangi konuda, neyi söyledi veya yaptı? Ardından yargının sınırlarını gösteren zaman, yer, kişi, sayı ve kapsam sözcükleri saptanır. Üçüncü aşamada olumlu/olumsuz anlatım, koşul, neden, amaç, karşılaştırma, görüş aktarımı ve olasılık gibi ilişkiler ayırt edilir. Son olarak kurulacak sonucun bu sınırları aynen koruyup korumadığı denetlenir. Bu sıra katı bir teknik formül değil, okuma sırasında kanıt kaybını önleyen düşünme düzenidir.

Örneğin «Bu dönem çevrim içi başvuru yapabilen çalışanların bir kısmı, başvurusunu tamamladı.» cümlesinde özne bütün çalışanlar değil, çevrim içi başvuru yapabilen çalışanların bir alt grubudur. «Bir kısmı» sözü tamamlayanların varlığını bildirir; tamamlayamayanların nedenini, tüm personelin internet erişimini veya dönem sonunda toplam başvuru sayısını belirlemez. «Yapabilen» ifadesi bir kapasite veya olanak, «tamamladı» ise gerçekleşmiş eylemdir. İkisini eşitlemeden okumak cümlenin gerçek iletisini korur.

Kesin çıkarıma giderken üç tür hata özellikle belirginleşir: yargıyı kapsamından geniş bir gruba yaymak, olasılığı gerçekleşmiş sonuca dönüştürmek ve zaman sırasından kendiliğinden nedensellik üretmek. Bunlara bir de kaynağı silme hatası eklenir; «yönetim düşünüyor» veya «rapora göre» türü aktarımları doğrudan kanıtlanmış dış gerçek diye sunmak, metinde bulunmayan kesinlik yaratır. Cümlede anlamın güvenilir çözümü, çok sayıda yorum üretmekte değil, söyleneni eksiksiz fakat söylenmeyeni eklemeden kavramaktadır.

> **Kesin çıkarım denetimi** Bir sonucun kesin sayılabilmesi için cümlenin doğru kabul edilmesi hâlinde başka ihtimal bırakmayan bir kanıta dayanması gerekir. Kapsam belirteçleri, zaman ve kip, koşulun yönü, aktarılan görüşün kaynağı ve olumsuzluğun yeri korunmalıdır. «Mümkün», «muhtemel», «planlandı» ve «önerildi» sözlerinden gerçekleşme yargısı üretilmez.

KONU 6.3

PARAGRAFIN ANA DÜŞÜNCESİ VE KONUSU

Paragraf, bir konunun belirli bir yönünü anlam bütünlüğü içinde geliştiren cümleler topluluğudur. Tek cümlelik bir paragraf da uzun bir paragraf da olabilir; paragrafın niteliğini yalnız cümle sayısı değil, cümlelerin ortak düşünce çevresinde kurduğu ilişki belirler. Okur, bir paragrafı anlamaya çalışırken iki ayrı sonuca ulaşır: Yazarın ne hakkında konuştuğunu ve bu konu hakkında asıl ne söylemek istediğini belirler. İlki paragrafın konusu, ikincisi ana düşüncesidir. Bu ayrım, metnin anlamını rastgele özetlemeye değil, yazılan cümlelerin ortak yönünü ve yazarın ulaştığı yargıyı denetlemeye dayanır.

1. Paragrafın düşünce birliği ve anlam sınırları

Bir paragraftaki her cümlenin aynı sözcüğü tekrar etmesi gerekmez. Cümleler bir durumu tanıtabilir, o durumun sonuçlarını gösterebilir, karşılaşılan güçlüğü örneklendirebilir ve bir değerlendirmeye ulaşabilir. Bu farklı görevleri bir arada tutan şey, düşüncelerin aynı odağa yönelmesidir. Örneğin bir metinde kırsal bölgelerdeki kütüphane hizmetlerinin erişilebilirliği üzerinde durulurken ilk cümle uzaklığı, ikinci cümle ulaşım olanaklarını, üçüncü cümle gezici hizmetleri, son cümle ise erişimi artırma gereğini ele alabilir. Sözcükler farklı olsa da hepsi kütüphane hizmetine erişim sorununu aydınlatır.

Paragrafın düşünce sınırını belirlemek, her bilgiyi aynı derecede önemli saymamayı gerektirir. Bir örnek, açıklanmak istenen görüşü görünür hâle getirir; fakat örnekte adı geçen yer veya kişi doğrudan paragrafın konusu olmak zorunda değildir. Benzer biçimde bir karşı görüşün anılması, yazarın o görüşü savunduğu anlamına gelmez. Metni anlamak için cümlelerin yalnız ne söylediğini değil, bütün içindeki görevini de görmek gerekir.

2. Konu: Paragrafın ele aldığı temel alan

Paragrafın konusu, yazının neyi ele aldığını bildiren çekirdek içeriktir. Genellikle bir sözcük grubu veya kısa bir ifade ile belirtilebilir. «Şehir içi ulaşım», «eski yapıların korunması» veya «uzaktan çalışmada iletişimin önemi» birer konu ifadesidir. Konu, yazarın bu alanla ilgili olumlu ya da olumsuz hükmünü tek başına taşımaz. «Şehir içi ulaşımın toplu taşıma yatırımlarıyla iyileştirilebileceği» ise konu olmaktan çok bir yargı, dolayısıyla uygun bağlamda ana düşünce adayıdır.

Konu bulunurken «Bu paragrafta ne hakkında söz ediliyor?» sorusu yol gösterir. Ancak yanıt aşırı genel olmamalıdır. Yalnız «teknoloji» demek, metin şehirlerin tarihî yapılarını korumak için kullanılan dijital belgeleme yöntemlerine odaklanıyorsa konunun sınırlarını karşılamaz. Daha uygun konu «tarihî yapıların korunmasında dijital belgelemenin rolü» olur. Öte yandan konu, metindeki tek bir yönteme daraltılarak da yanlış kurulabilir; dijital fotoğraflama sadece örneklerden biriyse paragrafı yalnız fotoğraflama üzerine kurulmuş saymak doğru değildir.

Konu ifadesinin kapsamını ayarlamak

Paragrafın odaklandığı içerik	Aşırı geniş konu	Metne uygun konu	Aşırı dar konu
Mahalle parklarının yaz aylarında gölgelik alan sağlama işlevi	Çevre	Mahalle parklarının yazın serinleme olanağına katkısı	Parktaki tek bir ağacın gölgesi
Dijital arşivlerin eski belgelere erişimi kolaylaştırması	Teknoloji	Dijital arşivlerin tarihî belgelere erişimdeki rolü	Tek bir tarayıcı cihaz
İş yerinde kısa ve açık toplantı gündeminin zaman kullanımını iyileştirmesi	İş hayatı	Toplantı gündeminin verimli zaman kullanımına etkisi	Toplantının başlangıç saati

3. Ana düşünce: Konu hakkında iletilen temel yargı

Ana düşünce, yazarın ele aldığı konu üzerinden okura ulaştırmak istediği temel görüş, değerlendirme veya sonuçtur. Çoğu açıklayıcı ve tartışmacı paragrafta tam bir cümleyle ifade edilir; çünkü yalnız bir başlık ya da kavram değil, bir hüküm bildirir. «Kütüphaneler» konu olmak için bile fazlasıyla geniş kalabilirken «Kütüphane hizmetlerini farklı ulaşım koşullarına göre çeşitlendirmek bilgiye erişimi artırır.» biçimindeki cümle savunulan düşünceyi gösterir.

Ana düşünceyi doğru yazmak, metnin yalnız bir ayrıntısını yeniden söylemek değildir. Doğru bir ana düşünce, paragraftaki başlıca cümlelerin niçin bir araya getirildiğini açıklayabilmelidir. Yazar birkaç örnekten sonra ortak bir ilkeye ulaşıyorsa bu ilke ana düşünceyi taşıyabilir. Örneklerin hepsini art arda sıralamak ana düşünceyi bulmakla aynı şey değildir; örneklerin hangi görüş için seçildiği anlaşılmalıdır.

4. Konu, ana düşünce ve başlığın birbirinden ayrılması

Konu ile ana düşünce arasındaki en belirgin fark, birinin ele alınan alanı, diğerinin o alanla ilgili yargıyı belirtmesidir. Başlık ise konuyu tanıtmak ve mümkünse metnin temel yönelimini sezdirmek için seçilir. Başlık tek sözcük, söz öbeği ya da cümle olabilir. Bu yüzden bir başlık, ana düşüncenin birebir aynısı olmak zorunda değildir; önemli olan metnin merkezini yanlış temsil etmemesidir.

Özgün örnek paragraf: «Küçük işletmelerde işlem kayıtları kimi zaman farklı defterlere dağılıyor. Aynı bilginin birkaç yerde tutulması, güncel kayda ulaşmayı güçleştiriyor ve hatalı karşılaştırmalara yol açabiliyor. Kayıtların ortak bir düzende toplanması, çalışanların aynı bilgiye erişmesini sağladığı için iş akışını daha izlenebilir kılıyor.» Burada konu, küçük işletmelerde kayıtların düzenlenmesidir. Ana düşünce, kayıtların ortak düzende tutulmasının iş akışını daha izlenebilir hâle getirmesidir. «Kayıt Düzeninin İş Akışına Katkısı» başlığı ise hem alanı hem de baskın düşünce yönünü sezdirir.

Aynı paragraf için üç ayrı anlam düzeyi

Düzey	Yanıt verdiği temel soru	Özgün kayıt düzeni paragrafındaki karşılık
Konu	Ne hakkında?	Küçük işletmelerde işlem kayıtlarının düzenlenmesi
Ana düşünce	Bu konuda asıl ne söyleniyor?	Kayıtların ortak düzende tutulması iş akışının izlenebilirliğini artırır
Başlık	Metin hangi kısa adla doğru temsil edilir?	Kayıt Düzeninin İş Akışına Katkısı

5. Aynı konu üzerine farklı ana düşünceler kurulabilir

Bir konu tek bir yargıya mahkûm değildir. «Kentlerde bisikletli ulaşım» konusu üzerine yazılan bir paragraf, güvenli güzergâhların önemini savunabilir; başka bir paragraf bisiklet kullanımının ancak toplu taşımayla birlikte düşünüldüğünde yaygınlaşabileceğini ileri sürebilir. İki paragrafın konusu ortak olabilir, fakat ana düşünceleri farklıdır. Bu farkı görebilmek için metindeki tutum ve sonuç ifadelerinin izlenmesi gerekir.

Birinci özgün paragraf: «Bisiklet kullanmayı isteyen pek çok kişi için asıl güçlük yolculuğun uzunluğu değil, güvenli bir güzergâh bulunmamasıdır. Kesintisiz bisiklet yollarının yer aldığı bölgelerde yolculuk planlamak kolaylaşır. Bu nedenle bisiklet ulaşımını artırmak isteyen kentler önce güvenli bağlantıları geliştirmelidir.» Ana düşünce, bisikletli ulaşımın yaygınlaşması için güvenli güzergâhların öncelikli olduğudur.

İkinci özgün paragraf: «Bisiklet her yolculuk için tek başına uygun olmayabilir. Uzun mesafelerde bisikletin raylı sistemlere ve diğer toplu taşıma araçlarına kolayca bağlanması, ulaşım seçeneklerini çoğaltır. Bu nedenle bisiklet politikası, kentteki diğer ulaşım türlerinden bağımsız tasarlanmamalıdır.» Ana düşünce, bisiklet

ulaşımının toplu taşımayla bütünleşik planlanması gerektiğidir. Her iki metin bisikletli ulaşımı ele alsa da birinin vurgu noktası güvenli yol, diğerinin vurgu noktası ulaşım ağları arasındaki bütünlüktür.

6. Ana düşünce açıkça belirtilmiş olabilir

Yazar bazen ana düşüncesini doğrudan bir cümlede söyler ve diğer cümleleri bu yargıyı açıklamak için kullanır. Açık ana düşünce başlangıçta, ortada veya sonda bulunabilir. Konu cümlesi olarak kullanılan başlangıç cümlesi, özellikle açıklayıcı metinlerde okura yön verir; ancak bir paragrafın ilk cümlesinin her durumda ana düşünce olduğu söylenemez.

Örneğin «Bir yerleşim yerinin geçmişini anlamak için yalnız büyük yapıları incelemek yeterli değildir. Mahalle adları, eski yol izleri ve gündelik kullanımdaki mekânlar da yaşam biçimi hakkında bilgi taşır. Bu küçük izler bir araya getirildiğinde, geçmişin yalnız seçkin yapılarına değil, sıradan insanların deneyimlerine de ulaşılır.» paragrafında ilk cümlede savunulan «yalnız büyük yapıları incelemenin yeterli olmaması» görüşü, sonraki cümlelerle desteklenir. Aynı anlam bütününün ana düşüncesi, «Bir yerin tarihini anlamada gündelik yaşama ait küçük izler de önem taşır.» biçiminde ifade edilebilir.

Açık yargıyı seçerken cümlenin ana görüşü kapsayıp kapsamadığına bakılmalıdır. Aynı paragraftaki «Mahalle adları bilgi taşır.» cümlesi doğru olmakla birlikte bütün metni karşılamaz; yalnız destekleyici örneklerden birini dile getirir. Ana düşünce, metindeki birden çok örneğin ortak anlamını üstlenir.

7. Ana düşünce doğrudan yazılmadan sezdirilebilir

Bazı paragraflarda hiçbir cümle temel görüşü tek başına tam olarak ifade etmez. Yazar gözlemler, benzetmeler veya sonuçları sıralar; okuyucu ortak düşünceyi bunları birlikte yorumlayarak kurar. Örtük ana düşünceyi bulmak, metne dışarıdan görüş eklemek değildir. Kurulan yargının her önemli unsurunun paragrafta karşılığı bulunmalıdır.

Özgün paragraf: «Bir kasabanın meydanında her sabah kurulan küçük tezgâhlar gün boyunca farklı insanları bir araya getirir. Yaşlılar alışverişten sonra orada konuşur, çocuklar aileleriyle esnafı tanır, yeni taşınanlar çevreyi bu karşılaşmalar sayesinde öğrenir. Günün sonunda tezgâhlar kaldırılır; ama meydanın insanlar arasında kurduğu bağ devam eder.» Bu metinde tek bir öğüt cümlesi yoktur. Cümlelerin ortak anlamı, yerel pazarların yalnız alışveriş değil, toplumsal ilişki kurma işlevi de gördüğüdür.

Bu yorumun dayanağı, birbirini destekleyen çeşitli ilişki örnekleridir. «Her pazar ekonomik refahı artırır.» biçiminde bir ana düşünce ise metindeki ilişkilerden zorunlu olarak çıkmaz; paragrafın odağını ekonomi alanına kaydırır. Örtük düşünceyi belirlerken çıkarımın dayanağı kadar sınırı da korunmalıdır.

8. İlk cümle ve son cümle yardımcı ipucudur, değişmez kural değildir

Paragrafın ilk cümlesi çoğu zaman konuyu açar; son cümlesi açıklanan düşünceyi bir sonuca bağlayabilir. Bununla birlikte yazar başlangıçta bir gözlem aktarıp sonra karşı görüşe geçebilir veya sonda yeni bir örnek vererek bitirebilir. Bu nedenle ana düşünceyi sırf cümlelerin yerine göre bulmak güvenilir yöntem değildir.

«Günün ilk saatlerinde kent merkezleri daha sakin görünür. Bu sessizlik kısa süre sonra yerini yoğun bir araç hareketine bırakır. Oysa günlük ulaşımı yalnız araçların sayısını artırarak düzenlemek uzun vadede etkili değildir. Kent içi hareketliliği yönetmek için farklı ulaşım seçeneklerinin birlikte planlanması gerekir.» paragrafında girişteki sakin kent betimi konuya giriş görevi görür. Temel yargı son cümlede açıkça bulunur; fakat ana düşünceyi son cümle yapan şey onun konumu değil, önceki cümlelerin ortaya koyduğu sorunla ilişkili çözüm yargısını taşımasıdır.

Buna karşılık «Kütüphane hizmetleri mahallelere ulaştıkça okuma alanları çeşitleniyor. Mobil kütüphaneler küçük yerleşimlerde geçici kullanım olanağı sağlıyor. Mahallelerde kurulan paylaşım rafları da bu gelişmeyi

destekliyor.» paragrafında son cümle bir ek örnektir. Burada ana düşünce, kütüphane hizmetinin mahallelere yayılmasıyla okuma olanaklarının çeşitlendiğidir; son cümlenin aynen alınması paragrafı daraltır.

9. Tekrar edilen sözcük ile asıl vurgu aynı şey değildir

Bir paragrafta en sık görülen sözcük, çoğunlukla konu alanını gösterebilir; ana düşünceyi otomatik olarak belirlemez. Sözcük tekrarları yazarın hangi kavramlar üzerinde durduğuna ilişkin ipucu sağlar, fakat aynı sözcüğe farklı tutumlarla yaklaşılabilir. Örneğin «müze» sözcüğünün birçok kez geçmesi, yazarın müzelerin yalnız sergileme mekânı olduğunu mu yoksa aktif öğrenme ortamına dönüşmesi gerektiğini mi savunduğunu göstermez. Bunun için sözcüklerin bağlandığı yargılar incelenir.

«Müzeler koleksiyonlarını koruyarak geçmişi görünür kılar. Ancak ziyaretçilerin yalnız eser etiketleriyle sınırlı kaldığı bir gezi, merakı derinleştirmeyebilir. Rehberli tartışma, erişilebilir anlatım ve etkileşimli uygulamalar, müzeleri daha etkin öğrenme ortamlarına dönüştürür.» paragrafında «müze» sözcüğü odaktır; fakat ana düşünce müzelerin öğrenme işlevinin ziyaretçiyle kurulan etkin ilişki sayesinde güçlenmesidir. Yalnız «Müzeler önemlidir.» demek hem gerekçeyi hem vurgu yönünü kaybettirir.

10. Gerekçeler, örnekler ve sayısal bilgiler ana düşünceyi nasıl destekler?

Yazar bir görüşü nedenleriyle açıklayabilir, karşılaştırma yapabilir veya tekil olaylardan örnek verebilir. Bu ayrıntılar paragrafın inandırıcılığını ve açıklığını artırırken ana düşüncenin kendisi olmak zorunda değildir. Bir verinin önemini belirleyen, büyüklüğü ya da dikkat çekiciliği değil, yazarın kurduğu ana savla ilişkisidir.

Özgün paragraf: «Kentte farklı mahallelerden gelen okuyucular için tek bir merkez kütüphane yeterli erişimi sağlayamayabilir. Örneğin merkezden uzak üç mahallede kurulan küçük okuma noktaları, günlük ulaşım gereksinimini azaltmıştır. Ödünç alma ve iade hizmetlerinin mahallelere dağıtılması da hizmetten yararlanmayı kolaylaştırmıştır. Bu durum, kütüphane hizmetinin yalnız merkezde toplanmasının erişimi sınırlayabildiğini gösterir.» Buradaki «üç mahalle» ayrıntısı görüşü somutlaştırır. Ana düşünce, kütüphane hizmetinin mahallelere yayılmasının erişimi kolaylaştıracağıdır; sayı, bu ana görüşün yerini alamaz.

Paragraftaki cümlelerin ana düşünceyle ilişkisi

Cümle işlevi	Okura sağladığı bilgi	Ana düşünceyle bağı
Durumu tanıtma	Merkezde toplanmış hizmete erişimde güçlük olabilir	Sorun alanını belirler
Örnek verme	Uzak üç mahallede küçük okuma noktaları kurulmuştur	Soyut sorunu somutlaştırır
Açıklama	Mahalle düzeyindeki ödünç alma ve iade işlemleri kullanımı kolaylaştırır	İşleyişi açıklar
Sonuç çıkarma	Hizmetin yalnız merkezde bulunması erişimi sınırlayabilir	Temel yargıyı belirginleştirir

Buradaki yerleşim ve mahalle sayısı öğretici, temsili bir metne aittir; gerçek bir yerleşim yeri hakkında resmî istatistik olarak sunulmaz.

11. Karşıtlık, ödün verme ve yön değiştiren bağlaçlar

Paragraflarda «ancak», «oysa», «buna karşılık», «ne var ki», «yine de» ve «bununla birlikte» gibi ifadeler, önceki sözün sınırlandırıldığını veya karşı bir değerlendirme getirildiğini gösterebilir. Yazarın benimsediği asıl görüş çoğu zaman bu yön değişiminden sonra belirginleşir; fakat hangi tarafın savunulduğuna karar vermek için bütün paragraf okunmalıdır. Tek bir bağlacın bulunması her zaman sonraki cümlenin ana düşünce olduğu anlamına gelmez.

«Dijital araçlar toplantı kayıtlarının paylaşılmasını hızlandırır. Ne var ki dosyaları herkesin erişebileceği ortak bir düzene oturtmadan yalnızca yeni araçlar edinmek, bilgi karmaşasını gidermeyebilir. Bu nedenle verimli paylaşım, teknolojik altyapıyla birlikte anlaşılır kayıt kuralları gerektirir.» paragrafında ilk cümlede teknolojinin yararı kabul edilir; fakat temel düşünce araçların tek başına yeterli olmadığıdır. «Toplantı kayıtları hızla paylaşılabilir.» ifadesi metindeki bir ayrıntıyı, «Bilgi paylaşımında teknoloji ve kayıt düzeni birlikte gereklidir.» ifadesi ana düşünceyi yansıtır.

Bağlaçların ana düşünceyi izlemeye katkısı

İfade türü	Tipik işlev	Yorum sınırı
Ancak / ne var ki / oysa	Önceki yargıyı sınırlar veya karşı görüş getirir	Yalnız bağlaca bakılarak yazarın tutumu belirlenmez
Bu nedenle / dolayısıyla	Önceki gerekçeden sonuç çıkarır	Sonuç metnin tamamını kapsamayabilir
Örneğin / söz gelimi	İddianın somut karşılığını sunar	Tek örnek ana düşünceyle eşitlenmez
Bunun yanında / ayrıca	Yeni yön veya ek destek sunar	Ek ayrıntı genel yargının yerini almayabilir
Her ne kadar / yine de	Ödün verme ile karşıt değerlendirme kurar	Kabul edilen görüş yazarın asıl savı olmayabilir

12. Sebep, sonuç ve öneri örgüsünün ana düşünceyi taşıması

Bazı paragraflar önce bir sorunu ortaya koyar, ardından sonuçlarını açıklar ve son olarak çözüm önerir. Böyle bir metnin konusu sorunun adıyla ifade edilebilir; ana düşüncesi ise önerinin hangi gerekçeyle gerekli olduğunu açıklayan daha geniş bir yargıdır. Ancak her problem anlatısının ana düşüncesi mutlaka çözüm önerisi değildir. Yazar yalnız sorunun görünmeyen sonuçlarını göstermek istiyorsa ana vurgu farkındalık yaratmak olabilir.

«Kamuya açık duyurularda uzun ve iç içe cümleler kullanılınca temel tarih ve koşullar gözden kaçabiliyor. Bu durum, aynı konuda tekrar tekrar açıklama istenmesine yol açabiliyor. Duyuruların kısa başlıklarla düzenlenmesi ve önemli koşulların açık biçimde belirtilmesi ise bilgiye erişimi kolaylaştırıyor.» paragrafının konusu duyurularda bilginin anlaşılır sunulmasıdır. Ana düşüncesi, duyuruların açık ve düzenli hazırlanmasının yanlış anlamayı azaltıp bilgiye erişimi kolaylaştırdığıdır. Metin yalnız «uzun cümleler» hakkında değil, açıklığın sağlanması gereği hakkındadır.

Sorun–gerekçe–çözüm ilişkisini yorumlamak

Metindeki öge	İşlev	Ana düşünceye katkısı
Uzun ve iç içe duyuru cümleleri	Sorunu tanımlar	Açıklığa neden ihtiyaç olduğunu gösterir
Tarih ve koşulların gözden kaçması	Sonucu belirtir	Sorunun önemini somutlaştırır
Başlıklandırma ve açık koşul belirtme	Çözüm yolunu gösterir	Yazarın savunduğu düzenleme biçimini açıklar

13. Ana düşünceyi uygun kapsamla kurma: Ne eksik ne fazla

Bir ana düşünce, paragrafta yer alan bilgilerin tamamıyla uyumlu olmalıdır. Yalnız bir örneği yansıtıyorsa dar; metindeki kayıtları aşan «her zaman», «bütün», «kesinlikle» gibi eklemeler içeriyorsa geniş veya yanlış olur. Uygun ana düşünce, paragrafın ortak yönünü korurken desteklenmeyen bir kesinlik üretmez. Özellikle ihtimal anlatan «olabilir», «sağlayabilir» türündeki ifadeler, ana düşünce kurulurken zorunluluk yargısına dönüştürülmemelidir.

Örnek paragraf: «Esnek çalışma saatlerinin uygulandığı bazı birimlerde çalışanlar işe gidiş geliş yoğunluğunu daha rahat yönetebildiğini bildiriyor. Bununla birlikte ortak görüşme saatleri belirlenmediğinde ekip içi iletişim zorlaşabiliyor. Bu nedenle esnek saatler planlanırken kişisel gereksinimlerle birlikte ortak çalışma zamanları da düşünülmelidir.» Uygun ana düşünce, esnek çalışma planlarının hem bireysel kolaylıkları hem ortak iletişimi gözetmesi gerektiğidir. «Esnek çalışma bütün kurumlarda verimi kesin olarak artırır.» yargısı ise metnin söylemediği genellemeyi ve sonucu ekler.

Aynı paragraf için düşünce kapsamı denetimi

Yargı	Değerlendirme	Gerekçe
Esnek saatler yol yoğunluğunu yönetmeyi kolaylaştırabilir.	Destekleyici ayrıntı	Bireysel kolaylık anlatılmıştır fakat iletişim boyutu eksiktir
Esnek saatler kişisel gereksinim ve ortak çalışma zamanları birlikte gözetilerek düzenlenmelidir.	Ana düşünceye uygun	Hem yarar hem iletişim koşulu bir aradadır
Esnek çalışma bütün kurumlarda iletişimi artırır.	Aşırı genelleme	Metin bazı birimlerden söz eder ve iletişim güçlüğünü de belirtir
Esnek çalışma hiçbir zaman uygulanmamalıdır.	Metne aykırı yargı	Metin uygulamayı reddetmek yerine dengeli planlamayı savunur

14. Açıklayıcı, tartışmacı ve betimleyici metinlerde ana düşünce

Her paragraf açık bir öneri veya tartışma içermek zorunda değildir. Açıklayıcı metinlerde ana düşünce bir işleyişi ya da temel ilişkiyi ortaya koyabilir; tartışmacı metinlerde yazarın savunduğu görüş daha belirgindir. Betimleyici metinlerde ise ana düşünce yerine baskın izlenim veya verilmek istenen temel duygu ön plana çıkabilir. Bir anlatı paragrafında olayların birlikte ortaya koyduğu anlam, doğrudan bir öğüt cümlesi bulunmasa da metnin genel iletisi olarak okunabilir. Metin türüne dikkat etmek, açıklayıcı bir paragrafta olmayan öğüdü aramayı veya betimleyici bir parçaya yapay bir tez yüklemeyi önler.

Örneğin «Eski istasyon binasının duvarlarında yılların izleri duruyordu. Kapıların üstündeki solmuş numaralar, boş bekleme salonundaki ahşap sıralar ve raylara açılan sessiz pencereler, bir zamanlar buradan geçen yolcuları düşündürüyordu.» paragrafında konu eski istasyonun görünümü ve atmosferidir. Temel izlenim, kullanılmayan istasyonun geçmiş yolculukların izlerini taşıyan hüzünlü bir mekân oluşudur. Metnin «Bütün eski istasyonlar korunmalıdır.» düşüncesini savunduğu ise söylenemez; bu, okurun katabileceği ayrı bir görüş olur.

15. Ana duygu ile ana düşüncenin ayrılması

Düşünce metninde yazar çoğunlukla bir yargı iletir. Duygu ağırlıklı metinlerde ise okurda uyandırılmak istenen özlem, sevinç, kaygı, şaşkınlık veya yalnızlık gibi baskın duygu öne çıkabilir. Özellikle şiirsel ya da yoğun betimleyici bir paragrafı tek bir öğüt cümlesine indirmek, metnin özünü değiştirebilir. Konu yine belirlenebilir; fakat «ana duygu» sorusunun yanıtı bir hükümden çok hâkim duygusal yönelim olur.

«Akşam olunca eski sokağın lambaları yanıyor, çocukken bildiğim kapılar birer birer karanlıkta kayboluyordu. Artık başka kentlerde yaşayan komşularımızın seslerini duymuyordum. Yine de kaldırım taşlarının arasındaki küçük otlar bana o günleri hatırlatıyordu.» parçasının konusu eski mahalleyi hatırlamaktır. Baskın duygu özlemdir. Buradan «İnsanlar geçmişi daima bugünden üstün tutmalıdır.» biçiminde bir ana düşünce üretmek metnin izin vermediği bir tavsiyeye dönüşür.

16. Başlık seçiminin konu ve ana düşünceyle ilişkisi

İyi bir başlık, paragrafın merkezindeki konuyu doğru gösterir ve uygun olduğunda ana düşüncenin yönünü sezdirir. Aşırı genel başlık, benzer içerikli çok farklı metinlere uyabileceği için ayırt edici değildir. Gereğinden dar başlık ise yalnız tek bir örneğe ya da ayrıntıya tutunur. Başlık seçiminde dikkat çekicilik önem taşısa da metinde bulunmayan iddiaları çağrıştırmaması önceliklidir.

Örneğin şehirlerde yağmur suyunun toplanması, depolanması ve yeşil alanların sulanmasında kullanılması anlatılıyorsa «Su» fazla genel, «Bir Depodaki Vananın Yapısı» aşırı dar olabilir. «Kentlerde Yağmur Suyunu Değerlendirmek» konuya uygundur. Paragrafın temel yargısı yağmur suyunun uygun altyapıyla yeniden kullanılmasının şebeke suyu gereksinimini azaltabilmesi ise «Yağmur Suyunun Yeniden Kullanımı» başlığı da bu yönelimi karşılar. Metin uygulamanın bütün kentlerde sorunsuz sonuç verdiğini söylemiyorsa «Kesin Çözüm: Yağmur Suyu» başlığı uygun değildir.

Başlıkların metni temsil etme düzeyi

Başlık	Metinle ilişkisi	Değerlendirme
Su	Konu alanını çok geniş bırakır	Ayırt edicilik zayıf
Yağmur Suyunun Kentlerde Yeniden Kullanımı	Ana konu alanını belirler	Uygun
Tek Bir Depodaki Musluğun Bakımı	Örnek ayrıntıya indirger	Aşırı dar
Yağmur Suyu Bütün Su Sorunlarını Bitirir	Metnin söylemediği kesin sonucu ekler	Uygun değil

17. Soruluş biçimi değişse de aranan temel anlam aynı kalır

«Paragrafta hangi konu ele alınmaktadır?», «Parçada üzerinde durulan nedir?» ve «Bu yazı ne hakkındadır?» biçimindeki sorular konuya yönelir. Buna karşılık «Asıl anlatılmak istenen nedir?», «Parçanın temel yargısı hangisidir?» ve «Yazarın vurgulamak istediği düşünce nedir?» türündeki ifadeler ana düşünceyi arar. Bu ayrım sorunun dilini anlamaya ilişkindir; ders kitabında çoktan seçmeli soru oluşturmayı gerektirmez.

Bir paragrafın başlığını aramak ise konu ile temel yönelim arasında daha kısa ve temsil gücü yüksek bir ifade seçmeyi gerektirir. Yazarın tutumunu saptamak, ana düşünceyi destekleyebilir fakat tutumun tek başına bütün içeriği kapsadığı varsayılamaz. Örneğin yazar yeniliğe olumlu yaklaşırken aynı zamanda denetimin önemini vurguluyorsa ana düşünce yalnız «Yazar yeniliği desteklemektedir.» biçiminde kalmamalıdır.

Okuma hedeflerine göre soru ifadesinin anlamı

Aranan unsur	Tipik soru ifadesi	Beklenen yanıt niteliği
Konu	Bu paragraf ne hakkındadır?	Ele alınan alanı belirten kısa ifade
Ana düşünce	Paragrafta asıl vurgulanan nedir?	Temel yargıyı bildiren kapsayıcı cümle
Ana duygu	Parçada baskın duygu nedir?	Duygusal yönelimi belirten ifade
Başlık	Parçayı en iyi karşılayan başlık nedir?	Konu ve temel yönelime uygun kısa ad

18. Tek bir ayrıntının çekiciliğine kapılma ve dış bilgi ekleme hatası

Paragrafta verilen bir rakam, kişi adı veya dikkat çekici olay, kolay hatırlandığı için metnin merkezindeymiş gibi görünebilir. Fakat ana düşünce seçilirken ayrıntının hafızada kalıcılığı değil, diğer cümlelerle kurduğu ilişki esas alınır. Bir paragraf bilimsel araştırmada düzenli kayıt tutmanın önemini anlatırken örnek olarak tek bir laboratuvardan söz ediyorsa araştırmanın yürütüldüğü kent, tek başına temel konuya dönüşmez.

Okurun ön bilgisi de bir başka yanılgı kaynağıdır. Örneğin çevreyi koruma hakkında yazılmış bir paragrafı okuyan kişi, kendi bildiği başka çevre sorunlarını metne taşıyabilir. Bu bilgiler gerçek ve önemli olsa bile paragrafta bulunmayan gerekçelerle ana düşünce kurulduğunda metnin iletisi değişir. Paragrafı anlamak, yazarla her konuda aynı fikirde olmayı gerektirmez; önce yazarın gerçekten ne ileri sürdüğü saptanır, değerlendirme bundan sonra yapılır.

> **Kapsam uyarısı** Ana düşünce, metindeki bir örneğin yeniden yazılması değildir; paragrafın ortak yargısını açıklamalıdır. Metinde yalnız olasılık veya koşullu yarar dile getiriliyorsa ana düşünce kesin sonuç biçiminde genişletilmez. Okurun bildiği fakat paragrafta yer almayan bilgi, metin kanıtı yerine kullanılamaz.

19. Olumsuz yargı ve karşı görüş içeren paragrafların okunması

Yazarın reddettiği düşünce ile savunduğu düşünce farklı olabilir. «Okumak yalnız bilgi biriktirmek değildir.» cümlesi bir görüşü sınırlar, fakat tek başına okumaya ilişkin olumlu ana yargının bütününü kurmayabilir. Sonraki cümleler okumanın karşılaştırma, anlamlandırma ve bakış açısı geliştirme boyutunu açıklıyorsa temel düşünce «Okuma, bilgi edinmenin yanında düşünceyi geliştiren etkin bir süreçtir.» biçiminde ifade edilebilir.

Özgün paragraf: «Eski bir yapıyı korumanın, yalnız dış cephesini yenilemek olduğu düşünülüyor. Oysa yapının geçmiş kullanımını, bulunduğu çevreyi ve taşıdığı toplumsal belleği görmezden gelen bir yenileme, yapının tarihî niteliğini eksik bırakır. Koruma çalışmaları fiziksel onarım kadar mekânın anlamını da gözetmelidir.» Metinde ilk cümlede anılan görüş yazarın savı değildir. Ana düşünce, tarihî yapı korumasının maddi onarımla birlikte kültürel ve toplumsal anlamı da kapsaması gerektiğidir.

20. Birden fazla alt düşüncenin aynı ana düşüncede birleşmesi

Bir paragrafta iki ya da daha fazla gerekçe, bir ana yargıyı birlikte destekleyebilir. Bu durumda yalnız ilk gerekçeye veya son örneğe yaslanmak yerine gerekçelerin ortak sonucuna bakılır. Fakat birbirinden bütünüyle kopuk iki ana yargı varmış gibi bir okuma da yanlış olabilir; yazarın farklı boyutları, aynı temel görüşün parçaları olabilir.

Özgün paragraf: «Kısa toplantı tutanakları alınan kararların unutulmasını önlemeye yardımcı olur. Görevlerin kimin tarafından yapılacağını açıkça gösterdiğinde sorumluluk belirsizliğini azaltır. Sonraki toplantıda hangi adımların gerçekleştiği de önceki tutanaklarla karşılaştırılabilir. Bu yüzden düzenli ve anlaşılır tutanak, yalnız geçmişi kaydetmek için değil, işin sürekliliğini sağlamak için de önemlidir.» Bu metinde unutmayı önleme,

sorumluluğu belirleme ve ilerlemeyi izleme ayrı işlevlerdir. Ana düşünce, düzenli tutanakların çalışma süreçlerinde devamlılığı ve izlenebilirliği güçlendirmesidir. Yalnız «Tutanaklar kimin sorumlu olduğunu gösterir.» demek kapsamı daraltır.

21. Bütünleşik metin incelemesi: Konudan temel yargıya

Şimdi bir paragrafın cümlelerine ayrı görevler yükleyerek konunun ve ana düşüncenin nasıl kurulduğu görülebilir. Aşağıdaki metin yalnız bu kitap için hazırlanmış özgün bir öğretici örnektir:

«Bir şehrin geçmişi yalnız büyük anıtlarda saklı değildir. Eski sokak adları, semt pazarlarının kurulduğu alanlar ve yıllardır kullanılan buluşma yerleri, gündelik yaşamın değişimini de gösterir. Ne var ki kent planları hazırlanırken bu küçük izler kolayca göz ardı edilebilir. Bir mahallenin geçmişini anlamak ve gelecek kuşaklara aktarabilmek için anıtsal yapılar kadar sıradan yaşam mekânlarının da belgelenmesi gerekir.»

Bu paragrafın konusu, kent tarihinin gündelik yaşam mekânları üzerinden belgelenmesidir. Ana düşüncesi, kent belleğinin korunabilmesi için yalnız büyük anıtların değil, gündelik yaşamın izlerini taşıyan yerlerin de kayda geçirilmesi gerektiğidir. «Kentlerde tarih vardır.» ifadesi konuyu aşırı genişletir; «Semt pazarları korunmalıdır.» yargısı ise örneklerden birini savunulan esas görüş gibi göstererek kapsamı daraltır.

Özgün kent belleği paragrafının düşünce işlevleri

Cümle	İçerik işlevi	Temel düşünceye katkısı
Geçmiş yalnız anıtlarda değildir.	Yerleşik dar bakışı sınırlar	Yalnız anıtsal yapılarla yetinilemeyeceğini belirtir
Sokak adları, pazarlar, buluşma yerleri gündelik yaşamın değişimini gösterir.	Somut örnek verir	Gündelik yaşam izlerinin tarihî değeri bulunduğunu açıklar
Bu izler planlamada göz ardı edilebilir.	Sorun ve risk gösterir	Kayda geçirmenin gerekçesini güçlendirir
Sıradan yaşam mekânları da belgelenmelidir.	Sonuç ve öneri bildirir	Paragrafın ana düşüncesini açık biçimde kurar

Bu çözümlemede son cümle ana düşünceyi açıkça taşır; ancak onu temel cümle yapan yalnız konumu değildir. Önceki üç cümle bu sonucu hazırladığı için paragrafın ortak yargısı olur. Konu, ana düşünce ve cümlelerin destek görevleri böylece tek metin üzerinden birbirinden ayrılmış olur.

22. Ana düşünceyi belirlerken bütün metne geri dönmenin önemi

Paragrafın ana düşüncesine ulaşmak, ilk bakışta dikkat çeken bir cümleyi seçip okumayı bitirmekten farklıdır. Önce metnin konusunu yeterince belirgin bir ifadeyle ortaya koymak gerekir. Ardından her cümlenin o konuya ilişkin hangi katkıyı sağladığı incelenir: tanıtma, gerekçelendirme, örneklendirme, karşıt görüş belirtme, sınırlama veya sonuçlandırma. Böylece paragrafın yalnız ne anlattığı değil, anlatılanları hangi görüş çevresinde topladığı anlaşılır.

Oluşturulan ana düşünce bir kez daha tüm paragrafla karşılaştırılmalıdır. Bir cümleyi dışarıda bırakıyor mu, bir örneği bütün paragrafın yerine koyuyor mu, metinde olmayan bir kesinlik veya neden ilişkisi ekliyor mu? Bu denetim, tek bir cevabı ezberlemeye değil, her yeni metnin kendi kanıtlarıyla değerlendirilmesine dayanır. GY-06.04'te yardımcı düşünce ve çıkarım ilişkileri, GY-06.05–GY-06.07'de ise paragrafın düzenlenişi ve metin bütünlüğü ayrıca ele alınacaktır. Bu konunun temel kazanımı, paragrafın konusu ile onun üzerine kurulan ana yargıyı ayırarak ikisini de metne sadık biçimde ifade edebilmektir.

KONU 6.4

YARDIMCI DÜŞÜNCE VE ÇIKARIM

Bir paragrafın temel yargısı, çoğu zaman tek bir cümleyle değil, birbiriyle bağlantılı açıklamalar, gözlemler, örnekler ve gerekçelerle anlaşılır. Yazarın asıl söylemek istediği düşünceyi destekleyen bu ikincil yargılar, yardımcı düşüncelerdir. Metinden çıkarım yapmak ise bazen açıkça yazılmamış bir bilgiye, metindeki birden fazla ipucunu tutarlı biçimde birleştirerek ulaşmaktır. İki beceri birbirine bağlıdır; çünkü çıkarımın sağlamlığı çoğu zaman yardımcı düşüncelerin nasıl okunduğuna dayanır. Bununla birlikte her yardımcı düşünce çıkarım değildir: Yazarın açıkça söylediği bir ayrıntı da yardımcı düşünce olabilir.

Bu bölüm, metnin temel görüşünü belirleme işlemini yeniden anlatmak yerine onun dayanaklarını okuma, verilen bilgiyle yorumun sınırını ayırma ve ulaşılabilecek yargının gücünü doğru değerlendirme üzerinde duracaktır. Özellikle “değinilmiştir”, “değinilmemiştir”, “ulaşılabilir”, “ulaşılamaz” ve “çıkarılabilir” ifadeleriyle karşılaşıldığında metnin hangi cümlesinin neyi desteklediği önemlidir. Değerlendirmenin amacı bir seçeneği sezgiyle beğenmek değil, metin ile yargı arasında gösterilebilir bir bağ kurmaktır.

1. Yardımcı düşüncenin paragraftaki görevi

Yardımcı düşünce, bir metnin ana düşüncesini açıklayan, gerekçelendiren, sınırlandıran veya somutlaştıran alt yargıdır. Bir yazar, kentte yürüyerek ulaşılabilen hizmetlerin gündelik yaşamı kolaylaştırdığını savunuyorsa yaya yollarının güvenliği, hizmet noktalarının yakınlığı ve ulaşım için harcanan sürenin azalması hakkında söyledikleri bu görüşe bağlı yardımcı düşünceler olabilir. Bu alt yargılar aynı şeyi tekrarlamak zorunda değildir; her biri temel görüşün ayrı bir boyutunu görünür kılar.

Bir yardımcı düşünce, metnin konusu içinde yer alsa da yazarın temel mesajını tek başına karşılamayabilir. Örneğin “Güvenli yaya geçitleri önemlidir.” yargısı, yürüme olanaklarının kent yaşamına katkısını anlatan metnin bir yönüdür. Bu tek yargı paragrafın tamamını temsil edecek kadar kapsamlı değilse yardımcı düşünce düzeyinde kalır. Bir bilginin yardımcı düşünce sayılmasında onun kısa veya uzun oluşu değil, metnin bütünündeki işlevidir.

2. Ana düşünce, yardımcı düşünce ve ayrıntının sınırları

Ana düşünce, metnin bütününü birleştiren temel yargıdır. Yardımcı düşünce bu yargıyı destekleyen anlamlı bir alt savdır. Ayrıntı ise yer, zaman, sayı, örnek olay veya tekil gözlem gibi daha somut bir bilgi olabilir. Ancak ayrıntı her durumda önemsiz değildir; belirli bir sonuç için tek kanıt veya temel koşul olabilir. Bu nedenle “ayrıntı” sözcüğünü “okunmasa da olur” anlamında kullanmak doğru değildir.

Özgün metin: «Mahallelerdeki küçük kütüphaneler yalnız kitap ödünç verilen yerler değildir. Sessiz çalışma alanları, evde uygun ortam bulamayanlara düzenli çalışma olanağı sağlar. Yerel söyleşiler de farklı yaşlardan insanların buluşmasına katkıda bulunur. Bu yüzden küçük kütüphaneler, bulundukları çevrenin öğrenme ve iletişim yaşamını destekler.» Burada ana düşünce son cümlede ifade edilmiştir. Sessiz çalışma alanının yararı ile yerel söyleşilerin buluşma olanağı sağlaması iki ayrı yardımcı düşüncedir. “Farklı yaşlardan insanlar” ifadesi ise ikinci yardımcı düşüncenin kapsamını somutlaştıran bir ayrıntıdır.

Aynı özgün paragrafta anlam katmanları

Katman	Örnek ifade	Metindeki görevi
Ana düşünce	Küçük kütüphaneler çevrenin öğrenme ve iletişim yaşamını destekler.	Alt görüşleri ortak bir sonuçta birleştirir
Yardımcı düşünce	Sessiz çalışma alanları uygun ortamı olmayanlara olanak sunar.	Öğrenme yönünü gerekçelendirir
Yardımcı düşünce	Yerel söyleşiler farklı yaşları buluşturur.	İletişim yönünü gerekçelendirir
Ayrıntı	Farklı yaşlardan insanların buluşması	İletişim katkısının kime uzandığını somutlaştırır

3. Yardımcı düşüncenin açık ve dolaylı biçimde bulunması

Bir yazar yardımcı düşünceyi doğrudan bir cümlede söyleyebilir: «Küçük işletmeler, satış kayıtlarını düzenli tuttuğunda mevsimsel değişimleri daha iyi karşılaştırabilir.» Bu ifade, başka açıklamaya gerek kalmadan satış kaydının bir yararını bildirir. Bazı metinlerde ise bir alt yargı birkaç cümlenin birleşmesiyle anlaşılır. «Önceki dönemlere ait veriler aynı biçimde saklanmıyordu. Yeni kayıt düzeninde aynı ürün grupları her ay karşılaştırılabiliyor.» anlatımından, yeni sistemin dönemler arası karşılaştırmayı kolaylaştırdığı anlaşılır. Burada “kolaylaştırma” kelimesinin geçmesi şart değildir; dayanak iki cümlede bulunur.

Dolaylı anlatımda dikkat edilmesi gereken nokta çıkarılan yargının güç düzeyidir. Metin yalnız “aynı veriler karşılaştırılabiliyor” diyorsa “işletmenin kârı arttı” sonucuna ulaşılamaz. Karşılaştırmanın mümkün hâle gelmesi, ticari sonucun kesin olarak iyileştiğini kanıtlamaz. Dolaylı yardımcı düşünce belirlenirken metinde olmayan yeni bir olay, başarı ya da neden üretilemez.

4. Gerekçe, örnek, karşılaştırma ve koşulun destek işlevleri

Yardımcı düşünceler, ana yargıyı farklı yollarla destekler. Gerekçe “niçin” sorusunu karşılar; örnek genel bir gözlemi somutlaştırır; karşılaştırma iki durumun belirli bir özelliğini ayırır; koşul bir sonucun hangi durumda geçerli olduğunu sınırlar. Her birinin metne kattığı bilgi farklı olduğu için birini ötekinin yerine geçirmek anlamı bozabilir.

Örneğin «Açık veri tabloları araştırmacılara yararlıdır; çünkü farklı dönemleri aynı ölçütle incelemelerini sağlar.» cümlesinde ikinci bölüm gerekçedir. «Bazı belediyeler, yıllara göre ulaşım kullanımı verilerini düzenli yayımlar.» ifadesi konuyla ilgili somut bir örnek olabilir; fakat bütün belediyelerin bunu yaptığına kanıt değildir. «Veriler aynı tanımlarla toplandığında dönemler arasında karşılaştırma yapılabilir.» yargısı ise yararı bir koşula bağlar. Bu koşul çıkarılıp “her veri tablosu güvenilir karşılaştırma sağlar” denirse desteklenmeyen bir genellemeye ulaşılır.

Yardımcı bilgilerin farklı işlevleri

İşlev	Özgün örnek	Yorumda korunacak sınır
Gerekçe	Kayıtlar düzenli tutulduğu için değişim izlenebilir.	Belirtilen nedene bağlılık
Örnek	Bir merkez, haftalık kullanım sayısını yayımlıyor.	Tek örnekten bütün kurumlara genelleme yapılmaması
Karşılaştırma	Çevrim içi form, kâğıt forma göre daha kısa sürede dolduruluyor.	Karşılaştırmanın yalnız adı geçen ölçüte ait olması
Koşul	Veriler aynı yöntemle ölçülürse dönemler karşılaştırılabilir.	Koşul gerçekleşmeden sonucun kesin sayılmaması
Sınırlama	Bu bulgu yalnız incelenen iki mahalle için geçerlidir.	Kapsamın başka mahallelere taşınmaması

5. Çıkarım nedir, doğrudan bilgiden nasıl ayrılır?

Doğrudan bilgi, metinde açık olarak bildirilen bir olgu, görüş veya ilişkidir. Çıkarım ise metnin verdiği bilgilerden hareketle ulaşılan, çoğu zaman sözcüğü sözcüğüne yazılmamış bir sonuçtur. «Atölye, başvuru yoğunluğu nedeniyle ikinci bir oturum açtı.» ifadesinde ikinci oturumun açılması doğrudan bilgidir. «İlk oturumun kapasitesi bütün başvuruları karşılamamış olabilir.» yargısı metne uygun bir yorum olabilir; ancak ilk oturumun kaç kişi aldığı belirtilmiyorsa kesin sayı çıkarılamaz. “Başvuru yoğunluğu” tek başına herkesin katıldığı anlamına da gelmez.

Çıkarım yapmak serbestçe yeni olay kurmak değildir. Metindeki işaretler arasında tutarlı bir ilişki bulunmalı; sonucun gerektirdiği ek varsayım belirlenmelidir. Gerekçesi gösterilemeyen, yalnız deneyime uygun göründüğü için kabul edilen yargı metin çözümlemesinin değil okuyucunun tahmininin ürünüdür. Buna karşılık çıkarım, metindeki cümleyi aynı kelimelerle tekrarlamaktan daha ileri bir anlama sürecidir.

Verilen bilgi ile çıkarım ve tahminin ayrılması

Metin bilgisi	Önerilen yargı	Değerlendirme
Müze hafta içi saatlerini uzattı.	Müzenin hafta içi ziyaret saatleri değişmiştir.	Doğrudan bildirilen bilgi
Müze hafta içi saatlerini uzattı.	Önceki saatlerden daha geç ziyaret olanağı doğmuştur.	Metinden güçlü biçimde çıkarılabilir
Müze hafta içi saatlerini uzattı.	Müzenin ziyaretçi sayısı iki katına çıkmıştır.	Desteklenmeyen sonuç
Müze hafta içi saatlerini uzattı.	Çalışanların tamamı yeni düzeni desteklemiştir.	Metinde bulunmayan görüş

6. Çıkarımın dayanağını metinde göstermek

Bir çıkarımı denetlemenin ilk yolu, onu destekleyen kelime veya cümleleri belirlemektir. «İki yıl önce açılan okuma salonunun başlangıçta yalnız akşam saatlerinde hizmet verdiği, bu yıl öğle saatlerinde de açık olduğu» anlatılıyorsa hizmet süresinin geçmişe göre genişlediği sonucunu iki zaman bilgisi destekler. Fakat bunu «kullanıcı sayısı arttı» biçiminde değiştirmek için ayrıca kullanım sayısı gerekir. Çıkarımın doğru olup olmadığı, yargının dayanağını değiştirmeden kurulup kurulmadığıyla sınanır.

Dayanak, yalnız anahtar kelimenin bulunması da değildir. «Etkinlik süresi arttı ancak katılımcı sayısı değişmedi.» cümlesini okuyup yalnız «arttı» sözcüğüne dayanarak "katılımcı sayısı artmıştır" demek, kelimeyi yanlış niceliğe bağlamaktır. İlişkinin öznesi, hangi ölçüte ait olduğu ve karşıtlıkla sınırlandırılan bölüm birlikte okunmalıdır.

7. Kesin çıkarım, olası yorum ve desteklenmeyen sav

Bazı çıkarımlar, metin doğru kabul edildiğinde başka bir duruma yer bırakmaz. «Çalıştayın üç oturumu vardı ve bunların yalnız ikisi sabah yapıldı.» bilgisinden en az bir oturumun sabah yapılmadığı kesin biçimde anlaşılır; çünkü üç oturumdan yalnız ikisi sabah olarak belirtilmiştir. Buna karşılık «Çalıştay sabah ve öğleden sonra programlandı.» ifadesinden oturum sayısının üç olduğu çıkmaz. Kesinlik, metnin gerçek hayatta doğru olup olmadığını ayrı araştırmakla değil, metnin verdiği öncüllerden hangi sonucun zorunlu doğduğunu saptamakla ilgilidir.

Olası yorum, metinle uyumlu olsa da tek zorunlu açıklama olmayabilir. «Bir yürüyüş yolu yoğun yağıştan sonra geçici olarak kapatıldı.» bilgisine bakarak zeminde onarım gerektiren hasar oluştuğu düşünülebilir; ancak bu yalnız bir ihtimaldir. Güvenlik amacıyla hasar oluşmadan da kapatma yapılmış olabilir. Metindeki olayın tek mümkün nedenini belirtmeden kesin neden atamak, çıkarım gücünü aşar. Bu ayrım GY-06.02'de cümle düzeyinde ele alınan kesin yargı ilkelerinin paragraf bütününde uygulanmasıdır.

Çıkarımın kanıt gücü

Verilen durum	Sonuç	Kanıt düzeyi
Dört sunumun üçü çevrim içi yapıldı, biri yüz yüzeydi.	En az bir sunum çevrim içi yapılmamıştır.	Kesin
Gezi hava koşulları yüzünden ertelendi.	Hava koşulları planın uygulanmasını etkilemiştir.	Kesin
Gezi hava koşulları yüzünden ertelendi.	İleriki tarihte mutlaka yapılacaktır.	Desteklenmez
Girişte bekleme oluştu ve ikinci kontrol noktası açıldı.	Bekleme süresini azaltma amacı güdülmüş olabilir.	Olası; amaç açıkça belirtilmedi

8. "Değinilmiştir" ifadesinde doğrudan ve anlamca eşdeğer bilgi

Metinde bir konuya değinilmesi, ilgili bilginin mutlaka aynı sözcüklerle yazılmasını gerektirmez. «Yeni düzen, formu doldurmak için gereken aşama sayısını azalttı.» ifadesi, "işlem basamaklarının sadeleştiği" yargısını karşılar. Sözcükler farklıdır; fakat ikisi de aşama sayısındaki azalmayı anlatır. Buna karşılık "işlemin tümüyle otomatikleştiği" yargısı aşamaların azalmasından çıkarılamaz. Benzer kelimelerden çok, aynı ilişkinin korunup korunmadığı önemlidir.

Değinilme denetiminde yargı tek bir koşula değil, birden fazla bilgiye dayanabilir. «Kent parkında sabah yürüyüşleri ve hafta sonu açık hava söyleşileri düzenleniyor.» cümlesi hem spor amaçlı hem kültürel nitelikli etkinliklerden söz edildiğini gösterir. Fakat parkta çocuk oyun alanı bulunduğuna değinilmiş sayılmaz; o tür alanların parklarda sık görülmesi metnin kanıtı değildir.

9. "Değinilmemiştir" ifadesinde konu dışı bilgi ve eksiklik

Bir paragrafta değinilmeyen unsur, gerçek dünyada bulunmadığı kanıtlanan unsur değildir. Metin bir araştırma merkezinin kuruluş yılını, çalışma alanını ve kütüphane hizmetini anlatıp çalışan sayısını hiç belirtmiyorsa doğru saptama «çalışan sayısına değinilmemiştir» olur. «Merkezde çalışan yoktur» yargısı ise metindeki boşluğu olumsuz bilgiye dönüştürür ve yanlıştır. Bilgi eksikliği ile olgunun yokluğu farklıdır.

Özgün paragraf: «Kültür merkezi 2019'da eski bir depo binasının dönüştürülmesiyle açıldı. Hafta içi atölyeleri düzenleniyor; belirli günlerde de mahalle sakinleri için ücretsiz söyleşiler yapılıyor. Merkezin kütüphane bölümü geçen yıl genişletildi.» Bu metinde açılış yılı, yapının önceki işlevi, program türleri, söyleşilerin ücret durumu ve kütüphanedeki değişiklik belirtilmiştir. Günlük ziyaretçi sayısı, bina kapasitesi, yöneticinin kimliği veya tüm etkinliklerin ücretsiz olup olmadığı hakkında açık bilgi yoktur. Son nokta önemlidir: Yalnız söyleşilerin ücretsiz oluşu, atölyelerin de ücretsiz olduğunu göstermez.

Özgün kültür merkezi paragrafında değinilme sınırları

İfade edilen bilgi	Metin dayanağı	Sonuç
Merkez dönüştürülmüş bir binadadır.	Eski depo binasının dönüşümü	Değinilmiştir
Söyleşilerin ücreti alınmaz.	Ücretsiz söyleşiler	Değinilmiştir
Bütün etkinlikler ücretsizdir.	Yalnız söyleşiler ücretsiz olarak tanımlanır	Değinilmemiştir
Günlük ziyaretçi sayısı artmıştır.	Kullanıcı sayısı bilgisi yoktur	Değinilmemiştir
Kütüphane bölümü genişletilmiştir.	Geçen yıl genişletildi	Değinilmiştir

10. Söylenmeyenden yokluk sonucu üretmeme

«Toplantıda bütçe ve personel planı görüşüldü.» cümlesi, bu iki başlığın görüşüldüğünü kesin olarak bildirir. “Başka hiçbir konu görüşülmedi” yargısının çıkarılabilmesi için toplantı kapsamının bunlarla sınırlı olduğu ayrıca belirtilmelidir. Söylenmeyen diğer başlıklar gerçekten konuşulmuş da olabilir, konuşulmamış da olabilir. Dolayısıyla metnin hangi alanlarda sessiz kaldığı da anlamın sınırının bir parçasıdır.

Buna karşılık «Toplantıda yalnız bütçe ve personel planı görüşüldü.» ifadesi, kapsamı kapatır; başka bir başlığın resmî gündemde görüşülmediği sonucu metnin bildirdiği sınırlar içinde elde edilir. “Yalnızca” ve “sadece” gibi sınırlayıcı sözcükleri göz ardı etmek, değinilmeme konusunda olduğu kadar çıkarım konusunda da kapsam hatasına yol açar. Sınırlandırıcı sözcüklerin varlığı ya da yokluğu, çıkarılabilecek sonuçlar arasındaki farkı belirleyebilir.

11. Birden fazla cümleden ortak çıkarım elde etme

Bir paragraftaki çıkarım kimi zaman birbirinden uzak iki bilginin birleştirilmesini gerektirir. Özgün metin: «Yeni hizmet noktası hafta içi 08.00–17.00 saatlerinde açıktır. Eski noktada ise mesai 09.00'da başlıyor ve 16.00'da sona eriyordu. Her iki nokta da aynı günlerde hizmet veriyor.» Buradan yeni noktanın günlük çalışma aralığının eski noktadan daha uzun olduğu çıkarılabilir. Yeni noktada dokuz saatlik, eskisinde yedi saatlik açık kalma süresi bulunur; dokuz eksi yedi, iki saatlik farktır. Bu hesap açık saatlere ilişkindir; personelin günlük net çalışma süresinin de iki saat daha fazla olduğu sonucu, molalar ve vardiyalar bilinmeden çıkarılamaz.

Birleştirme sırasında karşılaştırılan iki bilginin aynı ölçüte ait olduğunun kontrolü gerekir. Yeni merkezin haftada beş gün, eskinin haftada dört gün açık olduğu ayrıca bilinseydi haftalık toplam açık kalma süresi de karşılaştırılabilirdi. Fakat yalnız günlük saatlere dayanarak haftalık personel sayısını veya başvuru kapasitesini belirlemek mümkün olmazdı. Farklı niceliklerin aynı sayılarla ifade edilmesi aralarında zorunlu bir eşitlik kurmaz.

12. Zaman sırası, değişim ve sebep çıkarımı

Olayların önce ve sonra gerçekleşmesi her zaman biri diğerine neden oldu demek değildir. «Kütüphanenin açılış saati değiştirildi. Sonraki ay kullanıcı sayısı yükseldi.» cümlelerinden iki gelişmenin zaman bakımından ardışık olduğu anlaşılır; kullanıcı artışının tek nedeninin saat değişikliği olduğu belirlenemez. Ara dönem boyunca başka etkiler de bulunabilir. Yazar «Açılış saatinin değişmesi, sabah gelen kullanıcı sayısını artırdı.» derse neden ilişkisi artık açık bir iddia hâline gelir; buna karşılık bunun bilimsel olarak kanıtlanmış olup olmadığı ayrı bir değerlendirmedir.

Zamana ilişkin çıkarımlarda “önce”, “sonra”, “henüz”, “artık”, “ilk kez”, “yeniden” gibi sözcüklerin yüklediği anlamın da korunması gerekir. «Köprü iki yıl aradan sonra yeniden kullanıma açıldı.» cümlesi, açılmadan önceki iki yıl boyunca kullanıma kapalı olduğu anlamını taşır; köprünün ilk kez yapıldığı veya bundan önce hiç kullanılmadığı anlamına gelmez. “Yeniden” sözcüğü geçmişte kullanımın bulunduğunu anlatır.

13. Karşılaştırma, oran ve üstünlük ifadelerinin kapsamı

Paragraftaki karşılaştırma yalnız belirtilen kişi, yer, zaman veya ölçüte uygulanır. «A bölgesindeki belediye otobüsü seferleri geçen yıla göre arttı.» ifadesi artış yönünü bildirir; artışın ne kadar olduğu ve başka bölgelere göre daha çok sefer yapılıp yapılmadığı belirsizdir. «Bu yıl bisikletle gelenlerin oranı arttı.» ifadesinden sayının da artmış olması zorunlu değildir; toplam ziyaretçi sayısı azaldığında oran yükselse bile bisikletle gelenlerin sayısı sabit kalabilir.

Bir örnek bu ayrımı gösterir: Geçen yıl 200 kişilik bir toplulukta 40 kişi bisiklet kullanmışsa oran %20'dir. Bu yıl toplam 100 kişiden 30'u bisiklet kullanmışsa oran %30'a yükselir; buna karşın bisiklet kullanan kişi sayısı 40'tan 30'a düşmüştür. Sayılar bu kitap için oluşturulmuş temsili veridir. Dolayısıyla «oranı arttı» yargısından «kişi sayısı arttı» sonucuna otomatik olarak ulaşılamaz; ölçütün oran mı mutlak sayı mı olduğuna bakılır.

Karşılaştırmada korunması gereken ölçüt

Metindeki bilgi	Güvenli sonuç	Desteklenmeyen genişletme
A biriminin işlem süresi B'den kısadır.	Belirtilen işlem bakımından A daha hızlıdır.	A her hizmette daha iyidir.
Bu yıl katılım oranı yükseldi.	Katılanların toplam içindeki payı artmıştır.	Katılımcı sayısı kesin artmıştır.
Ziyaretçilerin çoğu sabah geldi.	Sabah gelenler toplamın yarısından fazladır.	Her ziyaretçi sabah gelmiştir.
Toplantılar önceki aya göre sıklaştı.	Toplantı sıklığı artmıştır.	Toplantı süreleri uzamıştır.

14. Belirleyiciler: “bazı”, “çoğu”, “bütün” ve “yalnızca”

Bir metinde nicelik bildiren veya kapsamı sınırlayan sözcükler, yardımcı düşüncelerin doğru çıkarılmasını doğrudan etkiler. «Bazı katılımcılar sorularını yazılı iletti.» cümlesi, en az bir katılımcının bunu yaptığını ifade eder; bütün katılımcıların yazılı soru gönderdiğini kanıtlamaz. «Katılımcıların çoğu yazılı soru iletti.» cümlesi yarıdan fazlasına işaret eder; ancak kalanların hiçbirinin sözlü soru sormadığını söylemez. «Bütün katılımcılar yazılı soru iletti.» yargısı kapsamı en geniş hâle getirir.

«Yalnızca çevrim içi başvurular kabul edildi.» ifadesinde kabul edilen yöntem daraltılır; kaç başvurunun yapıldığı ya da kabul edildiği tek başına belirtilmiş olmaz. «En az üç oturum düzenlendi.» cümlesi tam olarak üç oturum yapıldığı anlamına gelmez; üç, dört veya daha fazla olabilir. «Üç oturumdan yalnız ikisi kaydedildi.» ifadesi ise belirli toplam içinde bir oturumun kayda alınmadığı sonucunu doğurur. Yargının anlamı, onu taşıyan sayılar kadar sınırlama sözcüklerine de bağlıdır.

Kapsam belirteçlerinden doğan sonuçlar

İfade	Söylenen	Söylenmeyen
Bazı başvurular incelendi.	En az bir başvuru incelendi.	İncelenmeyen başka başvuru olup olmadığı
Başvuruların çoğu incelendi.	Yarısından fazlası incelendi.	Hepsinin incelendiği
Bütün başvurular incelendi.	Her başvuru incelendi.	Sonuçlarının olumlu olduğu
En az dört kişi katıldı.	Katılım sayısı dörtten az değildir.	Tam katılımcı sayısı
Yalnız iki oturum ertelendi.	Ertelenen oturum sayısı ikidir.	Diğer oturumların başarı düzeyi

15. Olasılık, öneri ve niyet bildiren metinlerde çıkarım

Metinde geleceğe ilişkin bir öneri veya beklenti varsa bu, gerçekleşmiş bir olay gibi okunmaz. «Merkezin gelecek yıl yeni bir okuma odası açması planlanıyor.» cümlesi bir planı bildirir. «Yeni okuma odası açılmıştır» sonucu çıkmaz. Benzer biçimde «Güzergâh genişletilirse ulaşım kolaylaşabilir.» ifadesi, gerçekleşmesi koşula ve olasılığa bağlı bir beklentidir; güzergâhın genişletildiği, ulaşımın kesin kolaylaştığı veya bütün kullanıcıların aynı yararı gördüğü sonucunu vermez.

Yazarın önerisi de okurun doğruladığı kesin sonuç değildir. «Arşiv belgeleri çevrim içi erişime açılmalıdır.» yargısı bir gereklilik görüşüdür. Bundan belgelerin şu anda çevrim içi erişime kapalı olduğu zorunlu olarak çıkmaz; var olan erişimin genişletilmesi de öneriliyor olabilir. İleri sürülen öneri, metnin gerçek durum betimlemesiyle karıştırılmadığında çıkarım güvenilir hâle gelir.

16. Görüş kime ait: Yazar, araştırmacı ve aktarılan kişi

Bir metinde görüşün sahibi, değerlendirmeyi belirleyen önemli bir bilgidir. «Araştırma ekibi bu düzenlemenin zaman kaybını azaltacağını düşünüyor; yönetim ise önce deneme yapılması gerektiğini savunuyor.» ifadesinde ilk değerlendirme araştırma ekibine, ikinci değerlendirme yönetime aittir. Okurun bunları «Yazar düzenlemenin kesin yararlı olduğunu söylüyor.» biçiminde birleştirmesi hem görüş sahibini hem de kesinlik düzeyini değiştirir.

Özellikle haber ve değerlendirme metinlerinde «iddia etti», «belirtti», «ölçtü», «kanıtladı» gibi fiiller eş anlamlı değildir. Bir yetkilinin verimliliğin arttığını belirtmesi, bu artışın bağımsız olarak ölçüldüğünü metnin kendi başına göstermez. Paragrafın içindeki atıflar, doğrulama yöntemleri ve karşı görüşler korunmalıdır. Yazarın bir görüşü aktarması, onu mutlaka benimsediği anlamına gelmez.

Görüş sahibini ve bildirim türünü ayırma

Metindeki anlatım	Güvenli okuma	Hatalı yorum
Kurul yeni yöntem önerdi.	Kurulun önerisi vardır.	Yeni yöntem uygulanmaya başlanmıştır.
Uzmanlar artış bekliyor.	Uzmanlar geleceğe yönelik beklenti taşıyor.	Artış kesin gerçekleşmiştir.
Raporda önceki yıla göre düşüş ölçüldü.	Rapora göre karşılaştırmalı ölçüm yapılmıştır.	Düşüşün tek nedeni bilinmektedir.
Bazı kullanıcılar uygulamayı eleştirdi.	Eleştiren kullanıcılar vardır.	Kullanıcıların tamamı karşıdır.

17. Olumsuzluk, istisna ve kapsamı daraltan ifadeler

Bir yardımcı düşünceyi olumsuz biçime çevirirken sözcüklerin kapsamı korunmalıdır. «Bütün belgeler onaylanmadı.» ifadesi bağlama göre belirsiz olabilir: Belgelerin hiçbirinin onaylanmadığı ya da tamamının onaylanmadığı anlamı çağrıştırabilir. «Belgelerin hiçbirine onay verilmedi.» kesin yokluğu, «Belgelerin en az biri onaylanmadı.» ise kısmi olumsuzluğu açıklar. Açıklığı bulunmayan bir ifadeye kendiliğinden tek mantıksal yorum yüklemek güvenli değildir.

«Açılış konuşması dışında bütün oturumlar kaydedildi.» cümlesinden oturumların kaydedildiği, açılış konuşmasının bu kapsamın dışında tutulduğu anlaşılır. Fakat açılış konuşmasının hiç kaydedilmediği açık biçimde söylenmiyorsa, istisna belirtmenin tek başına o konuşmanın kayda alınmadığını kesinleştirdiği varsayılmamalıdır. Bir ifade çoğu zaman amaçlanan kapsamı sezdirse bile kesin çıkarım için açık dayanak aranır. Bu dikkat, olumsuz yardımcı düşünce değerlendirmelerinde metne sadakati güçlendirir.

> **Yokluk ve belirsizlik ayrımı** Metinde bir bilginin geçmemesi, o bilginin gerçekte yanlış olduğunu kanıtlamaz. «Değinilmedi», «yoktur», «henüz yapılmadı» ve «yapılması planlanıyor» farklı bilgi durumlarıdır; birbirinin yerine kullanılamaz.

18. Örnek olaydan genel yargıya geçişin sınırı

Yazar tek bir yerden, kişiden veya dönemden söz ederek daha genel bir düşünceyi görünür kılabilir. Ancak örnek, bütünü kesin kanıtlayan evrensel bir kural değildir. «Bir mahallede kurulan ortak çalışma alanı, bazı serbest çalışanların ev dışında düzenli çalışma ortamı bulmasını sağladı.» bilgisi, belirli bir mekânın belirli kişiler için yararını gösterir. «Bütün ortak çalışma alanları herkesin üretkenliğini artırır.» sonucuna ulaşmak için çok daha geniş kanıt gerekir.

Aynı durum sayısal örneklerde de geçerlidir. Bir işletmenin belirli ayda maliyetini azalttığı anlatılıyorsa bütün işletmelerin aynı yöntemi uyguladığında aynı tasarrufu sağlayacağı çıkarılamaz. Örnekte açıkça gösterilen özellik ile örneğin temsil ettiği iddia edilen geniş kitle farklı kavramlardır. Yardımcı düşünce, örneğin kanıt gücü kadar ifade edilmelidir.

19. Bilgilendirici, tartışmacı ve anlatısal metinlerden çıkarım

Bilgilendirici paragrafta çıkarım çoğu zaman tanım, sınıflandırma, ölçüm veya açıklamalar arasındaki ilişkilere dayanır. Tartışmacı paragrafta görüşün kime ait olduğu, hangi gerekçenin hangi iddiayı desteklediği ve karşı görüşün nasıl ele alındığı önem kazanır. Anlatısal metinde ise davranış, konuşma ve olayların sırasından kişiler arasındaki ilişki ya da karakterin içinde bulunduğu durum hakkında çıkarım yapılabilir. Fakat bir karakterin bir kez sessiz kalması onun kesin biçimde korktuğunu kanıtlamaz; düşünceli, yorgun ya da isteksiz olması da mümkündür.

Özgün anlatısal örnek: «Aradan yıllar geçtikten sonra eski çalışma arkadaşlarıyla buluştuğunda, masadaki boş sandalyeye uzun süre baktı. Kimse nedenini sormadı; sohbete başladıklarında o da katıldı.» Boş sandalyenin kişi için anlam taşıdığı, bakışının sıradan bir ayrıntı olmayabileceği sezilebilir. Ancak sandalyenin kime ait olduğu, sandalyede oturan kişinin yaşamını yitirip yitirmediği veya karakterin ne hissettiği kesin olarak bilinmez. Edebî çıkarım, bağlamı zenginleştiren ihtimalleri fark etmeyi içerir; bu ihtimalleri kanıtlanmış bilgi gibi sunmayı değil.

Metin türüne göre çıkarımın temel dayanakları

Metin türü	Dayanak	Sakınılacak aşırılık
Bilgilendirici	Tanım, ölçüt, tarih, açıklama, sınıflama	Sayı veya kapsam dışı genelleme
Tartışmacı	İddia, gerekçe, karşı görüş, sınırlama	Aktarılan karşı görüşü yazara yükleme
Anlatısal	Olayların sırası, davranış ve konuşmalar	Tek davranıştan kesin duygu ve niyet çıkarma
Betimleyici	Seçilmiş ayrıntılar, mekân ve duyusal izlenimler	Nesnel betimi zorunlu kişisel değerlendirmeye dönüştürme

20. İki ayrı yargının aynı metinden desteklenmesi

Bir paragraf, aynı ana görüşe bağlı birkaç farklı yardımcı düşünceyi eşit derecede açık biçimde taşıyabilir. Bu yüzden yalnız birini bulmak, metindeki bütün bilgiyi değerlendirmek anlamına gelmez. Özgün metin: «Mahalle arşivinde fotoğraflar tarih ve yer bilgileriyle saklanıyor. Eski haritalar da ayrı bir bölümde korunuyor. Gönüllüler, görüntülerin kimlere ait olduğunu belirlemek için mahalle sakinleriyle görüşmeler yapıyor. Bu çalışma, belgeleri düzenlemeyi ve onları açıklayan sözlü bilgileri toplamayı birlikte yürütüyor.» Buradan fotoğrafların sınıflandırıldığı, eski haritaların korunduğu ve sözlü tanıklıkların belge açıklamasına katkı sağladığı ayrı ayrı çıkarılabilir.

Bu metnin «arşiv yalnız fotoğraf toplar» şeklinde yorumlanması haritaları ve görüşmeleri göz ardı eder. «Bütün belgeler sayısallaştırılmıştır» yargısı ise metinde bulunmayan bir yöntemi ekler. Çıkarılabilecek birkaç güvenli yargının varlığı, herhangi bir genişletmenin doğru olacağı anlamına gelmez. Her alt yargı kendi cümlesiyle denetlenmelidir.

21. Bütünleşik öğretici inceleme: Desteklenen, çıkarılabilen ve açıkta kalan bilgiler

Aşağıdaki özgün metin, yardımcı düşünce ve çıkarımın aynı paragrafta birlikte nasıl çalıştığını göstermek için hazırlanmıştır: «Bir ilçedeki halk eğitim merkezinde geçen yıl başlayan akşam atölyeleri, bu yıl da sürdürülüyor. Geçen dönem iki farklı alanda açılan atölyelerin sayısı bu dönem dörde çıkarıldı. Katılımcıların bir bölümü gündüz çalıştığı için akşam saatlerini tercih ettiğini belirtiyor. Merkez yönetimi, yeni dönemde başvuru koşullarını internet sayfasında açıklamayı planlıyor. Ancak atölyelere katılanların sonraki meslek yaşamına ilişkin bir izleme çalışması henüz yapılmadı.»

Bu metnin bütününde akşam atölyelerinin sürdürülmesi ve çeşitlendirilmesi, çalışanların katılım gerekçelerinden biri, duyuruya yönelik plan ve sonuç izleme eksikliği aynı konu çevresinde bir aradadır. «Atölye sayısı geçen dönemden bu döneme artmıştır» yargısı iki ve dört sayılarına dayanır. Artış miktarı dört eksi iki, yani iki atölyedir; öncekinin iki katına ulaşılmıştır. İfade edilen sayılar özgün örneğin kurgusuna aittir, gerçek bir kurumun istatistikleri değildir.

«Gündüz çalışan bazı katılımcılar için akşam saatleri uygundur» yargısı, tercih bildiren bölümün anlamına uygundur; ancak bütün katılımcıların çalıştığı söylenemez. «Başvuru koşulları internet sayfasında yayımlanmıştır» yargısı metinden çıkmaz; yalnız bir plan vardır. «Atölyelerin mesleki başarıyı artırdığı kanıtlanmıştır» sonucu ise izleme çalışmasının yapılmadığı bilgisiyle desteklenmez. Aynı metin hem kesin çıkarımları hem de hakkında yorum yapılamayan alanları gösterir.

Özgün atölye paragrafının çok yönlü okuması

İncelenen yargı	Metindeki dayanak	Değerlendirme
Akşam atölyeleri geçen yıl da vardı.	Geçen yıl başlayan ve sürdürülen atölyeler	Kesin desteklenir
Atölye sayısı iki artmıştır.	İkiden dörde çıkarılması	Kesin desteklenir
Bazı katılımcılar gündüz çalışıyor.	Katılımcıların bir bölümü gündüz çalışıyor	Kesin desteklenir
Başvuru koşulları internette yayımlandı.	Yayımlama henüz plan aşamasında	Desteklenmez
Mesleki sonuçlar düzenli izlenmiştir.	İzleme çalışması henüz yapılmadı	Metne aykırı
Tüm katılımcılar mesleki kazanım elde etti.	Mesleki kazanıma dair sonuç yok	Desteklenmez

Örnekten hareketle çıkarımın bir denetim düzeni kurulabilir. Önce yargının öznesi ve yüklemi, ardından zamanı ve kapsamı belirlenir. Sonra metindeki karşılıkları aranır. Metinde doğrudan bulunuyorsa verilen bilgi; iki ya da daha fazla dayanak arasında zorunlu veya makul bir ilişki kurularak elde ediliyorsa çıkarım olarak değerlendirilir. İddia için gerekli bilgi yoksa sırf beklenen bir sonuç olduğu için doğru kabul edilmez.

22. Metne geri dönerek sınırı koruma ve sonraki konularla bağlantı

Yardımcı düşünce ve çıkarım çalışmasında temel denetim, elde edilen yargıyı metne geri götürmektir. Metnin hangi cümlesi bu görüşü taşıyor? Cümlenin konusu, öznesi, zamanı ve niteliği korundu mu? “Birkaç”, “en az”, “çoğu”, “yalnızca”, “planlanıyor”, “belirtildi” gibi ifadeler yargıda kayboldu mu? Örnek bir olay, bütün durumlar için geçerli sayıldı mı? Bu sorular, yeni bir bilgi katmadan anlamın sınırlarını saptamaya yardımcı olur.

Ana düşünceyi belirleme, yardımcı düşünceleri ayırma ve çıkarım oluşturma birbirini tamamlayan fakat aynı olmayan işlemlerdir. Ana düşünce metnin genel yargısını birleştirir; yardımcı düşünceler bu yargının nedenlerini ve boyutlarını açar; çıkarım ise açık veya dolaylı veriler arasında bağlantı kurar. Sonraki GY-06.05 konusundaki paragraf tamamlama ve sıralama çalışmalarında bu ilişkiler metnin hangi cümlesinin önce ya da sonra gelmesi gerektiğini anlamaya yardım edecektir. Burada edinilen temel yöntem, metni genişletmeden, metnin söylediğini ve söylemediğini ayrı ayrı gösterebilmektir.

KONU 6.5

PARAGRAF TAMAMLAMA VE SIRALAMA

Bir metnin anlaşılması, yalnız içerdiği cümlelerin tek tek ne söylediğini belirlemekten ibaret değildir. Cümleler arasında bir düşünce yolu kurulur: Yeni bilgi, daha önce tanıtılan kavrama bağlanır; bir sonuç kendisini hazırlayan gerekçelerden sonra gelir; anlatılan olayın devamı, olayın gerçekleştiği zamana ve koşullara uygun biçimde aktarılır. Paragraf tamamlama, eksik kalan bir düşünce halkasını metnin anlamını bozmadan kurmayı; paragraf sıralama ise cümlelerin bu ilişkileri görünür kılacak düzenini belirlemeyi gerektirir. Her iki beceri de ana düşünceyi, yardımcı bilgileri ve cümle içindeki kapsam işaretlerini birlikte değerlendirmeye dayanır. Bu bölümde yalnız sözcük düzeyindeki çağrışımlara değil, cümlelerin birbirine hangi gerekçeyle bağlandığına odaklanılacaktır.

1. Paragrafta bütünlük ile cümlelerin sırası arasındaki ilişki

Paragraf, tek bir konu çevresinde birbiriyle ilişkili cümlelerin oluşturduğu anlam bütünüdür. Aynı konuyu anlatan cümlelerin art arda getirilmesi, aralarında kendiliğinden doğru bir akış oluşturmaz. Çünkü tanıtılmamış bir kavrama gönderme yapmak, sonucu gerekçesinden önce sunmak veya bir olayın etkisini olay gerçekleşmeden anlatmak okurun anlam kurmasını güçleştirebilir. Buna karşılık bazı metinlerde sonuç önce belirtilip gerekçeler sonradan açıklanabilir; belirleyici olan her paragraf için zorunlu tek bir diziliş değil, yazarın seçtiği anlatımın kendi içinde tutarlı olmasıdır.

Özgün bir açıklama örneğinde «Bir belgenin uzun yıllar saklanması, gerektiğinde kolayca bulunabileceği anlamına gelmez. Bunun için belgelerin içeriğine uygun bir sınıflandırma sistemi kurulmalıdır. Böyle bir düzen, aranan kaydın bulunduğu dosyaya daha kısa sürede ulaşılmasını sağlar.» cümleleri birbirini tamamlar. İlk cümle bir sorun ya da eksiklik belirler; ikinci cümle çözüm yolunu gösterir; üçüncü cümledeki «böyle bir düzen» sözü bu çözümün sonucunu açıklar. Üçüncü cümle başa alındığında «böyle» sözcüğünün neye gönderme yaptığı belirsiz kalır. Bu nedenle cümlelerin her birinin aynı konu hakkında olması, düzenin rastgele kurulabileceğini göstermez.

2. Giriş, gelişme ve sonuç bölümlerinin işlevleri

Giriş cümlesi çoğunlukla konuyu tanıtır, bir problem ortaya koyar, dikkat çekici bir gözlem sunar veya ileride savunulacak görüşün çerçevesini belirler. Gelişme bölümünde tanım, gerekçe, açıklama, örnek, karşılaştırma ya da olayın aşamaları yer alır. Sonuç ise önceki bilgileri bir yargıda birleştirebilir, öneri geliştirebilir ya da anlatılan sürecin ulaştığı noktayı gösterebilir. Bu bölümlerin sayısı ve görünürlüğü metnin uzunluğuna ve türüne göre değişir; her paragrafın «sonuç olarak» ifadesiyle bitmesi gerekmez.

«Küçük müzelerde sergilerin etkisi yalnız eserlerin değerine bağlı değildir» cümlesi, tartışılacak düşünceyi bağımsız biçimde ortaya koyduğu için bir giriş olabilir. «Eserin yanında bulunan kısa ve anlaşılır açıklamalar, ziyaretçinin gördüğü nesneyle tarihsel bağlam arasında ilişki kurmasına yardımcı olur» cümlesi gelişmede gerekçe sunar. «Bu yüzden sergileme dili, koleksiyonun kendisi kadar özen gerektirir» cümlesi önceki gerekçeyi daha genel bir sonuca bağlar. Girişin görevini ortaya koyma, gelişmenin görevini açıklama, sonucun görevini bağlama ya da değerlendirme şeklinde görmek yararlıdır; ancak bunlar mekanik kalıplar değildir.

Paragraf bölümlerinin yaygın işlevleri

Bölüm	Temel işlev	Cümlede görülebilecek ipucu	Tek başına yeterli olmayan işaret
Giriş	Konuyu veya problemi tanıtma	Bağımsız tanıtım, genel yargı	İlk sıraya yazılmış olmak
Gelişme	Konuyu açma ve ilişki kurma	Açıklama, örnek, gerekçe, karşılaştırma	Uzun cümle olmak
Sonuç	Önceki bilgileri bağlama	Sonuç yargısı, değerlendirme, öneri	«Sonuç olarak» sözünü içermek

3. Paragrafın ilk cümlesinde bağımsızlık ve bağlam

Başlangıç için uygun bir cümle, okura henüz verilmemiş bir bilgiyi zorunlu ön koşul saymamalıdır. «Bu yöntem sayesinde daha güvenilir sonuçlar elde edildi» ifadesi çoğu durumda bir başlangıçtan çok önce tanıtılan yöntemin devamı niteliğindedir. Buna karşılık «Bir gözlemin güvenilir olması, ölçümün nasıl yapıldığının bilinmesini de gerektirir» cümlesi kendi bağlamını kurar ve arkasından yöntem açıklamalarının gelmesine izin verir. Bu nedenle başlangıç cümlesinde «bu, böyle, söz konusu, anılan, bunlardan biri» gibi gönderimler özellikle incelenir.

Yine de gösterme sözcüğü içeren her cümle giriş olamaz diye değişmez bir kural yoktur. «Bu kentte sabah erken saatlerde sokaklar sakindir» cümlesindeki «bu kent» ifadesi, konuşma bağlamında işaret edilen bir yeri tanıtabilir; metnin önceki bölümüne zorunlu gönderme yapması gerekmez. «Bu ikinci yöntem» ise ilk yöntem daha önce açıklanmamışsa bağımlı görünür. Başlangıç adayının uygunluğu yalnız tek bir sözcüğe göre değil, sözcüğün hangi ön bilgiye ihtiyaç duyduğuna göre değerlendirilmelidir.

Başlangıç için bağımsızlık denetimi

Cümle	Başta kullanılma değerlendirmesi	Gerekçe
«Mahalle arşivleri yerel tarih araştırmalarına farklı kayıtlar sunar.»	Uygun olabilir	Konu bağımsız tanıtılıyor
«Bu kayıtların bir bölümü sözlü tanıklıklardan oluşur.»	Önceki cümleye bağlı	«Bu kayıtlar» daha önce tanıtılmalı
«Ancak bu yaklaşım her durumda yeterli değildir.»	Ön bağlam gerekir	«Ancak» ve «bu yaklaşım» karşılaştırma istiyor
«Arşiv çalışmalarında kaynak türleri çeşitlilik gösterir.»	Uygun olabilir	Genel çerçeve kuruluyor

4. Konunun tanıtılmasından ayrıntıya ilerleme

Birçok bilgilendirici paragrafta önce genel kavram tanıtılır, sonra kavramın özelliği, gerekçesi veya örneği açıklanır. Bu, «genelden özele» ilerleme olarak adlandırılabilir. «Kamusal alanların erişilebilirliği, farklı kullanıcıların aynı mekândan yararlanabilmesini etkiler» genel yargısının ardından «Örneğin girişteki basamaksız geçişler ve anlaşılır yönlendirme levhaları, hareket güçlüğü yaşayan kişilerin kullanımını kolaylaştırabilir» ayrıntısı gelmesi anlamlıdır. Örneğin hangi genel düşünceyi somutlaştırdığı açıkça görülür.

Ancak bütün metinler genelden özele ilerlemek zorunda değildir. Bir yazar önce somut bir gözlem aktarıp daha sonra bu örnekten genel sonuca ulaşabilir. «Bir sokakta yapılan küçük gölgelendirme düzenlemesi, yazın yaya kullanımını belirgin biçimde artırdı» gözlemiyle başlayan bir anlatım, ardından «Tek bir tasarım müdahalesi bile gündelik hareket alışkanlıklarını etkileyebilir» sonucuna varabilir. İki düzen de kendi içinde kurulabilir; seçimi belirleyen, verilen cümleler arasındaki anlam ve gönderim ilişkileridir.

5. Gönderim ilişkileri: Zamirler, işaret sözcükleri ve tekrarlar

Cümleler arasındaki en güçlü bağlardan biri, sonraki cümlenin önceki cümlede geçen bir kişiyi, nesneyi, durumu ya da düşünceyi yeniden adlandırmasıdır. «Kütüphane yeni bir dijital katalog oluşturdu. Bu katalog, kitapların konu başlığına göre aranmasını sağlıyor» metninde «bu katalog» sözünün karşılığı açıktır. «Böylece arama süresi kısalabilir» cümlesindeki «böylece» de katalogla sağlanan işlevin muhtemel sonucunu belirtir. Aynı adın her defasında tekrarlanmaması akıcılığı artırır; ancak gönderimin yanlış nesneye bağlanması anlamı değiştirir.

«Bu, söz konusu, bunlar, kendisi, diğeri, ilki, ikincisi, böyle bir durum, aynı yöntem» gibi ifadeler birer ipucudur. Örneğin «İki farklı kayıt yolu denendi» cümlesinden sonra «İlki elden form toplamaya, ikincisi çevrim içi başvuruya dayanıyordu» denebilir. İlk cümle olmadan «ilki» ve «ikincisi»nin neyi işaret ettiği belirsizleşir. Üstelik gönderim yalnız adlara değil, bir önceki cümlenin bütün yargısına da yönelir: «Başvurular beklenenden erken kapandı. Bu durum, duyurunun yeniden yapılmasını gerektirdi.» Burada «bu durum» kapanmanın erken gerçekleşmesidir.

Gönderim sözcükleri ve aranan önceki bilgi

İfade	Önceki bağlamda aranacak unsur	Örnek ilişki
«bu rapor»	Daha önce tanıtılan belirli rapor	Raporun hazırlanması → bu raporun kullanımı
«ilki / ikincisi»	Sıralanmış en az iki öğe	İki yöntem → ilk yöntemin özelliği
«böylece»	Sonuca yol açan süreç veya koşul	Düzenleme → elde edilen kolaylık
«bu nedenle»	Nedeni açıklanmış durum	Gerekçe → karar
«söz konusu değişiklik»	Önceden belirtilmiş değişiklik	Değişimin tanıtımı → etkisi

6. Bağlaç ve geçiş ifadelerinin işaret ettiği düşünce ilişkisi

«Çünkü» çoğu zaman bir gerekçe sunar; «bu nedenle» bir nedenin sonucuna yönelir; «ancak» ve «oysa» beklentiye aykırılık ya da karşıtlık kurar; «ayrıca» mevcut düşünceye yeni bir bilgi ekler; «örneğin» genel bir ifadeyi somutlaştırır. Bu sözcükler cümleleri birbirine bağlasa da yalnız görünüşlerine bakarak tek bir diziliş kararı verilmez. Cümledeki düşüncelerin gerçekten neden, sonuç, karşıtlık veya örnek ilişkisi kurması gerekir.

«Yeni okuma salonunun kapasitesi artırıldı. Ancak salonun açılış saatleri değişmedi» cümlelerinde kapasite artışıyla saatlerin sabit kalması iki farklı özelliğin karşılaştırılmasıdır. «Salonun açılış saatleri değişmedi. Bu nedenle kapasitesi artırıldı» denmesi, saatlerin değişmemesini kapasite artışının nedeni gibi gösterir; böyle bir bağlantı metinde açıklanmıyorsa zayıftır. Aynı sözcükler, anlamlı bir ilişki kurmadan yan yana getirildiğinde paragraf tutarlı hâle gelmez.

Geçiş ifadelerinin yaygın anlam görevleri

İfade	İlişki türü	Metinde aranacak dayanak
Çünkü / zira	Gerekçe	Açıklanacak önceki yargı
Bu yüzden / dolayısıyla	Sonuç	Sonucu doğuran önceki bilgi
Ancak / buna karşın	Karşıtlık veya sınırlama	Karşı çıkılan ya da sınırlandırılan beklenti
Örneğin / söz gelimi	Örneklendirme	Önce açıklanan genel özellik
Ayrıca / bunun yanında	Ekleme	Aynı konuya ait önceki bilgi
Öte yandan	Yeni boyut veya karşılaştırma	İlk açıdan farklı bir bakış
Sonuç olarak	Birleştirme	Önceki yargıların desteklediği ortak değerlendirme

7. Zaman sırası, olay sırası ve anlatım sırası

Anlatısal ve süreç açıklayan paragraflarda zaman, cümlelerin bağlanmasına yardımcı olur. «Önce, ardından, daha sonra, ertesi gün, aynı sırada, sonunda» gibi ifadeler olayların başlangıç ve devamını belirtebilir. «Öğleden önce yapılan ölçümler kaydedildi. Ardından ölçümler karşılaştırıldı. Sonuçlar daha sonra rapora işlendi» anlatımında kaydetme, karşılaştırma ve raporlama aşamaları açık bir sırayla verilir. Ancak burada söz edilen işlemlerin her süreçte zorunlu olarak bu sırayla yapılacağına ilişkin bir genelleme yoktur; yalnız bu özgün örneğin akışı anlatılmıştır.

Her metinde anlatım sırası, olayların gerçekleşme sırasıyla aynı olmak zorunda değildir. «Raporun yayımlandığı gün herkes rahatlamıştı. Oysa üç hafta önce gerekli verilerin tamamı henüz toplanmamıştı» ifadesinde ikinci cümle daha eski bir olaya döner. Bu geri dönüş, metnin zaman bakımından hatalı olduğu anlamına gelmez. Okur, «üç hafta önce» işaretinin olayın değil anlatımın geriye çevrildiğini görmelidir. Dolayısıyla sıralama, yalnız takvimsel doğruluğa değil, yazarın olayları hangi amaçla sunduğuna da dayanır.

8. Neden–sonuç ve amaç–araç bağlantısıyla sıralama

Bir gerekçeyi belirten cümle ile bu gerekçeden doğan kararı ifade eden cümle çoğu kez yan yana gelir. «Bölgedeki eski yön tabelaları geceleri yeterince görünmüyordu. Bu nedenle yansıtıcı yüzeyli yeni tabelalar yerleştirildi» sıralamasında sorundan çözüme ilerlenir. «Yansıtıcı yüzeyli yeni tabelalar yerleştirildi. Çünkü eski tabelalar geceleri yeterince görünmüyordu» biçimi de doğaldır; bu kez önce karar açıklanıp ardından gerekçesi verilir. Tek doğru yöntem «neden her zaman önce gelir» değildir. Bağlaç, hangi yönde okunması gerektiğini açıklar.

Amaç ilişkisi de süreç düzeniyle karıştırılmamalıdır. «Yolcuların aktarma noktalarını daha rahat bulabilmesi için istasyon haritaları yenilendi» cümlesinde haritanın yenilenmesi araç, daha rahat bulabilme amaçtır. «Yolcuların tamamı aktarma noktalarını buldu» sonucu ise metinde yoktur. Tamamlama yaparken amaç bildiren bir cümleyi gerçekleşmiş sonuç diye sunmak, hem anlam hem zaman uyumunu bozar.

9. Paragrafı tamamlamak: Boşluğun işlevini belirleme

Bir paragraftaki eksik cümle başlangıçta, ortada veya sonda olabilir. Bu konumlar farklı denetim gerektirir. Başta eksik kalan cümle, devamında tanıtılan unsurlar için ortak bir çerçeve kurmalıdır. Ortadaki boşluk, hem önceki hem sonraki cümleyle ilişki kurmalıdır. Sondaki boşluk ise önceki düşüncelerin devamını veya ulaştığı değerlendirmeyi taşımalıdır. Aynı cümle, anlamı uygun görünse bile yanlış konumda kullanıldığında kopukluk yaratabilir.

Özgün bir metnin ortası eksik olsun: «Bir ilçe kütüphanesi, araştırma koleksiyonunu kullanıcıların görüşlerine göre yeniden sınıflandırdı. [EKSİK CÜMLE] Bu sayede okuyucular aradıkları başlıklara daha kısa sürede ulaşmaya başladı.» Boşluğu «Yeni sınıflandırmada benzer konular aynı raflarda toplandı ve raf etiketleri yenilendi» cümlesiyle tamamlamak doğal bir bağ kurar. Çünkü ilk cümledeki sınıflandırmanın nasıl yapıldığı açıklanır; son cümledeki «bu sayede» sözünün dayanağı görünür hâle gelir. «Kütüphaneler sessiz çalışmaya uygundur» cümlesi konu çevresine yakın olsa bile sonucun doğuşunu açıklamadığı için aynı işlevi karşılamaz.

Boşluk konumuna göre değerlendirme

Konum	Asıl işlev	Kritik denetim
İlk cümle	Tanıtım ya da ortak çerçeve kurma	Ardındaki gönderimler açıklanıyor mu?
Ara cümle	İki düşünceyi bağlama	Önceki ve sonraki cümle birlikte anlamlı mı?
Son cümle	Gelişmeyi sonuçlandırma veya doğal sürdürme	Yeni ve dayanaksız bir ana iddia getiriyor mu?

10. Başlangıcı eksik paragrafta izlenecek anlam yönü

Başlangıcı çıkarılmış bir metinde sonraki cümlelerin hangi kavramı açtığına bakılır. «Bu yerlerin günlük kullanımını kolaylaştırmak için basit yönlendirmeler de eklendi. Böylece ilk kez gelen ziyaretçiler farklı hizmet noktalarını daha rahat bulabildi» devamında «bu yerler» sözünün karşılığının girişte verilmiş olması beklenir. «Hizmet binalarındaki danışma alanları yeniden düzenlendi» başlangıcı, hem «bu yerler»in yerini doldurur hem de yönlendirme eklemenin bağlamını hazırlar.

«Ziyaretçilerin tamamı memnun kaldı» gibi sonuç bildiren bir cümle başlangıç olarak seçildiğinde sonraki açıklamalarla bağlantı kurabilse bile kanıt sınırını aşar. Bir metnin devamını açıklayan başlangıç, yalnız aynı konuyu söylemekle değil, henüz tanıtılmamış öğelerin nereden çıktığını göstermesiyle güçlüdür. Bazı başlangıçlar bir yargı, bazıları ise kısa bir tanım veya gözlem olabilir; kesin biçim metnin türüne göre değişir.

11. Ortası eksik paragrafta iki yanlı bağ kurma

Ortadaki boşluğa yerleştirilecek cümle, tek başına güzel veya doğru olmasıyla yeterli değildir. Cümle, bir önceki bilgiyle ilerlemeli ve bir sonraki cümlenin dayanağını hazırlamalıdır. «Şehir arşivinde eski fotoğrafların bir bölümü dijital ortama aktarıldı. [EKSİK CÜMLE] Buna rağmen araştırmacıların bir kısmı özgün belgeleri incelemek için arşive gelmeye devam etti» metninde «Bu kayıtların bir bölümü arşivin internet sayfasından da görüntülenebilir hâle geldi» cümlesi bir ara bağlantı kurar. Dijital aktarma işleminin uzaktan erişim sağladığını gösterir; «buna rağmen» sözü de uzaktan erişim olanağına karşın bazı araştırmacıların özgün belgeleri yerinde incelemeyi sürdürdüğünü açıklar. Buna karşılık arşivin binasının kaç katlı olduğu, sonraki cümledeki karşıtlık için yeterli dayanak değildir.

İki yanlı denetim sırasında bağın tek bir kelimeye yaslanması da sakıncalıdır. Örneğin «fotoğraf» sözcüğünün boşluğa gelecek cümlede bulunması anlam bütünlüğü kurmak için zorunlu değildir; «dijital kayıtlar», «görsel belgeler» gibi eşdeğer kavramlar kullanılabilir. Önemli olan her cümlenin işlevinin birbirini tamamlamasıdır.

12. Sonu eksik paragrafta sonuç yargısı ve yeni bilgi sınırı

Son cümle bazen açık bir değerlendirme yapar, bazen anlatılan olayın ulaştığı aşamayı bildirir, bazen de metnin ana düşüncesini başka sözlerle güçlendirir. «Çalışma alanına bitişik dinlenme bölümünde aydınlatma yenilendi. Kullanıcılar özellikle akşam saatlerinde alanın daha rahat kullanıldığını ifade etti. [EKSİK CÜMLE]» örneğinde «Bu örnek, küçük mekânsal düzenlemelerin kullanım deneyimiyle ilişkili olabileceğini gösterir» son cümlesi önceki gözlemi ihtiyatla birleştirir. Ancak «Aydınlatma düzenlemeleri bütün çalışma alanlarında verimliliği kesin olarak artırır» yargısı tek bir örnekten evrensel sonuca geçer ve metnin dayanağını aşar.

Bir başka özgün anlatımda «Otobüs gelmeyince yolcular farklı güzergâhları araştırdı. Bir kısmı yürüyerek yakın istasyona yöneldi. [EKSİK CÜMLE]» boşluğu «Diğerleri ise sonraki seferi beklemeyi tercih etti» biçiminde tamamlanabilir. Burada kapanış genel değerlendirme değil, başlatılan olayın farklı tepkilerini tamamlayan bir devamdır. Bu nedenle sonuç cümlesinin her zaman öğüt, öneri veya ders içermesi gerekmez.

13. Sıralamada giriş adayını ve cümle çiftlerini bulma

Karışık cümlelerden paragraf oluştururken ilk aşamada bağımsız başlangıç adayları belirlenir. Sonra birbirine güçlü biçimde bağlı cümle çiftleri saptanır. «Küçük yerleşimlerde ortak kullanım alanları sosyal ilişkileri destekleyebilir» cümlesi bir giriş adayıdır. «Bu alanlarda düzenlenen açık etkinlikler farklı yaş gruplarını bir araya getirir» cümlesindeki «bu alanlar» ise ilk cümleyle güçlü bir bağ kurar. «Böyle karşılaşmalar, komşuların birbirini tanımasına da katkıda bulunabilir» cümlesindeki «böyle karşılaşmalar» önceki etkinliklerin yarattığı temasa gönderme yapar. Cümleler, yalnız konudan değil, tanıtım–örneklendirme–olası etki düzeninden dolayı birbirini izler.

Giriş adayıyla devamın tek bir noktada buluşması yeterli değildir. Bir cümle «sonuç olarak» diye başlıyorsa destekleyen düşüncelerin daha önce gelip gelmediği; «örneğin» diye başlıyorsa örneklenen genel düşüncenin bulunup bulunmadığı; «ikinci olarak» diyorsa ilk unsurun gerçekten tanıtılıp tanıtılmadığı kontrol edilir. Bu ilişkiler farklı sıraya yerleştirildiğinde anlamın neden zayıfladığının açıklanabilmesi, sıralama kararının temel gerekçesidir.

14. Cümle çiftleri ve zorunlu komşuluk sınırı

Bazı iki cümle arasında açık bir gönderim bulunur: «İki öneri gündeme geldi» cümlesinin ardından «Birincisi parkın girişini genişletmek, ikincisi yönlendirme tabelalarını yenilemekti» cümlesi doğal biçimde gelir. Bununla birlikte bu iki cümle mutlaka aralarında başka bir açıklama bulunmadan yan yana olmak zorunda değildir. Uzun bir metinde «iki öneri» ifadesi ile ayrıntılar arasına bir geçiş cümlesi yerleştirilebilir. Kısa paragraf düzenlemelerinde yakın komşuluk genellikle güçlü ipucu olsa da mantıksal zorunluluk ile yazınsal tercih ayrılmalıdır.

«Bu karar» ifadesi bazen hemen önceki cümleye, bazen birkaç cümle önce anlatılan bir karara gönderme yapar. Dolayısıyla yalnız zamirin en yakın isme bağlanması her zaman doğru değildir. Önce hangi kararın niteliklerinin sonraki cümleyle uyumlu olduğu incelenir. Metin bütününde özne, zaman ve kapsam korunmuyorsa yüzeyde yakın görünen cümleler de yanlış eşleşebilir.

15. Birleşik örnek: Dört cümlenin mantıksal sıralaması

Aşağıdaki dört cümle, konuyu ve çözümü adım adım kurmak için özgün olarak hazırlanmıştır; numaralar sunum kolaylığı içindir, alıştırma değildir. (I) «Böylece kullanıcılar aradıkları dosyaları daha az işlemle bulmaya başladı.» (II) «Daha önce kayıtlara yalnız tarih üzerinden ulaşılabiliyordu.» (III) «Bir belge merkezinde araştırmacıların arama güçlüğü yaşadığı fark edildi.» (IV) «Bu güçlüğü azaltmak için belgeler konu başlıklarıyla da etiketlendi.»

Mantıksal düzen III–II–IV–I biçiminde kurulabilir. III genel sorunu tanıtır. II, sorunun nedenlerinden biri olabilecek eski arama düzenini açıklar. IV'teki «bu güçlüğü» ifadesi III'teki soruna gönderme yapar; konu başlığı etiketlerinin eklenmesi II'de açıklanan sınırlamaya karşılık gelir. I'in «böylece» sözü ise IV'teki düzenlemenin sonucunu belirtir. III–IV–II–I dizilişinde eski sistem bilgisi yeni düzenlemenin ardından verildiği için anlatımın açıklama çizgisi zayıflar; buna rağmen mutlaka anlamsız olduğu ileri sürülmez. Verilen dört cümlenin bilgilendirici, sorundan çözüme ve sonuca ilerleyen en açık düzeni III–II–IV–I'dir.

Belge merkezi örneğinde cümle görevleri

Cümle	İşlev	Önceki veya sonraki cümleyle bağ
III	Sorunu tanıtma	Konu ve temel durum ilk kez belirlenir
II	Sorunun bağlamını açıklama	Eski sistemin sınırı gösterilir
IV	Müdahaleyi anlatma	«Bu güçlük» önceki soruna bağlanır
I	Etkiyi ifade etme	«Böylece» yeni etiketlemenin sonucudur

16. Karşılaştırma metinlerinde sıralama ve geçiş

Karşılaştırma paragrafında önce karşılaştırılan iki öğe tanıtılabilir; sonra ortak ve farklı yönleri verilir. «Kâğıt üzerinde tutulan toplantı notları, elle yapılan açıklamaların izini koruyabilir. Dijital notlar ise aynı belgeye farklı yerlerden ulaşma olanağı sağlayabilir. Ancak her iki yöntemin kullanışlılığı kayıtların nasıl düzenlendiğine bağlıdır» anlatımında son cümle karşılaştırmayı dengeler. «İse» bağlacı tek başına farklı öğenin ne olduğunu açıklamaz; ikinci öğe ilkine göre konumlanır.

Bazen «öte yandan» olumlu ve olumsuz tarafları değil, aynı konuya ilişkin iki ayrı boyutu bağlar. «Bir parkta ağaçlandırma gölge oluşturur. Öte yandan oturma alanlarının konumu, gölgeden kimlerin yararlanabileceğini belirler» örneğinde iki bilgi birbirine karşı çıkmaktan çok aynı tasarımın farklı öğelerini gösterir. Tamamlama sırasında otomatik olarak bir çelişki aramak bu anlamı bozabilir.

17. Tanımlama, açıklama ve örneklemenin uygun düzeni

Bir terimin anlamını bilmeyen okuyucu için önce tanım, ardından özellik ve örnek sunulması açıklamayı kolaylaştırır. «Erişim süresi, bir bilgiye ulaşmak için harcanan zaman aralığıdır. Arama menüsünün açık olması erişim süresini etkileyebilir. Örneğin konu başlıklarının yanlış etiketlenmesi aynı belgenin bulunmasını geciktirebilir» paragrafı tanım–etken–örnek biçimindedir. Son cümledeki «örneğin» yalnız bir olay anlatmaz; bir önceki cümlenin genel yargısını somutlaştırır.

Tersine, bir metin önce gözlemle başlayıp terimi daha sonra tanımlayabilir: «Bir çalışan, on gün önce kolayca bulabildiği dosyayı bu kez uzun süre aradı. Dosyanın yerinin değişmesi arama için gereken süreyi artırmıştı. Bilgiye ulaşmak için harcanan bu zaman, erişim süresi olarak adlandırılır.» Bu düzen de açıklayıcıdır; çünkü son cümle önceki olaydan hareketle kavramı tanımlar. Sıralama değerlendirmesinde yalnız öğretim kitaplarına özgü bir şablon değil, somut cümleler arasındaki gerçek ilişki aranır.

18. Metin içindeki zaman, kişi ve anlatım bakış açısının tutarlılığı

Paragraf tamamlanırken anlam dışında anlatımın kime ait olduğu ve hangi zamanda kurulduğu da korunmalıdır. «Geçen hafta kent arşivini ziyaret ettim. İncelediğim belgelerin bir bölümünü not aldım» cümlelerinde anlatıcı birinci tekil kişidir ve geçmiş bir deneyimi anlatır. Ardından gelecek «Bu notları daha sonra karşılaştırmak istiyorum» cümlesi aynı anlatıcının geleceğe yönelik niyetini aktarabilir. «Ziyaretçiler belgelerini karşılaştırdı ve hepsi aynı sonuca vardı» cümlesi ise hem özneyi değiştirir hem de metinde belirtilmeyen ortak sonuç iddiası ekler.

Zaman değişikliği her zaman hata değildir. Geçmiş olaydan bugünkü değerlendirmeye geçilmesi doğal olabilir: «Geçen yıl mahallede bir okuma etkinliği düzenlendi. Bu etkinlik bugün de sürdürülen bir buluşma geleneğinin başlangıcı oldu.» İlk olay geçmişte, ikinci yargı geçmişin bugüne uzanan sonucudur. Önemli olan zaman sıçramasının mantıksal bir açıklamasının bulunmasıdır.

Tamamlama ve sıralamada tutarlılık denetimleri

Boyut	Korunacak ilişki	Tipik sapma
Konu	Aynı temel çerçeve	Yalnız ortak bir kelime yüzünden başka konuya geçmek
Kişi	Anlatıcı ve sözün sahibi	Ben anlatımından habersizce herkes yargısına geçmek
Zaman	Olay ve anlatım zamanının bağı	Planı tamamlanmış iş gibi sunmak
Kapsam	Bazı, çoğu, tümü gibi sınırlar	Tekil gözlemi evrensel sonuca genişletmek
Nedensellik	Gerekçe ve sonucun gerçek bağı	Ardışık iki olayı zorunlu neden–sonuç sanmak
Üslup	Metnin açıklayıcı, anlatısal veya tartışmacı amacı	Yeni ve ilgisiz bir değerlendirme eklemek

19. Cümlelerin yüzeyde benzer olması ile gerçek anlam bağı

Yalnız aynı sözcüğün yinelenmesine göre cümle seçmek yanlış sonuçlar üretebilir. «Yerel tarih çalışmaları eski haritalardan yararlanır» cümlesinin ardından «Haritalar okullarda coğrafya öğretimi için de kullanılabilir» denmesi sözcük bakımından yakınlık kurar; ancak anlatımın yerel tarih çalışmasındaki belgelerin kullanımına odaklanacağı belirtilmişse yeni cümle başka bir amaç açar. Buna karşılık «Bu haritalar, yerleşim adlarının zaman içindeki değişimini izlemeye yardımcı olur» cümlesi, önceki çalışmanın neden haritalardan yararlandığını açıklar. İkinci bağlantı daha güçlüdür.

Aynı biçimde iki cümlenin zıt sözcükler içermesi mutlaka karşılaştırma ilişkisi kurduklarını göstermez. «Eski binanın dış cephesi yenilendi» ile «Yeni çalışanlar eğitime katıldı» cümlelerinde «eski» ve «yeni» karşıtlığı vardır, ancak ortak bir karşılaştırma ekseni yoktur. Metin bütünlüğü için kavramların benzemesi değil, yargıların aynı açıklama düzeninde birbirine görev vermesi gerekir.

20. Bütünleşik örnek: Ortadaki boşluğu tamamlamak ve metni sıralamak

Aşağıdaki özgün metin, aynı konu çevresinde eksik cümle ve sıralamanın nasıl incelendiğini göstermek için hazırlanmıştır: «Bir belediye kültür merkezinde düzenlenen söyleşilerin kayıtları uzun süre yalnız etkinlik tarihine göre saklanıyordu. Araştırmacılar belirli bir konuşmacının bütün söyleşilerine ulaşmak istediğinde tek tek tarih aramak zorunda kalıyordu. [EKSİK CÜMLE] Sonraki aylarda kayıtların konuşmacı adıyla da aranabilmesi, tekrar eden araştırma işlemlerini azalttı.»

Bu metnin başlangıcında eski kayıt sistemi, ikinci cümlede bu sistemin yol açtığı güçlük tanıtılır. Son cümle ise bir değişikliğin ardından arama kolaylığı doğduğunu gösterir. Aradaki eksik halkayı «Bu güçlüğü gidermek için kayıt sistemine konuşmacı adı üzerinden arama özelliği eklendi» cümlesi tamamlar. Cümlenin başındaki «bu güçlüğü» ikinci cümleye, sonundaki yeni özellik ise son cümlenin açıklayacağı faydaya bağlanır. «Kültür merkezinde zaman zaman sergiler de açılıyordu» cümlesi doğru olabilecek bir ek bilgi olsa bile ne eski arama güçlüğünü ne sonraki kolaylığı birbirine bağlar.

Aynı dört cümle ayrı ayrı sıralanacak olsaydı kültür merkezindeki önceki düzen giriş, araştırmacının karşılaştığı güçlük gelişmenin ilk adımı, arama özelliğinin eklenmesi çözüm adımı, kolaylığın sağlanması sonuç olurdu. Olayların açıklanan sırası ile cümleler arasındaki gönderimler aynı düzeni destekler. Bu örnekte «araştırma işlemleri azaldı» ifadesi, daha fazla kişinin kültür merkezini ziyaret ettiğine veya etkinlik sayısının arttığına ilişkin bir bilgi sağlamaz; metin tamamlama da dayanağı olmayan bir başarı iddiasına dönüşmemelidir.

Kültür merkezi metnindeki dört düşünce halkası

Aşama	İçerik	Önceki veya sonraki aşamayla ilişkisi
1	Tarihe göre saklanan kayıtlar	Eski sistemi tanıtır
2	Araştırmacının tek tek tarih araması	Sistemin doğurduğu güçlüğü gösterir
3	Konuşmacı adına göre arama eklenmesi	Güçlükten çözüm adımına geçer
4	Tekrar eden işlemlerin azalması	Çözümün sınırlı ve belirtilmiş sonucudur

21. Birden fazla makul diziliş ile en güçlü dizilişi ayırma

Doğal dilde birbirinden farklı cümle düzenleri aynı olayı tutarlı biçimde anlatabilir. «Atölyeler için başvuru dönemi başladı» cümlesi ilk verildiğinde süreç tanıtılır; «Başvuruların bu yıl çevrim içi alınacağı duyuruldu» cümlesi de başta kullanılarak duyuruya odaklanan başka bir paragraf kurulabilir. Eğer sonraki cümleler «bu duyuru» veya «bu başvuru yöntemi» gibi açık gönderimler taşımıyorsa bu iki başlangıçtan yalnız birini zorunlu kabul etmek için metin yeterli olmayabilir. Bir sıralamanın «en doğal» olması ile başka bütün dizilişlerin mantıksal olarak imkânsız olması ayrı değerlendirmelerdir.

Bu ayrım sınav düzeyindeki anlam çözümlemesi için önemlidir. Kesin sıralama için cümleleri birbirine bağlayan yeterince güçlü işaretler gerekir. Bir metnin okunuşunda birkaç geçerli düzen bulunması, doğru anlam ilişkilerinin yanlış olduğu anlamına gelmez; sadece eldeki verinin tek bir sırayı zorunlu kılmadığını gösterebilir. Bu nedenle öğretici örneklerde tercih edilen dizilişin hangi gerekçelerle daha açık olduğu, alternatiflerin hangi nedenle zayıfladığı belirtilmelidir. Yalnız «böyle okunması güzel» düşüncesi yeterli bir çözüm değildir.

Sıralamada kesinlik sınırı Gönderimler, zaman işaretleri ve neden–sonuç bağları bir sırayı güçlü biçimde destekleyebilir; buna rağmen bazı bağımsız cümle grupları birden çok tutarlı düzene izin verebilir. Böyle durumlarda tek dizilişin zorunlu olduğu iddia edilmez. Paragraf tamamlamada ise konu benzerliği kadar boşluğun iki yanındaki anlam bağı da denetlenir.

22. Bütün metni yeniden okuma ve sonraki konuyla bağlantı

Paragraf tamamlandıktan ya da sıralandıktan sonra yalnız seçilen cümlenin çevresini okumak yeterli değildir. Başlangıçtaki konu ile sondaki değerlendirme aynı çerçevede mi kalıyor? Zamirlerin her birinin açık karşılığı var mı? Zaman ve kişiler anlamlı biçimde devam ediyor mu? «Ancak», «bu nedenle» ve «örneğin» gibi bağlaçların öncesi gerçekten gereken ilişkiyi taşıyor mu? Metnin toplamında gereksiz bir yineleme veya ani yön değişimi oluşuyor mu? Bu sorular, yerleştirilen cümlelerin bütün metinle uyumunu gösterir.

Paragraf tamamlama ve sıralama, cümlelerin birbirine nasıl bağlandığını öğretir; bu beceri GY-06.06'da incelenecek anlatım akışını bozan cümleyi belirleme çalışmasının da temelini oluşturur. Bir metni doğru sıralayabilmek, aynı zamanda bir cümlenin neden uygun yerde bulunmadığını açıklamaya yardımcı olur. Bununla birlikte burada amaç cümleleri ezberlenmiş bağlaç kurallarına göre taşımak değil, metnin düşünce yolunu gerekçeli biçimde yeniden kurmaktır.

KONU 6.6

ANLATIMIN AKIŞI VE AKIŞI BOZAN CÜMLE

Bir paragraf, aynı konuya değinen rastgele cümlelerin yan yana getirilmesiyle değil, belirli bir düşüncenin adım adım geliştirilmesiyle oluşur. Okuyucu önce hangi durumdan söz edildiğini öğrenir, ardından bu duruma ilişkin gerekçeleri, örnekleri, karşılaştırmaları veya sonuçları izler. Cümlelerden biri bu gelişmeye katkıda bulunmadığında anlatımın akışı kesilebilir. Akışı bozan cümleyi belirlemek, o cümlenin tek başına doğru veya yanlış olduğunu araştırmaktan çok, bulunduğu metinde hangi görevi üstlendiğini incelemeyi gerektirir.

Bu konu, GY-06.05'te işlenen cümlelerin yerini belirleme ve paragraf tamamlama becerisine dayanır; ancak burada temel işlem yeni bir sıra kurmak değil, mevcut bütünlüğün hangi noktada ve ne sebeple zayıfladığını açıklamaktır. Akışın korunması için konu, işlenen yön, mantıksal ilişki, gönderim ve anlatım amacı birlikte değerlendirilir.

1. Anlatımın akışı: Konu sürekliliği ile düşüncenin ilerlemesi

Anlatımın akışı, bir cümlenin kendisinden önceki bilgiyle anlamlı bağ kurması ve sonrakine uygun bir zemin hazırlamasıdır. Bir paragrafta bütün cümlelerin aynı sözcüğü kullanması gerekmez. Örneğin «Kent arşivindeki belgeler dijital ortama aktarıldı. Bu işlem, hassas belgelerin daha az elle tutulmasını sağladı. Böylece bazı belgelerin fiziksel olarak yıpranma riski azaltıldı» metninde «dijital ortam», «işlem» ve «yıpranma riski» farklı kavramlardır; fakat ikinci cümle ilkinde yapılan işlemin etkisini, üçüncü cümle de bu etkinin sonucunu açıklar.

Akış yalnız konunun değişmemesi değildir. Aynı konu içinde düşüncenin hangi açıdan ilerlediği de belirleyicidir. Metin, belgelerin korunma yöntemlerini anlatıyorsa arşivin bulunduğu binanın mimari geçmişine ilişkin bir bilgi, kendi başına ilginç olsa bile o paragrafın açıklama hattını kesebilir. Buna karşılık koruma yönteminin binadaki nem koşullarıyla ilişkisini anlatan bir cümle, yeni bir ayrıntı getirse bile mevcut düşünceyi ilerletir.

Anlatım akışını kuran üç düzey

Düzey	Okunan cümlede aranan özellik	Kontrol örneği
Konu sürekliliği	Aynı temel olgu veya durumla ilgili olma	Arşivdeki belgelerin korunmasından söz edilmeyi sürdürme
İşlenen yön	Konunun paragrafta ele alınan boyutunu geliştirme	Dijitalleştirmenin korumaya katkısını açıklama
Mantıksal bağ	Önceki ve sonraki cümleyle anlam ilişkisi kurma	İşlemden etkisine, etkiden sonucuna ilerleme

2. Konu ortaklığı neden tek başına yeterli değildir?

Bir metinde «müze» sözcüğünün geçmesi, müzeye ilişkin her cümlenin aynı paragrafta bulunabileceği anlamına gelmez. «Müzedeki eserlerin açıklama levhaları sadeleştirildi. Ziyaretçiler artık temel bilgilere daha kısa metinlerle ulaşabiliyor. Böylece eserleri incelemek için ayrılan süre daha verimli kullanılabiliyor» dizisi, levhaların anlaşılabilirliğini ele alır. «Müzenin ilk binası geçen yüzyılın başında inşa edilmişti» cümlesi de müzeyle ilgilidir ama levhaların sadeleştirilmesinin etkisini açıklamaz. Bu nedenle aynı bağlamda akışı bozabilir.

Buna karşılık ilk cümle «Müzenin farklı dönemlerde kullandığı binalar, koleksiyonun sergilenme biçimini değiştirdi» olsaydı binanın tarihi, eserlerin sunuluşuna ilişkin gerekçe veya arka plan oluşturabilirdi. Demek ki bir cümle, sözlük anlamındaki konu başlığına göre değil, içinde bulunduğu paragrafın sınırlı odağına göre değerlendirilir. Akış incelemesinde önce genel konuyu, sonra yazarın o konunun hangi yönünü anlattığını belirlemek gerekir.

3. Düşünce halkaları ve bir cümlenin işlevi

Bilgilendirici bir paragrafta cümleler genellikle tanıtma, neden açıklama, örnek verme, karşılaştırma, sonuç bildirme veya sınırlama işlevlerinden birini üstlenir. «Mahalledeki ortak çalışma alanı hafta sonları daha yoğun kullanılıyor. Çünkü hafta içi çalışan bazı kişiler bu alana yalnız tatil günlerinde gelebiliyor. Bu yoğunluk nedeniyle hafta sonu için ek oturma alanı oluşturulması planlanıyor» metninde ilk cümle gözlemi verir, ikinci cümle olası nedeni açıklar, üçüncü cümle planı belirtir. Sonuncusundaki «planlanıyor» sözü, uygulamanın gerçekleştiği anlamına gelmez.

«Ortak çalışma alanının duvarlarında yerel sanatçıların eserleri sergileniyor» bilgisi mekân hakkında doğru olabilecek bir ayrıntıdır. Fakat örneğin odağı hafta sonu yoğunluğu ve buna verilen karşılıksa bu cümle, yoğunluğun nedenini, ölçüsünü ya da çözümünü geliştirmediği için düşünce zincirinden ayrılır. Akışın bozulduğu yer, yalnız kelimelerin değiştiği yer değil, cümlenin artık açıklanan gelişmeye hizmet etmediği noktadır.

Cümle işlevleri ve akışa katkısı

İşlev	Akışta yaptığı iş	Uygunluk denetimi
Tanıtma	Konuyu ve temel durumu açar	Sonraki cümleler aynı durumu geliştirebilir mi?
Gerekçelendirme	Önceki yargının nedenini açıklar	Söylenen gerekçe gerçekten önceki yargıyla ilgili mi?
Örneklendirme	Genel bilgiyi somutlaştırır	Örnek aynı özellik için mi verilmiş?
Karşılaştırma	İki öğeyi ortak ölçüte göre ilişkilendirir	Karşılaştırmanın ekseni değişmiş mi?
Sonuç	Önceki bilgiye dayanan etkiyi ifade eder	Sonuç metnin desteklediğinden daha geniş mi?
Sınırlama	Önceki yargının geçerlilik alanını belirtir	Sınırlama önceki savı gerçekten mi etkiliyor?

4. Akışı bozan cümleyi saptamada metnin odağını belirlemek

Bir paragrafın odağı, konusunun daha dar ve işlenişe bağlı biçimidir. «Kent içindeki bisiklet yollarının güvenli kullanımı» odağı, genel «bisiklet» konusundan farklıdır. Metin kavşak düzeni, görüş mesafesi ve yol işaretlerini anlatırken bisiklet üretiminin tarihsel gelişimini aktaran cümle geniş konuya bağlıdır ama dar odağı geliştirmez. Bu ayrımı yapmadan yalnız anahtar sözcükleri izlemek, ilgisiz cümleyi fark etmeyi güçleştirir.

Odağı belirlemek için paragrafın ilk cümlesine bakmak yararlıdır; ancak ilk cümle her zaman tek başına yeterli olmaz. Yazar önce geniş bir gözlem sunup sonraki cümlelerde belirli bir alt konuya yoğunlaşabilir. Örneğin «Kütüphaneler farklı amaçlarla kullanılır» sözünü «Sessiz çalışma alanlarının düzenlenmesi özellikle ortak mekânlarda önemlidir» cümlesi izliyorsa paragrafın gerçekte geliştireceği yön sessiz çalışma düzeni olabilir. Aday cümlelerin bu gelişmeyle ilişkisi, tüm metnin okunmasıyla anlaşılır.

5. Önceki ve sonraki cümleyle çift yönlü denetim

Ortada bulunan bir cümlenin uygunluğu hem öncesiyle hem de sonrasıyla sınanmalıdır. «Yerel arşivdeki fotoğrafların büyük bölümü tarihsizdi. Arşiv görevlileri görüntülerdeki yapıların kayıtlarını karşılaştırarak yaklaşık dönemleri belirlemeye çalıştı. Bu yöntem, fotoğrafların tarihsel bağlama yerleştirilmesine yardımcı oldu» metninde ikinci cümle soruna yönelik işlemi, üçüncü cümle onun katkısını verir. Birinci ile üçüncü cümle arasında anlam köprüsü kuran ikinci cümle çıkarılırsa yöntem belirtilmeden sonuca geçilir.

Bu üçlünün arasına «Kentteki bazı sokaklar uzun yıllar içinde isim değiştirdi» cümlesi yerleştirildiğinde, fotoğraflar üzerindeki tarih belirleme çalışmasıyla doğrudan bir ilişki gösterilmiyorsa yeni bilgi akışı keser. Ancak paragraf sokak isimlerinden tarih belirleme yöntemini ayrıca anlatmış olsaydı aynı cümle dayanak kazanabilirdi. İki yönlü denetimde aday cümlenin çevresinden kopuk oluşuna ve çıkarıldığında kalan cümlelerin daha tutarlı birleşip birleşmediğine bakılır.

> **Akışı bozma ile bağlamın eksikliği arasındaki ayrım** Bir cümlenin önceki veya sonraki cümleyle ilişkisi ilk okumada açık değilse bu durum tek başına onun akışı bozduğunu kanıtlamaz. Gönderim birkaç cümle öncesine uzanabilir; açıklayıcı bir ara bilgi daha sonra kullanılabilir. Çıkarma kararı için bütün paragrafta işlev ve bağlam denetimi gereklidir.

6. Cümleyi çıkardıktan sonra kalan metni yeniden okuma

Akışı bozan cümleyle ilgili güçlü bir kontrol, o cümle olmadan paragrafın nasıl ilerlediğini incelemektir. «Kent bostanında yağmur suyunu biriktirmek için depolar kuruldu. Depolarda toplanan su, kurak günlerde bitkilerin sulanmasında kullanıldı. Bostanın girişinde geçen yıl bir kitap değişim dolabı da açıldı. Böylece şebeke suyuna olan ihtiyaç belirli dönemlerde azaldı» örneğinde üçüncü cümle çıkarıldığında depolama, kullanım ve su ihtiyacındaki azalma mantıklı bir zincir oluşturur. Kitap değişim dolabı bostanla aynı yerde olsa da bu zincirin parçası değildir.

Burada metnin su kullanımındaki azalmayı yalnız yağmur suyu depolarına bağladığı dikkate alınmalıdır; örnek gerçek bir belediye verisi olarak sunulmamıştır. Ayrıca çıkarma denetimi tek başına mekanik bir kural değildir. Bazı ayrıntılar çıkarıldığında da metin okunabilir; bu durum her ayrıntının gereksiz olduğunu göstermez. Asıl ölçüt, aday cümlenin paragrafın düşüncesine özgül katkıda bulunup bulunmadığıdır.

Çıkarma denetiminin örneklenmesi

Cümle	Paragraftaki görevi	Çıkarıldığında ne olur?
Yağmur suyu depoları kuruldu	Yöntemi tanıtır	Sonraki kullanımın kaynağı belirsizleşir
Depodaki su sulamada kullanıldı	Uygulamayı açıklar	Depolama ile su tasarrufu arasında ara bağ eksilir
Kitap değişim dolabı açıldı	Aynı mekâna ait ayrı faaliyet	Su yönetimine ilişkin zincir daha açık hâle gelir
Şebeke suyu ihtiyacı azaldı	Sınırlı sonucu belirtir	Uygulamanın etkisi anlatılmaz

7. Ortak kelime tuzağı: Sözcük benzerliği ile anlam bütünlüğü

Bir paragrafta «ağaç» sözcüğünün birkaç kez geçmesi, ağaçlara ilişkin bütün bilgilerin aynı akışı taşıdığı anlamına gelmez. «Kentin ana caddesine dikilen ağaçların köklerine yeterli alan bırakıldı. Böylece kök gelişiminin kaldırım kaplamasına verebileceği zarar azaltılmaya çalışıldı. Ağaçların gövde çapı, bazı türlerde yaş tahmini için de kullanılabilir. Yeni düzenlemede kök çevresine su geçirgen malzeme yerleştirildi» metninde üçüncü cümle ağaçlarla ilgilidir; fakat caddenin kök alanı tasarımından yaş tahminine geçer. Son cümle yeniden kök çevresindeki düzenlemeye döner.

Öte yandan «Ağaçların köklerinin gelişebileceği boşluk bırakılmadığında kaldırım yüzeyinde bozulmalar görülebilir» cümlesi de ağaç kelimesini kullanır fakat ilk iki cümlenin nedenini açıklar; akışı bozmaz. Yani anahtar sözcükler, incelemeye başlangıç sağlayabilir ama karar için yeterli kanıt değildir.

8. Yakın konudan farklı boyuta ani geçiş

Akışı bozan bilgi bazen bütünüyle ilgisiz bir olaydan değil, konunun komşu bir boyutundan gelir. «Bir kamuya açık binada yönlendirme tabelaları daha okunaklı biçimde yenilendi. Yazıların boyutu ve kontrastı, uzaktan okunabilmelerini kolaylaştıracak şekilde düzenlendi. Binanın ısıtma sistemi de yıl içinde yenilenmişti. Yeni tabelaların koridor girişlerinde aynı yükseklikte yer almasına özen gösterildi» örneğinde üçüncü cümle aynı binaya ilişkin başka bir iyileştirmeyi bildirir. Oysa geri kalan cümleler tabelaların okunabilirliği ve konumuyla ilgilidir.

Buradaki ayrım, genel konu ile paragrafın amacı arasındadır. Yazarın amacı «binada gerçekleştirilen yenilemeleri saymak» olsaydı ısıtma sistemi bilgisi uyumlu olabilirdi. Ama anlatım tabela tasarımının erişilebilirliğini ele aldığında ısıtma sistemi ayrıntısı gelişmeyi saptırır. Cümlenin doğruluğu, mekân ortaklığı veya olumlu bir gelişmeyi anlatması onun bulunduğu paragrafta uygun olduğu anlamına gelmez.

9. Örneğin odaktan kopması ve genelleme sınırı

Örnekleme cümlesi, kendisinden önce belirtilen genel yargıyı somutlaştırmalıdır. «Küçük işletmelerde belge arama süresini azaltmak için dosyalama adlarının tutarlı seçilmesi önemlidir. Örneğin aynı tür belgelerin her ay farklı adla kaydedilmesi aramayı zorlaştırabilir. Adlandırmada ortak bir düzen kurulması bu güçlüğü azaltabilir» dizisinde örnek ile açıklama aynı işlevi paylaşır. «Örneğin bazı işletmeler müşteri görüşmelerini çevrim içi yapar» cümlesi ise «örneğin» sözcüğü taşısa da tutarlı dosya adları iddiasını örneklemez.

Bir örneğin paragrafın odağını bozması, örneğin hayatın içinde gerçekleşemeyecek olması demek değildir. Uygun örnek kendi bağlamında doğru olabilecek bilgidir; fakat açıklanması gereken özelliği karşılamadığında işlevsizleşir. Benzer biçimde tek bir örnekten «bütün kurumlarda aynı sonuç ortaya çıkar» şeklinde bir genelleme yapmak, metnin desteklediğinden geniş bir yargı ekleyerek akışı zayıflatabilir.

Örnek cümlesi değerlendirilirken aranan ilişki

Ana yargı	Somutlaştıran cümle	Konu yakınlığına rağmen kopuk cümle
Tutarlı dosya adı aramayı kolaylaştırır	Aynı tür belgelerin aynı adlandırma düzeniyle tutulması	Görüşmelerin çevrim içi yapılması
Okunaklı tabela yön bulmayı destekler	Büyük ve yeterli kontrastlı yazıların kullanılması	Binanın ısıtmasının yenilenmesi
Kök çevresindeki boşluk kaplamayı korumaya yardım eder	Kök gelişimine uygun geçirgen yüzey bırakılması	Gövde çapından yaş tahmini yapılması

10. Bağlaçlar akışı destekler; fakat otomatik doğruluk sağlamaz

«Bu nedenle», «ancak», «örneğin», «öte yandan», «buna karşılık» gibi ifadeler, iki düşünce arasındaki beklenen bağı gösterir. Fakat bağlaç bulundu diye bağlantının gerçekleştiği kabul edilmemelidir. «Arşiv belgelerinin bir kısmı nemden zarar görmüştü. Bu nedenle dijital kayıtların yedeklenmesi için yeni bir klasör açıldı» dizisinde ikinci cümle bir sonuç bildiriyor görünse de nemden zarar gören fiziksel belgeler ile dijital kayıtların yedekleme klasörü arasında gerekçe kurulmamıştır. Ek bilgi olmadan «bu nedenle» bağı zayıftır.

Buna karşılık «Arşiv belgelerinin bir kısmı nemden zarar görmüştü. Bu nedenle belgelerin saklandığı odanın nem düzeyi düzenli izlenmeye başlandı» dizisi neden ve alınan önlem arasında açık ilişki kurar. Bağlacın adı değil, önündeki bilgiyle ardındaki işlemin gerçekten ilişki taşıması önemlidir. Aynı değerlendirme «buna rağmen» ve «oysa» gibi karşıtlık ifadeleri için de geçerlidir: karşıtlık bekleyen sözcüğün iki yanında karşılaştırılabilir yargılar bulunmalıdır.

11. Karşıt görüş akışı neden her zaman bozmaz?

Anlatımın akışındaki düşünceler mutlaka birbirini onaylamak zorunda değildir. Tartışmacı bir metinde karşıt görüşün verilmesi, sonradan bunun değerlendirilmesi için gerekli olabilir. «Uzaktan çalışma düzeninin yolculuk süresini ortadan kaldırdığı söylenir. Ancak bazı işler fiziksel araç ve mekân gerektirdiğinden bu model her görev için uygulanabilir değildir. Bu nedenle çalışma biçimi belirlenirken işin niteliği göz önünde tutulmalıdır» örneğinde ikinci cümle ilk görüşün kapsamını sınırlar; konu değişmez.

«Ancak» sözcüğünü izleyen cümle, uzaktan çalışma yerine kentteki trafik ışıklarının yenilenmesine geçseydi karşıtlık yalnız görünüşte kalırdı. Dolayısıyla birbirine zıt cümleler aynı tartışmanın iki yüzünü oluşturabilir. Uygunluk denetiminde metnin tartıştığı sorunla yeni cümlenin cevap verdiği sorun karşılaştırılır.

12. Gönderim ve referansın kopması

«Bu karar», «söz konusu değişiklik», «bunlar», «o yöntem» gibi ifadeler metnin önceki bölümünde bir karşılık gerektirir. «Kütüphanede ödünç alma süresi uzatıldı. Bu değişiklik, kitapların okuyucularda daha uzun kalmasına olanak tanıdı» dizisinde «bu değişiklik» sözünün karşılığı nettir. Buna «Yeni rafların yüksekliği de değiştirildi» cümlesi araya girerse «bu değişiklik» sözünün hangi işlemle ilgili olduğu belirsizleşebilir. Bağlamın kopması, bazen cümlenin konudan ayrılmasından çok gönderimin yanlış bir öğeye bağlanmasından kaynaklanır.

Gönderimin en yakın cümleye bağlanması zorunlu değildir. «Kütüphane eski kitapların bir bölümünü onardı. Çalışma sırasında bazı ciltler uzman desteği gerektirdi. Bu onarım, kitapların kullanılabilirliğini artırdı» metninde son cümledeki «bu onarım», ilk iki cümlenin ortak işlemine gönderme yapar. Araya ayrıntı girmesi tek başına akış bozukluğu oluşturmaz; gönderimin bağlam içindeki karşılığının anlaşılır olması gerekir.

Gönderimlerin akış içindeki kullanımı

Gönderim türü	Doğal kullanım	Dikkat edilmesi gereken sınır
Bu karar	Önceden belirtilen karara bağlanır	Karar henüz anlatılmamış olabilir
Söz konusu yöntem	Açıklanmış yönteme işaret eder	Birden çok yöntem varsa belirsizlik doğabilir
Bunlar	Önceki çoğul öğeleri karşılar	Tekil öğeye yanlış bağlanabilir
Böylece	Önceki süreçten sonuca geçer	Açıklanmayan sonucu kendiliğinden kanıtlamaz
Buna rağmen	Önceki beklentiye aykırı veya onu sınırlayan durumu açar	Gerçek karşıtlık yoksa yalnız biçimsel bağ kurar

13. Zaman sırası, anlatıcının tercihi ve gereksiz zaman sıçraması

Anlatısal metinlerde olayların sırası önemlidir; fakat bütün metinlerin kronolojik sırayla yazılması gerekmez. «Sabah erkenden kent meydanına vardım. Bir gün önceki görüşmeyi düşünürken eski arkadaşımı kalabalığın içinde fark ettim. Onunla son kez yıllar önce aynı okulda karşılaşmıştık» metnindeki son cümle geçmişe döner. Bu dönüş, karşılaşmanın anlamını derinleştirdiği için akışı bozmaz. Bilinçli geri dönüş, anlatının içinde işlev görebilir.

Buna karşılık «Meydandaki taş döşemenin yenilenmesi geçen ay bitmişti» cümlesi aynı mekânla ilgili olsa da anlatıcının karşılaşmasına ve hatırlayışına bağlanmıyorsa bir yan bilgi olarak kalabilir. Zaman değişikliğine değil, değişikliğin anlatıdaki nedenine bakılmalıdır. Bugünkü olaydan geçmişteki sebebe, anıdan bugünkü etkiye veya geleceğe yönelik niyete geçiş bağlamla açıklandığında akış korunabilir.

14. Anlatıcı, bakış açısı ve metin türü

Paragrafın anlatıcı düzeni de bütünlüğün parçasıdır. «Bir belgesel için kasabanın eski fotoğraflarını inceledim. Fotoğraflardaki sokakları bugünkü haritayla karşılaştırdım. Bu karşılaştırma, bazı yapıların yerinin değiştiğini fark etmemi sağladı» metni birinci kişi gözlemiyle ilerler. Ardından «Bütün araştırmacılar fotoğrafların aynı şeyi kanıtladığını kabul eder» cümlesi gelirse hem anlatıcı konumundan doğrulanmamış genel iddiaya geçilir hem de olayın sınırı aşılır.

Bununla birlikte birinci kişiden genel açıklamaya geçmek her durumda yanlış değildir. «Bu deneyim bana görsel belgelerin karşılaştırmalı incelenmesinin önemini gösterdi» cümlesi, kişisel gözlemden ölçülü bir değerlendirmeye ulaşır. Bilgilendirici, tartışmacı ve anlatısal metinlerde beklenen cümle görevleri farklı olabilir; uygunluk, her metne tek kalıp uygulayarak değil, anlatım amacını belirleyerek denetlenir.

15. Tutarsız nicelik ve kapsam değişikliklerinin akışa etkisi

Bir metin bir koşulu veya sınırlı bir grubu anlatırken sonraki cümlede daha geniş bir gruba ilişkin kanıtsız yargı kurulması, akışın bilgi bakımından tutarlılığını zayıflatır. «Yenilenen okuma salonunun hafta içi sabah oturumlarına katılan bazı ziyaretçiler sessiz ortamdan memnun kaldı» cümlesini «Dolayısıyla bütün ziyaretçiler salonun her saatte sessiz olduğunu düşünüyor» yargısı izleyemez. «Bazı» sözcüğü bütün ziyaretçileri kapsamaz; sabah oturumları da bütün saatleri temsil etmez.

Buna karşılık «Bu geri bildirim, sabah oturumlarında sessizliğin olumlu karşılandığını gösterir; diğer zamanlar için ayrıca değerlendirme gerekir» cümlesi gözlemin kapsamını korur. Akışı bozan cümlenin mutlaka konu dışına çıkması gerekmez; bazen yanlış genelleme ya da önceki bilgiyle bağdaşmayan kesinlik, düşüncenin devamını bozabilir. Ancak yalnız daha iddialı bir yargı olması tek başına karar için yeterli değildir; yazarın onu ayrıca gerekçelendirip gerekçelendirmediğine bakılır.

Aynı konu içindeki kapsam uyumu

İlk cümledeki sınır	Uyumlu devam	Dayanaksız genişleme
Bazı sabah ziyaretçileri	Bu gruptan gelen geri bildirim	Bütün ziyaretçiler ve bütün saatler
Pilot uygulama yapılan iki şube	Bu iki şubede gözlenen sonuç	Kurumun bütün şubelerinde aynı sonuç
Bir hafta süren gözlem	Gözlenen haftaya ilişkin değerlendirme	Yıl boyunca değişmeyecek sonuç
Planlanan düzenleme	Düzenlemenin amaçlanan etkisi	Düzenlemenin kesin biçimde tamamlandığı savı

16. Aynı paragrafta ayrıntı mı, sapma mı?

Paragraftaki her cümle doğrudan ana düşünceyi yeniden söylemek zorunda değildir. Bir ayrıntı, ilerideki bilgiyi anlamak için gerekli arka planı sunabilir. «Küçük bir araştırma merkezinde eski ses kayıtları dinlenemiyordu. Çünkü kayıtları açan cihazın uygun parçaları artık kolay bulunmuyordu. Bu nedenle merkez, kayıtların başka bir biçime aktarılması için teknik destek aradı» örneğinde cihazın parçalarına ilişkin ayrıntı metnin ana düşüncesini tekrar etmez; ancak aktarma ihtiyacının nedenini açıklar.

Aynı paragrafta «Merkezin yakınındaki otobüs durağı geçen ay yenilendi» cümlesi bulunursa bu bilgi araştırma merkezinin çevresine ilişkin bir ayrıntıdır fakat teknik sorun ve çözüm arayışıyla bağlantısı gösterilmemiştir. Akış denetimi aşırı sadeleştirme ile karıştırılmamalıdır: gerekçe, örnek, istisna ve sınırlama gibi görevli ayrıntılar korunurken yalnız başka bir açıklama yönüne sapan cümle ayıklanır.

17. Tek bir cümleyi ayıklama ile paragrafı ikiye bölme

Bazen bir metnin ortasında tek başına kalan cümle çıkarıldığında bütünlük kurulur. Bazen de ilk birkaç cümle bir düşünceyi, sonraki birkaç cümle yeni bir düşünceyi birlikte geliştirir. İkinci durumda mesele tek cümleyi ayıklamak değil, paragraf sınırını belirlemektir. «Kentteki eski çeşmelerin kitabeleri temizlendi. Yazıların daha rahat okunabilmesi için aydınlatma düzenlendi. Çeşmelerin çevresindeki yönlendirmeler yenilendi. Kent meydanındaki haftalık sergi ise farklı yaş gruplarını bir araya getiriyor. Sergideki atölyeler yerel sanatçılar tarafından yürütülüyor» örneğinde ilk üç cümle çeşmelerin erişilebilirliği, son iki cümle meydandaki serginin işleyişi hakkında tutarlı iki küme oluşturur.

Burada dördüncü cümleyi tek başına çıkarmak sorunu çözmez; çünkü beşinci cümle de sergi hakkındadır ve dördüncüye dayanır. Daha doğal çözüm, dördüncü cümleyle yeni bir paragraf açılmasıdır. Bu iki işlemde kullanılan dikkat ortaktır: düşünce yönünün nerede değiştiğini görmek. Fakat sonuç farklıdır: tek akıştan kopuk bir cümle ayıklanabilir; kendi içinde gelişen yeni düşünce bir paragrafın başlangıcı olabilir.

Üç farklı bütünlük sorununun ayrımı

Durum	Belirti	Uygun değerlendirme
Akışı bozan cümle	Öncesi ve sonrası aynı çizgide, aradaki cümle ayrı yönde	Cümle çıkarıldığında ana zincir güçlenir
Paragrafı ikiye bölme	Bir noktadan sonra birden fazla cümle yeni odağı geliştirir	Yeni düşüncenin başladığı yerde paragraf sınırı aranır
Cümle yerinin yanlış olması	Cümle metne katkı sunar ama bulunduğu yerde gönderimi veya sıra ilişkisi zayıftır	Çıkarma yerine uygun yere taşıma değerlendirilir

18. Yanlış yere konmuş cümle ile ilgisiz cümle arasındaki fark

«Bir topluluk bahçesinde toprak örnekleri incelendi. İnceleme sonuçları gönüllülerle paylaşıldı. Örnekler alınmadan önce bahçenin farklı köşeleri işaretlenmişti. Böylece sonraki ölçümlerde aynı noktalar yeniden bulunabildi» metnindeki üçüncü cümle geriye dönük bir bilgi veriyor olabilir; bilgi bütünüyle ilgisiz değildir. İkinci ve üçüncü cümlelerin yer değiştirmesi, hazırlık–inceleme–paylaşım zincirini daha açık hâle getirebilir. Son cümledeki «böylece» ifadesinin hangi işleme bağlandığı ise ayrıca denetlenmelidir: işaretleme tekrar ölçüm noktalarını bulmayı kolaylaştırır, inceleme sonuçlarını paylaşma değildir.

Cümle çıkarma çözümü, açıklamanın önemli bir halkasını kaybettirebilir. Akışı inceleyen okuyucu, önce cümlenin ana konuyla bağına bakmalı; bağlı fakat konumu zayıfsa yer değiştirme olasılığını düşünmelidir. Bu ayrım bir sorunun açıkça «akışı bozan cümle» mi yoksa «yeri değiştirilmesi gereken cümle» mi istediğine göre daha da önem kazanır.

19. İlk cümle ve son cümlenin özel denetimi

Akışı bozan cümle mutlaka paragrafın ortasında bulunmaz. Başlangıç cümlesi ilgisiz bir çerçeve açıyorsa sonrakiler onun dışında tutarlı bir odak oluşturabilir. «Kent meydanının çevresinde çok sayıda kafe bulunur. Yeni yaya geçidinde görme güçlüğü yaşayan kişiler için hissedilebilir yüzeyler yerleştirildi. Geçidin sesli uyarı sistemi de yenilendi. Bu düzenlemeler geçişin daha anlaşılır olmasını amaçlıyor» metninde ilk cümle, sonraki üç cümlenin yaya erişilebilirliği odağına hizmet etmez. İlk cümleyi çıkarmak paragrafın başlamasını engellemez; ikinci cümle konuyu bağımsız biçimde tanıtır.

Son cümle de konu dışına çıkabilir. «Bir arşiv sergisinde belgelerin açıklamaları güncellendi. Eski terimler, anlamı korunarak güncel dille açıklandı. Böylece ziyaretçilerin belge içeriğini anlaması kolaylaştırılmak istendi. Kentteki yaz şenliklerinin tarihi ise her yıl farklı belirlenir» dizisinde son bilgi arşiv sergisinin açıklamalarına bağlanmaz. Fakat kapanışta yeni bir boyuta kısa geçiş yapılmasının her durumda yanlış olduğu sanılmamalıdır: yazar yeni boyutla ilişki kurar ve sonraki paragraf için anlamlı bir köprü oluşturursa geçiş işlev kazanabilir.

20. Bilgilendirici metinde yöntem, gerekçe ve sonuç akışı

Aşağıdaki özgün metin, teknik bir uygulamanın açıklanmasında akışın nasıl sınanacağını gösterir: «(I) Kent arşivindeki ses kayıtlarının bir kısmı eski saklama biçimi nedeniyle dinlenemiyordu. (II) Kayıtları korumak için uyumlu donanımlarla yeni dijital kopyalar oluşturulmaya başlandı. (III) Arşivin bulunduğu sokakta tarihî yapıların bakımına da devam ediliyordu. (IV) Bu işlem, kayıtların içeriğinin yeni araçlarla dinlenebilmesini amaçlıyordu. (V) Böylece arşiv görevlileri eski kayıtları araştırmacılara daha erişilebilir biçimde sunmayı hedefledi.»

Burada I sorunu, II başlatılan yöntemi, IV yöntemin amacını, V ise kurumsal hedefi belirtir. III aynı çevrede yürütülen başka bir bakım faaliyetidir; ses kayıtlarıyla doğrudan ilişki kurulmamıştır. III çıkarıldığında II'deki «dijital kopyalar oluşturulması» ile IV'teki «bu işlem» doğal biçimde birleşir. Metin sonucunda kayıtların

tümünün başarıyla dijitalleştirildiği iddia edilmez; «başlandı», «amaçlıyordu» ve «hedefledi» sözcükleri mevcut bilgi sınırını korur. Bu örnekte akışı bozma kararı hem odak hem gönderim hem de fiil kiplerinin anlattığı gerçekleşme durumu bakımından desteklenir.

Ses kayıtları örneğinde akışın gerekçesi

Cümle	Odaktaki işlev	Bütünlük değerlendirmesi
I	Dinlenemeyen kayıt sorununu tanıtır	Uyumlu
II	Dijital kopya oluşturma yöntemini açıklar	Uyumlu
III	Yakındaki tarihî yapı bakımını anlatır	Ses kaydı sürecinden ayrılır
IV	II'deki işlemin amacını açıklar	III çıkarıldığında gönderimi belirginleşir
V	Amaçlanan erişilebilirliği ifade eder	Önceki yöntem ve hedefle bağlantılıdır

21. Tartışmacı metinde karşı görüş ve değerlendirme zinciri

Tartışmacı bir metinde yazar bazen kendi savının karşısındaki düşünceye de yer verir. «(I) Kısa bilgilendirme metinlerinin her durumda uzun açıklamalardan daha etkili olduğu ileri sürülebilir. (II) Oysa karmaşık bir işlemi anlatırken yalnız başlıkları sıralamak okuyucunun önemli koşulları kaçırmasına yol açabilir. (III) Bu nedenle metnin uzunluğu, aktarılacak bilginin niteliğine göre belirlenmelidir. (IV) Bazı kütüphaneler okur buluşmalarını hafta sonunda gerçekleştirir» dizisinde ilk üç cümle kısa ve uzun açıklama arasındaki tercihi tartışır. IV'te kütüphane etkinliklerinin zamanına geçilir; savın gerekçesine veya sınırına katkı sunmaz.

Burada II'nin karşı görüş bildirmesi akışı bozmaz. Tam tersine III'teki ölçülü sonucun anlaşılması için II gereklidir. Akış incelemesinde «oysa», «ancak», «bununla birlikte» gibi sözcükler taşıyan her cümleyi şüpheli görmek yerine hangi önceki savı ele aldıkları, o savı destekleyip desteklemedikleri veya sınırlandırıp sınırlandırmadıkları araştırılır.

22. Anlatısal metinde olayın odağından kopma

Olay anlatımında akışın dayanağı yalnız zaman değil, anlatıcının izlediği temel olay veya duygu çizgisidir. «(I) Eski öğretmenimin notlarını bulmak için yıllar sonra okulun kütüphanesine gittim. (II) Görevli, aradığım defterlerin ayrı bir dolaba kaldırıldığını söyledi. (III) Okulun bahçesindeki ağaçların türleri yıllar içinde değişmişti. (IV) Dolabın önüne vardığımda öğretmenimin el yazısını taşıyan etiketi gördüm. (V) Bu küçük ayrıntı, aradığım defterlere ulaşmadan önce bile geçmişteki sınıf günlerini hatırlattı» anlatımında III, okulun geçmişiyle bağlantılı görünür; ancak aranan defterler ve el yazısının uyandırdığı hatıra çizgisini geliştirmez.

Üçüncü cümle «Bahçeden içeri girerken değişen ağaçları görmek, yıllar sonra geri döndüğümü daha belirgin hissettirdi» biçiminde olsaydı anlatıcının hatırlayışını güçlendiren bir geçiş olabilirdi. Başka bir deyişle aynı çevre ayrıntısı, anlatıcı üzerindeki etkisi gösterildiğinde işlev kazanabilir. Anlatısal akışta tasvirlerin otomatik olarak gereksiz sayılmaması bu yüzden önemlidir.

23. Bütünleşik örnek: Üst üste iki bağımsız ölçütle denetim

Özgün örnek: «(I) Bir kültür merkezinde düzenlenen söyleşilerin ses kayıtları uzun süre yalnız etkinlik tarihine göre arşivlendi. (II) Belirli bir konuşmacının bütün söyleşilerini bulmak isteyenler çok sayıda kaydı tek tek incelemek zorunda kalıyordu. (III) Merkezin konferans salonundaki koltukların kumaşları geçen yıl değiştirildi. (IV) Bu güçlüğü azaltmak için kayıtlar konuşmacı adlarıyla da etiketlendi. (V) Yeni etiketleme, konuşmacıya göre kayıt taramayı daha doğrudan hâle getirdi.»

Birinci ölçüt, metnin odağıdır: kayıtları konuşmacı adına göre bulma güçlüğü ve bunu azaltmaya yönelik düzenleme. I eski sistemi, II güçlüğü, IV çözümü, V çözümün etkisini anlatır. III ise mekândaki ayrı bir tadilatı belirtir. İkinci ölçüt, yerel gönderimdir: IV'teki «bu güçlük» II'deki arama sorununu karşılar. III çıkarılınca II–IV bağlantısı doğrudan görünür. Buna rağmen III'ün yalnız «kültür merkezi» sözcüğü dolayısıyla uyumlu sayılamayacağı anlaşılır.

Örnekteki kurum, uygulama ve sonuçlar öğretim amacıyla kurgulanmıştır; gerçek bir kurumun kayıt sistemi hakkında veri değildir. Ayrıca V'in «daha doğrudan hâle getirdi» ifadesi, bütün kullanıcıların aradıklarını mutlaka bulduğu anlamına gelmez. Akış incelemesinde odakla ilişki kurma kadar eklenen kesinlik ve kapsamın korunması da önem taşır.

Kültür merkezi örneğinde iki aşamalı akış denetimi

Adım	Denetlenen ölçüt	Gözlenen ilişki
1	Konu ve işlenen yön	Arşiv kayıtlarını konuşmacı adına göre bulma
2	Girişten soruna ilerleme	Tarihe göre kayıt → tek tek inceleme güçlüğü
3	Aday cümlenin odağı	Koltuk kumaşı, kayıtları bulma yöntemini geliştirmez
4	Çıkarma sonrası yerel bağ	«Bu güçlük» sözü doğrudan önceki arama zorluğuna bağlanır
5	Sonucun kapsamı	Yeni etiketleme kolaylık sağlar; mutlak başarı iddiası kurulmaz

24. Belirsiz durumlar ve tek bir doğruyu zorlamama

Her paragraf yalnız bir zorunlu düzende yazılmış değildir. Özellikle iyi gerekçelendirilmiş bir karşılaştırma, ara açıklama veya geçmişe dönüş ilk bakışta konu değişmiş gibi görünebilir. Metin yeterli bağlamı vermiyorsa iki cümlenin de çıkarılabilir görünmesi, örneğin iyi kurulmadığını gösterebilir. Böyle bir durumda yalnız «en farklı sözcüğü taşıyan cümle» seçilmemeli; adaylar karşılaştırılarak her birinin önceki ve sonraki cümlelere katkısı açıkça gerekçelendirilmelidir.

Bir akış bozukluğu değerlendirmesi, cümlenin kendisini mahkûm etmez. «Binanın merdivenlerinde onarım yapıldı» cümlesi bir paragrafta gereksiz, başka bir paragrafta erişilebilirlik önlemlerinin temel öğesi olabilir. Ayrıca akış bozukluğu ile anlatım bozukluğu aynı kavram değildir: dil bilgisi bakımından düzgün bir cümle paragrafta ilgisiz kalabilir; dil bilgisi bakımından sorunlu bir cümle de metnin konusunu sürdürüyor olabilir. Buradaki hedef yazım veya dil bilgisi hatası bulmak değil, düşüncenin sürekliliğini incelemektir.

25. Akışın son denetimi: Cümle çıkarıldıktan sonra bütünlük gerçekten artıyor mu?

Sağlam bir değerlendirmede önce paragrafın neyi ve hangi açıdan anlattığı belirlenir. Ardından her cümlenin açıklama içindeki görevi incelenir; özellikle odaktan uzaklaşan görünen cümlenin bir gerekçe, örnek, karşı görüş, istisna veya anlatısal arka plan sunup sunmadığı araştırılır. Cümlenin çıkarılması, önceki ve sonraki yargıyı daha uyumlu bir gelişme içinde birleştiriyorsa akışı bozma tespiti güçlenir. Çıkarma işleminden sonra gerekli bir gönderim veya gerekçe ortadan kalkıyorsa karar yeniden düşünülmelidir.

Akışı bozan cümleyi belirlemek, metni en kısa hâle getirmek demek değildir. Amaç, düşüncenin taşıyıcı halkalarını korurken ilgisiz yön değiştirmeyi ayırt edebilmektir. Bu yaklaşım hem açıklayıcı yazıları hem tartışmacı metinleri hem de anlatı parçalarını doğru değerlendirmeye yardım eder. Sonraki GY-06.07'de metnin tamamını yorumlama ve anlam bütünlüğünü daha geniş ölçekte değerlendirme işlenecektir.

KONU 6.7

METİN YORUMLAMA VE ANLAM BÜTÜNLÜĞÜ

Bir metni anlamak, içinde geçen sözcükleri ve cümleleri tek tek çözmekten daha geniş bir okuma etkinliğidir. Okuyucu bir yandan açıkça bildirilen bilgileri belirlerken öte yandan bunların birbirleriyle, anlatıcının veya yazarın bakış açısıyla ve metnin genel amacıyla kurduğu ilişkileri araştırır. Aynı cümle, ait olduğu bağlamdan koparıldığında bir uyarı, öneri ya da kesin hüküm gibi görünebilir; oysa metnin tamamında karşılaştırmanın yalnız bir yönünü veya bir kişinin görüşünü ifade ediyor olabilir. Bu nedenle yorum, cümlelerin sözcük anlamlarını, metnin bütünündeki işlevlerini ve yazarın koyduğu sınırları birlikte değerlendirme işidir.

Bu bölüm, önceki GY-06.01–GY-06.06 konularında öğrenilen sözcük ve cümle anlamı, ana düşünce, yardımcı düşünce, çıkarım, tamamlama ve akış bilgilerini bütün metin üzerinde birleştirir. Amaç, önceki yöntemleri ayrı ayrı yinelemek değil; birden çok paragrafın, farklı bakış açılarının, açık ve örtük iletilerin ve metnin kendi içindeki kanıtların nasıl bir arada yorumlanacağını göstermektir. Örneklerin tümü bu kitap için yazılmış öğretici metinlerdir; kurumlardan alınmış gerçek olay veya araştırma sonucu olarak değerlendirilmemelidir.

1. Metin yorumlamak ile metindeki bilgiyi aktarmak

Bilgiyi aktarma, metinde doğrudan verilen bir durumu anlamını değiştirmeden yeniden söylemektir. Yorumlama ise doğrudan verilen unsurları ilişkilendirerek onların metnin bütünü açısından ne ifade ettiğini açıklamaktır. Örneğin «İlçe kütüphanesinde hafta içi akşam saatlerinde yeni okuma oturumları düzenlenmeye başlandı. İlk haftalarda katılım beklenen düzeye ulaşmadı; görevliler oturum saatlerini değiştirmeden önce okurların ulaşım koşullarını araştırdı» metninde akşam oturumlarının başladığı ve başlangıçta katılımın düşük kaldığı doğrudan bilgidir. Düzenleyicilerin yalnız takvimi değiştirmek yerine erişim koşullarını anlamaya yöneldiği ise iki cümlenin birlikte okunmasıyla kurulan bir yorumdur.

Bu metinden «oturumların saati kesinlikle değiştirildi» sonucuna ulaşılamaz. Saat değiştirme kararından önce araştırma yapıldığı söylenmiştir; kararın alınıp alınmadığı belirtilmemiştir. Benzer biçimde düşük katılımın tek sebebinin ulaşım olduğu da kesin değildir. Yorumun gücü, metinden hareketle açıklanabilmesinde; sınırı ise metnin söylemediği bir sonucu zorunluymuş gibi sunmamasındadır.

Metin karşısında bilgi, yorum ve temelsiz yargı

Yargı türü	Dayanak	Okuma sırasında sınır
Doğrudan bilgi	Metinde açıkça söylenir	Kip ve nicelik değiştirilmez
Gerekçeli yorum	Birden çok ifade arasındaki ilişkiye dayanır	Metinle çelişmemeli ve kanıtı gösterilebilmelidir
Olası açıklama	Metinle uyumlu olabilir ancak kesinleşmez	Kesin olgu yerine olasılık olarak belirtilir
Dayanaksız ekleme	Metinde karşılığı bulunmaz	Yorum olarak kabul edilmez

2. Anlam bütünlüğünün üç düzeyi: Sözcük, cümle ve metin

Metin bütünlüğü tek bir kuralla açıklanmaz. Sözcük düzeyinde aynı kavram farklı adlarla anılabilir; cümle düzeyinde neden, koşul, karşıtlık ve örnek ilişkileri kurulabilir; metin düzeyinde ise birden çok paragraf ortak bir sorunu farklı yönlerden işler. Bu üç düzeyden biri göz ardı edildiğinde yanlış yorum ortaya çıkabilir. «Eserin korunması», «onarım», «özgün malzeme» sözleri aynı genel alana ait olduğu hâlde bir tarihi yapının korunmasında hangi yöntemin seçildiği ancak cümlelerin birlikte incelenmesiyle anlaşılır.

Özgün örnek: «Restorasyon ekibi, eski kapının yüzeyindeki boyayı tümüyle kaldırmayı önermedi. Boyanın bir bölümünün yapının kullanım geçmişini yansıttığı düşünüldü. Bunun yerine aşınmayı durduracak sınırlı bir koruma uygulaması planlandı.» İlk cümledeki olumsuz karar, ikinci cümlede gerekçelendirilir; üçüncü cümlede farklı bir çözüm belirtilir. Bütünün anlamı «kapı hiçbir müdahale görmeyecek» değildir; «geçmişin izlerini koruyacak ölçülü müdahale tercih ediliyor» biçiminde, cümlelerin tamamına dayanan bir yorumdur. «Planlandı» sözcüğü uygulamanın tamamlandığını bildirmez.

3. Metnin temel sorunu, bakış açısı ve iletisi

Bir metin tek bir başlık etrafında birleşse de yazarın hangi soruna dikkat çektiği, neyi önemli gördüğü ve okura hangi düşünceyi iletmek istediği birbirinden ayrı incelenebilir. «Çalışma ortamları» bir konu alanıdır; «sessizliğin herkese aynı ölçüde yarar sağlamaması» bu alan içinde işlenen belirli sorun olabilir. «Farklı görevlerin farklı çalışma koşulları gerektirdiği» ise metnin desteklediği temel yorum olabilir. Böylece konu, sorunun yönü ve ileti arasında genelden özele ilerleyen bir ilişki kurulur.

«Bir kurumda açık ofis düzeni iletişimi kolaylaştırdı, ancak ayrıntılı belge inceleyen çalışanlar sık kesintiler yaşadı. Çalışma alanları yeniden düzenlenirken yalnız görüş alışverişinin hızı değil, dikkat gerektiren görevlerin niteliği de gözetildi» metni tek bir düzeni koşulsuz övmez veya bütünüyle reddetmez. Yazarın bakış açısı, yöntemi görev bağlamında değerlendirmeye yöneliktir. Buradan «açık ofis bütün kurumlarda kaldırılmalıdır» gibi bir sonuç çıkarmak, metnin ölçülü tutumunu aşar.

4. Yazarın tutumunu sözcüklerden ve ilişkilerden belirleme

Tutum, yazarın konu karşısındaki düşünsel veya duygusal konumudur: destekleyici, eleştirel, ihtiyatlı, sorgulayıcı, iyimser, kaygılı ya da dengeli olabilir. Tek bir olumlu veya olumsuz sözcüğe bakılarak tutum belirlenemez. Yazar bir uygulamanın yararını kabul edip sınırını da gösterebilir; böyle bir metni salt övgü veya salt eleştiri olarak nitelemek eksiktir. Değerlendirmeyi taşıyan ifadeler genellikle «yalnızca», «buna karşın», «yeterli değil», «dikkate alınmalı» gibi anlamı daraltan veya tartan sözlerle görünür hâle gelir.

«Sayısallaştırma, eski gazetelere erişimi belirgin biçimde kolaylaştırıyor. Bununla birlikte belgelerin taranması, içeriklerinin doğru tanımlandığı anlamına gelmiyor; tarih, kaynak ve açıklama alanlarının ayrıca denetlenmesi gerekiyor» metninde yazar teknolojiyi reddetmez. Teknolojik kolaylığın içerik doğruluğunu kendiliğinden güvenceye almadığını vurgular. Tutumu, koşullu olumlu değerlendirme ve dikkat çağrısıdır. Bu sonuca yalnız ilk cümle okunarak varılamaz.

Metinde tutum ve onu destekleyen işaretler

Tutum	Metinsel işaret	Dikkat edilmesi gereken
Destekleyici	Gerekçelerle yararı ortaya koyma	Tek bir olumlu sözcük yeterli değildir
Eleştirel	Sınırlılık, eksiklik veya çelişkiyi gerekçelendirme	Her eleştiri bütünüyle reddetme değildir
İhtiyatlı	Koşul, olasılık ve doğrulama gereksinimini belirtme	Kesin kararla karıştırılmaz
Sorgulayıcı	Varsayımların dayanağını araştırma	Retorik sorular tek başına ret anlamına gelmez
Dengeli	Yarar ve sınırlılığı birlikte tartma	İki görüşü eşit ölçüde benimseme zorunluluğu yoktur

5. Açık ileti, örtük ileti ve okuyucunun eklediği düşünce

Açık ileti, metnin doğrudan ifade ettiği düşüncedir. Örtük ileti ise anlamın tüm sözcükleriyle yazılmadığı, ancak metindeki işaretlerin bir araya getirilmesiyle makul biçimde anlaşılabilen düşüncedir. Örtük iletinin bulunması serbest çağrışım yapmak değildir. «Toplantıdan sonra hazırlanan tutanağın yalnız kararları içermesi, farklı görüşlerin gerekçelerinin zamanla unutulmasına neden oldu. Yeni tutanak düzeninde tartışılan seçeneklerin kısa gerekçelerine de yer verildi» metni, kararın yanında gerekçelerin de kayıt için önemli olduğu düşüncesini destekler. Bu anlam, iki cümlenin ilişkisinden çıkarılır.

Buna karşılık «eski tutanaklar kasıtlı olarak eksik yazıldı» düşüncesi desteklenmez; yazar eksikliğin nedenini veya sorumluların niyetini açıklamamıştır. Örtük iletiyi yorumlarken güdü, kesin sebep veya başarı derecesi eklemek yaygın bir aşırılıktır. Yorumun metinle çelişmemesi tek başına yeterli değildir; metindeki bir veya birkaç ifadeyle olumlu biçimde desteklenmesi gerekir.

6. Bağlamın aynı ifadeye yüklediği farklı değerler

Bağlam, bir sözün çevresindeki cümleler, konuşma veya olay durumu ve metnin amaçladığı bütündür. «Bu karar erken alındı» ifadesi tek başına olumlu bir öngörüyü de aceleci davranışı da anlatabilir. «Olası arızalar büyümeden önlem alındı; bu karar erken alındı» cümlelerinde erkenlik, zamanında müdahale anlamı taşır. «Saha gözlemleri tamamlanmadan uygulama başlatıldı; bu karar erken alındı» örneğinde ise yeterince değerlendirme yapılmadan harekete geçme eleştirisi vardır.

Bağlamı dikkate almak, yazarın söylemediği kişisel hikâyeleri tasarlamak değildir. Anlamı belirlemeye yetecek yakın ifadeler incelenir; metnin türü, kullanılan karşılaştırmalar ve olayın gelişimi de değerlendirilir. Bir sözcüğün sözlükte çok sayıda anlamı bulunması, bütün anlamların aynı anda kastedildiği sonucunu doğurmaz. Metinde hangi anlamın işlevsel olduğu gösterilebilmelidir.

7. Olgusal içerikle değerlendirme cümlelerini ayırma

Yorumlamada nesnel veri, bir başkasına ait görüş ve yazarın değerlendirmesi aynı düzeyde kabul edilmemelidir. «Anketin 120 katılımcısından 78'i yeni saatleri uygun buldu» ifadesi, belirtilen anket için sayısal bir bildirimdir; bu bilgi tek başına tüm kullanıcıların memnun olduğunu göstermez. «Yeni saatler beklentileri büyük ölçüde karşıladı» ifadesi ise verinin kapsamına göre gerekçelendirilmesi gereken bir değerlendirmedir. «Bazı katılımcılar değişikliği yeterli bulmadı» cümlesi de ilk bildirimle çelişmez; 42 kişinin nasıl yanıt verdiği ayrıca belirtilmedikçe bu kişilerin tamamı hakkında hüküm kurulamaz.

«Yönetici, yeni düzenin iş yükünü azalttığını söyledi» cümlesi iş yükünün nesnel olarak azaldığına değil, yöneticinin böyle bir görüş bildirdiğine doğrudan kanıttır. «Araştırmaya göre», «tanığa göre», «yazarın savunduğu» gibi kaynak bildiren kalıplar, iddianın kim tarafından dile getirildiğini ayırır. Bu ayrım, kısa haber ve bilgilendirici metinleri yorumlarken özellikle önemlidir.

Metindeki bilginin kaynağı ve yoruma etkisi

Metindeki anlatım	Doğrudan doğrulanan	Doğrulanmayan
«Raporda 18 başvuru kaydedildi»	Raporda belirtilen sayı 18'dir	Diğer dönemlerdeki başvuru sayısı
«Görevli düzeni başarılı buldu»	Görevlinin değerlendirmesi	Düzenin herkes için başarılı olduğu
«İki yöntem de bazı koşullarda kullanılıyor»	Her iki yöntemin bazı kullanım alanları	Yöntemlerden birinin daima üstün olduğu
«Yeni uygulama denenebilir»	Bir olasılık veya öneri ifade edildiği	Uygulamanın kesin kararlaştırıldığı

8. Çok paragraflı metinde düşüncenin gelişme çizgisi

Birden çok paragraf içeren metinde her paragrafın kendine özgü işlevi bulunabilir. İlk paragraf bir sorunu tanıtır, ikinci paragraf bu sorunun nedenlerini ayırır, üçüncüsü iki yöntemi karşılaştırır, sonuncusu sınırları gözeten bir öneri geliştirir. Metnin genel anlamı, tek bir paragrafı diğerlerinin yerine koyarak belirlenemez. Bazen en çarpıcı örnek ikinci paragrafta bulunsa da yazarın son değerlendirmesi bütün düşünce çizgisini değiştirir.

Örneğin bir kurumun yazışmalarında kullanılan uzun açıklamalar ele alınsın. İlk paragrafta uzun metinlerin okunmasının zaman aldığı, ikinci paragrafta kısaltılan metinlerde önemli koşulların kaybolabildiği, üçüncü paragrafta ise metin uzunluğunun işin niteliğine göre ayarlanması gerektiği anlatılsın. Bütünün yorumu «uzun açıklamalar mutlaka kötüdür» de «kısa açıklamalar her zaman yetersizdir» de değildir. Metin, açıklama düzeyinin içerik karmaşıklığına göre belirlenmesini savunur. Paragraflar arasındaki sınırlayıcı ilişki, nihai anlamı kurar.

9. Paragraflar arasında görüşün değişmesi ve düşüncenin derinleşmesi

Bazı metinlerde ilk bölümde ileri sürülen genel kanaat sonraki bölümde daraltılır, yeniden tanımlanır veya kısmen geri alınır. Bu düzen kendi başına bir çelişki değildir. Yazarın başlangıçtaki savı tartışmaya açması ve yeni verilerle daha ölçülü sonuca ulaşması, düşüncenin gelişimini gösterir. «Başlangıçta çevrim içi başvuruların herkes için daha hızlı olacağını düşündük. Ancak farklı bağlantı koşulları ve destek gereksinimleri ortaya çıktı. Bu nedenle yüz yüze seçenekleri tümüyle kaldırmak yerine iki yolu birlikte geliştirmeye karar verdik» metni bir görüş değişimini anlatır.

İlk cümledeki beklenti, son cümlenin kalıcı ve koşulsuz görüşü gibi sunulamaz. Metnin ilerleyişi başlangıçtaki varsayımın sınırlandığını göstermektedir. «Ancak» ve «bu nedenle» burada metnin yüzeyindeki sözcük işaretlerinden çok, gerekçeli düşünsel dönüşün taşıyıcılarıdır. Önceki görüşle son görüş arasındaki farkı görmeyen okuma, metni olduğundan daha katı bir görüşe indirger.

10. Metnin amacı, hedef okuru ve türü

Metnin amacı bilgi vermek, bir görüşü gerekçelendirmek, deneyim aktarmak, okuru bir tehlikeye karşı uyarmak veya bir duyguyu duyumsatmak olabilir. Aynı konu farklı amaçlarla işlenebilir. Bir kent parkıyla ilgili teknik rapor bakım sürecinin aşamalarını açıklar; bir köşe yazısı kamusal alanın kullanımını tartışır; bir anı ise parkın yazarda uyandırdığı çocukluk duygusunu canlandırır. Bu üç metni yalnız «park anlatıyor» diyerek eşitlemek onların neden yazıldığını gözden kaçırır.

Hedef okur da anlatım biçimini etkiler. Kullanım kılavuzunda koşulların açıkça belirtilmesi gerekir; kişisel denemede ima ve çağrışım daha belirgin olabilir. Bununla birlikte tür tek başına kesin yargı üretmez: bir haber metninde değerlendirme, bir anıda doğrulanabilir bilgi bulunabilir. Metnin amacı, türü ve okura yönelen dil özellikleri birlikte değerlendirilmelidir. Özellikle anlatılan olayın gerçekliğini metnin anlatım biçiminden tek başına çıkarmak doğru değildir.

Metin türü ve yorumda öncelikli bağlar

Metin yaklaşımı	Öncelikli inceleme	Kaçınılacak aşırılık
Bilgilendirici	Tanım, koşul, süreç ve veri kaynağı	Öneriyi gerçekleşmiş olgu sayma
Tartışmacı	Sav, gerekçe, karşı görüş ve sonuç	Karşı görüşü yazarın kendi kararı gibi sunma
Anlatısal	Olay örgüsü, kişi, zaman ve bakış açısı	Anlatıcı ile gerçek yazarı özdeşleştirme
Betimleyici	Seçilen ayrıntı, odak ve çağrışım	Her ayrıntıdan zorunlu simgesel anlam üretme
Açıklayıcı-uyarıcı	Risk, koşul ve önerilen önlem	Olası riski kaçınılmaz sonuç sayma

11. İddia, gerekçe, örnek ve karşı görüşün ayrı işlevleri

Tartışmacı bir metin bir görüş ileri sürüp onu gerekçelerle destekleyebilir; gerektiğinde karşı görüşü aktararak o görüşün sınırını gösterebilir. «Dijital belgelerin aranabilir olması araştırmayı hızlandırabilir. Ne var ki hatalı etiketlenen dosyalar arama sonuçlarında görünmeyebilir. Bu yüzden tarama işlemine içerik denetimi de eşlik etmelidir» örneğinde sav, sayısal erişimin tek başına yeterli olmadığı; gerekçe, yanlış etiketli dosyaların bulunamama olasılığı; sonuç ise içerik denetimi önerisidir. İlk cümle yararı kabul ederken son cümle onu tamamlayıcı bir koşul getirir.

Metinde bir görüşün aktarılması onu yazarın benimsemesi anlamına gelmez. «Bazıları yalnız hızın belirleyici olduğunu savunuyor» cümlesini «yazar hızı tek ölçüt olarak görüyor» diye yorumlamak için ek dayanak gerekir. Kimin konuştuğu, hangi görüşün karşı çıkılmak üzere aktarıldığı ve hangi sonucun kabul edildiği cümleler arasındaki ilişkiden anlaşılır. Karşı görüşü silmek veya onunla yazarın görüşünü karıştırmak metnin tartışma düzenini bozar.

12. Anlatıcı, kişi bakış açısı ve yazarın gerçek görüşü

Öyküleyici metinlerde anlatıcı, olayları aktaran sestir. Bu ses birinci kişi ağzından konuşabilir veya başka kişilerin yaşantısını dışarıdan anlatabilir. Anlatıcıya ait «O gün bütün sokak bana yabancı gelmişti» düşüncesi, metindeki kişinin anlık deneyimini gösterir; metnin yazarının yaşadığı bir olayı belgelediği varsayılamaz. Anlatıcıdaki duygu, bilgi sınırı ve yorum hatası metnin anlamında bilinçli olarak kullanılabilir.

Özgün örnek: «Yıllardır görmediğim mahalleye döndüğümde bütün pencerelerin kapandığını sandım. Biraz yürüyünce akşamın erken saatinde bile ışıkların yandığı evleri fark ettim. Asıl değişen, mahalleden çok onu hatırlama biçimimdi.» İlk cümledeki genelleme, anlatıcının ilk izlenimidir; ikinci cümle onu sınırlar, üçüncü cümle öz değerlendirmeye dönüştürür. Metnin bütünü «mahalle bütünüyle terk edilmiştir» yargısını değil, hatıraların algıyı etkileyebileceği fikrini destekler. Burada «sandım» sözcüğünü atlamak anlamı tersine çevirebilir.

13. Anlatısal metinde zaman, olay ve dönüşüm

Bir anlatıda olayların gerçekleşme sırası ile anlatıcının bunları sunma sırası farklı olabilir. Geçmişe dönüş, olayın neden önemli olduğunu sonradan açıklamak için seçilebilir. Bu durumda kronolojik değişiklik, anlam bütünlüğünü kendiliğinden bozmaz. «Yeni evin anahtarını elime alınca bir yıl önce taşınmaktan neden çekindiğimi hatırladım. O dönemde her değişikliğin geçmişi sileceğine inanıyordum. Şimdi ise eski anıların yeni odalarda da benimle kaldığını görüyorum» örneğinde anımsama, şimdiki zamanla geçmiş deneyim arasındaki değerlendirmeyi kurar.

Bu metnin özündeki değişim, yalnız taşınma olayı değildir. Anlatıcı geçmişteki kayıp endişesini yeniden yorumlayarak farklı bir anlayışa ulaşmıştır. Buna rağmen bütün insanların taşınmayla ilgili aynı duyguları

yaşadığı sonucu çıkarılamaz. Anlatıyı yorumlamak, duygusal dönüşümü görmekle kişisel deneyimi evrensel gerçek olarak sunmamak arasında dikkatli bir denge gerektirir.

14. İmge, mecaz ve çağrışımın bağlamla sınanması

Edebî anlatımda bazı sözcükler yalnız nesnel karşılıklarını değil, bir duygu veya düşüncenin çağrışımını da taşır. «Çalışma masasının üstünde akşamın sessizliği birikmişti» cümlesi, sessizliğin fiziksel bir madde gibi yığıldığını anlatmaz; ortamın durağanlığını ve hissedilen zamanı yoğunlaştıran bir mecaz kurar. Bununla birlikte tek bir imgeye gelişigüzel semboller yüklemek doğru değildir. Aynı masa başka bir metinde düzeni, yalnızlığı, alışkanlığı veya geçmişe bağlılığı temsil edebilir; hangisinin geçerli olduğu çevre cümlelerince desteklenmelidir.

«Masadaki eski takvimi kaldırmadım; tarihler değişmiş olsa da birlikte çalıştığımız günlerden bir iz kalmasını istedim» cümlelerinde takvim, anlatıcının geçmişle ilişkisini gösteren bir nesneye dönüşür. Takvimin böyle yorumlanması, «iz kalmasını istedim» ifadesiyle desteklenir. Buna karşılık takvimi «gelecek korkusunun zorunlu simgesi» saymak metnin sunduğu bağı aşar. İmgesel okuma, açıklanabilir çağrışımı gözetir; keyfî simge üretimine dönüşmez.

Edebî metinde yorumun dayanakları

Öğe	Metinde aranacak işaret	Temkin noktası
Duygu	Anlatıcının tepkisi ve seçilen ayrıntılar	Tek sözcükten bütün duygu durumu kesinleşmez
İmge	Somut nesneyle soyut düşünce arasındaki bağ	Evrensel sembol varsayılmaz
Bakış açısı	Bilgiyi ve değerlendirmeyi kimin sunduğu	Anlatıcı doğrudan yazar değildir
Değişim	İlk izlenimle sonraki farkındalığın ilişkisi	İlk yargı son görüş sayılmaz
Örtük ileti	Olay ve ayrıntıların birlikte oluşturduğu anlam	Metin dışı niyet ve olay eklenmez

15. Metindeki kapsam: Bazı, çoğu, her, yalnız ve en az

Yorumda bir önermenin kapsamı, metindeki anlamı belirleyen unsurlar arasındadır. «Bazı katılımcılar ilk oturumu yeterli buldu» ifadesinden bütün katılımcıların aynı görüşte olduğu anlaşılamaz; «katılımcıların çoğu» denirse yarıdan fazlasına ilişkin bir değerlendirme yapılır. «Her birim kendi kayıt düzenini kullanıyordu» ifadesi ise metnin belirttiği küme içindeki bütün birimleri kapsar. Bu niceliklerin birbiri yerine kullanılması yazarın açıklamasını değiştirebilir.

«İncelemenin ilk aşamasında en az üç dosyanın tarih bilgisinin eksik olduğu görüldü» cümlesi üç veya daha fazla dosyayı kapsayan alt sınır bildirir; tam olarak üç dosya olduğu söylenmez. «Yalnız arşiv görevlileri ekrana erişebiliyordu» ifadesi erişimi kişiler bakımından sınırlandırır; arşiv görevlilerinin tamamının erişim yetkisi olduğu sonucunu tek başına vermez. «Ancak belirli koşullarda», «henüz», «kısmen», «çoğunlukla» gibi sözcükler, yorumu daha dar veya daha ihtiyatlı hâle getirir.

> **Kesinlik ve kapsam sınırı** Metnin «düşünüldü», «denendi», «planlandı», «katılımcıların bir bölümü» veya «en az» diye sınırladığı bilgi, yorumda «kanıtlandı», «tamamlandı», «herkes» veya «tam olarak» biçimine yükseltilmez. Anlam bütünlüğü yalnız konuyu korumak değil, bu sınırları da korumaktır.

16. Neden, amaç, ilişki ve birlikte görülmenin farkı

Bir metinde iki durum art arda anıldığında biri diğerinin nedeni olmak zorunda değildir. «Dijital katalog kullanımı arttı; aynı dönemde başvuru süresi kısaldı» ifadesi iki gelişmenin birlikte gerçekleştiğini bildirir. Başvuru süresinin azalmasına tek başına katalog kullanımının yol açtığı, başka etkenlerin bulunmadığı veya her başvurunun aynı hızda sonuçlandığı söylenemez. Yazar açıkça bir neden ilişkisi kuruyorsa bu ilişkinin dayanağı ve kapsamı ayrıca korunmalıdır.

«Başvuruların daha anlaşılır olması için açıklayıcı örnekler eklendi» cümlesi bir amacı bildirir; örneklerin gerçekten bütün başvuruları daha anlaşılır kıldığını kanıtlamaz. «Açıklayıcı örnekler eklendiği için ilk kez başvuranların hata oranı azaldı» ifadesi ise belirli bir neden ilişkisi ileri sürer; bu sav da belirtilen durumun dışına yayılmamalıdır. Yorumun doğruluğu, olayların hangisinin amaç, hangisinin gözlenen sonuç, hangisinin yazarın gerekçesi olduğunu ayırmasına bağlıdır.

17. Metin içindeki karşılaştırma ve ölçütün korunması

İki kişi, dönem, yöntem veya eser karşılaştırılıyorsa yorumda karşılaştırma ölçütü korunmalıdır. «A yönteminin kurulumu B yöntemine göre daha kısa sürdü, ancak B daha az bakım gerektirdi» metni iki farklı üstünlüğe işaret eder. «A her bakımdan daha iyidir» ya da «B daha yavaştır» yargıları, verilen ölçütleri karıştırır. Bir yöntemin kurulum hızı, sonraki işletme maliyeti veya başarısı hakkında kendiliğinden bilgi vermez.

Karşılaştırmanın yönü de önemlidir. «Yeni düzen, eskisine göre daha az belge gerektiriyor» ifadesi belge sayısının azaldığını söyler; sürecin tamamen belgesiz yürütüldüğünü bildirmez. «Daha önce», «sonrasında», «diğerine kıyasla» gibi ifadeler bir kıyaslama zemini oluşturur. Karşılaştırma yapılırken hangi dönem ve hangi değişkenin esas alındığı belirlenmeden genel bir hükme gidilmemelidir.

Karşılaştırmalı metinlerde yorum denetimi

Söylenen	Metinden çıkan	Metnin desteklemediği
A'nın kurulumu B'den hızlı	A, kurulum süresinde önde	A her ölçütte daha iyi
B daha seyrek bakım gerektiriyor	B'nin bakım sıklığı daha düşük	B'nin satın alma bedeli daha düşük
Yeni uygulamada belge sayısı azaldı	Önceye göre daha az belge var	Artık hiç belge istenmiyor
Bazı kullanıcılar yeni tasarımı tercih ediyor	Bir kesimin tercihi değişti	Çoğunluk kesinlikle yeni tasarımı seçiyor

18. İki metni birlikte yorumlamak: Ortak konu, farklı yaklaşım

Metinler arası karşılaştırmada yalnız aynı sözcüklerin veya aynı konunun bulunması yeterli değildir. İki metin aynı meseleyi farklı sorunlar üzerinden işleyebilir; biri çözüm önerirken diğeri uygulamanın güçlüklerini anlatabilir. Bu fark otomatik olarak iki metnin birbirini çürüttüğü anlamına gelmez. Karşıtlık için aynı kapsamda ve aynı ölçüt üzerinde gerçekten uyumsuz hükümler bulunmalıdır.

Özgün iki kısa metin düşünelim. İlk metin: «Kent arşivindeki haritaların çevrim içi görüntülenmesi araştırmacıların ön hazırlığını kolaylaştırdı. Uzaktan inceleme, hangi belgelerin yerinde görülmesi gerektiğine karar vermede yararlı oldu.» İkinci metin: «Eski haritaların renk, yüzey ve kâğıt dokusuna ilişkin ayrıntıları her zaman ekrandan seçilemiyor. Bazı araştırmalarda özgün malzemeyi uygun koşullarda incelemek önemini koruyor.» İlk metin dijital erişimin ön hazırlığa katkısını, ikincisi fiziksel belgenin bazı incelemelerde

gerekliliğini öne çıkarır. Bu görüşler birbirini dışlamaz; dijital ve yerinde incelemenin farklı işlevlerini birlikte ortaya koyar.

İki harita metninin karşılaştırılması

Ölçüt	Birinci metin	İkinci metin	Bütünleşik değerlendirme
Odak	Çevrim içi hazırlık	Özgün malzemenin ayrıntıları	İnceleme aşamaları farklıdır
Temel görüş	Dijital görüntüleme hazırlığı kolaylaştırır	Yerinde inceleme bazı durumlarda gereklidir	Görüşler zorunlu olarak çelişmez
Kapsam	Araştırmacıların ön hazırlığı	Bazı araştırmalardaki ayrıntılar	Her çalışma için tek yol önerilmez
Desteklenmeyen sonuç	Fiziksel arşiv gereksizdir	Dijital erişim yararsızdır	İki uç yargı da metinlerde yoktur

19. Farklı görüşün bulunması ile gerçek çelişki arasındaki ayrım

İki ifadenin birbirinden farklı olması, mantıksal olarak çeliştiğini göstermez. «İlk haftada başvuranların çoğu çevrim içi seçeneği kullandı» ve «Bazı katılımcılar yüz yüze desteğe ihtiyaç duydu» cümleleri aynı anda doğru olabilir. Birinci cümle kullanım yaygınlığını, ikincisi belirli bir grubun gereksinimini anlatır. Buna karşılık aynı dönem, aynı grup ve aynı koşullar için «tüm başvurular çevrim içi tamamlandı» ve «en az bir başvuru yalnız yüz yüze tamamlandı» hükümleri, «yalnız» sözcüğüyle ifade edilen sınıra bağlı olarak birbiriyle uyuşmayabilir.

Çelişki ararken zaman, kapsam, koşul, kişi ve ölçüt sabit tutulmalıdır. Bir metin geçen yılki uygulamayı, diğeri bugünkü tasarıyı anlatıyorsa yüzeydeki fark bir değişimden kaynaklanabilir. Bir metinde «mümkündür», diğerinde «zorunludur» denmesi de farklı modaliteye işaret eder. Yorumu sağlamlaştıran yöntem, ifadeleri belirledikleri sınırlara geri yerleştirmektir; yalnız karşıt anlamlı sözcükler aramak değildir.

20. Metnin sesindeki ironi, kuşku ve retorik sorular

Yazar bazen söylediği sözü gerçek anlamıyla onaylamak için değil, bir duruma eleştirel mesafe koymak için kullanır. «Bütün sorunlar çözüldü sanıyorduk; raporların hiçbiri açılmıyordu» ifadesindeki ikinci bölüm, ilk bölümdeki güvenin temelsizliğini açığa çıkarır. Ancak her olumlu ifadenin ironi taşıdığı kabul edilemez. İroni veya alaycı uzaklık yorumunun dayanağı, bağlamdaki uyumsuzluk, sözcük seçimi ve izleyen açıklamalar olmalıdır.

«Bir hizmetin erişilebilir olması, yalnızca kapısının açık tutulmasıyla sağlanabilir mi?» biçimindeki soru, metnin sonraki cümlelerinde dil, yönlendirme ve farklı gereksinimler tartışılıyorsa okuru erişilebilirlik kavramını geniş düşünmeye çağırır. Bu tür retorik soru mutlaka doğrudan bilgi istemez; bir düşünceyi tartışmaya açabilir. Fakat sorunun tek başına kurulması, yazarın hangi somut çözümü desteklediğini açıklamaz. Yazarın verdiği yanıt veya gerekçe dikkate alınmadan kesin tutum belirlenmemelidir.

21. Bütünleşik bilgilendirici metin örneği: Sorun, kanıt ve ölçülü sonuç

Aşağıdaki metin, öğretim amacıyla kurgulanmış iki paragraftan oluşur:

«Bir araştırma merkezinde eski kayıtların adlandırılmasında ortak bir düzen bulunmuyordu. Aynı konuşmacının kayıtları farklı dosya adlarıyla tutulduğu için çalışanlar aradıkları içeriği bulmakta zorlanıyordu. Merkez, önce kayıtların mevcut adlarını karşılaştırdı; ardından konuşmacı ve tarih bilgisinin birlikte kullanılacağı bir etiketleme düzeni tasarladı.

Yeni düzenin sınırlı sayıda kayıt üzerinde denenmesinde arama işlemleri daha düzenli ilerledi. Ancak bazı kayıtların konuşmacı bilgisi eksik kaldığından etiketlerin yeniden gözden geçirilmesi gerekti. Bu deneyim, dosya adlarını tek biçime getirmek kadar eksik bilgileri doğrulamanın da önemli olduğunu gösterdi.»

İlk paragraf sorunu ve çözümün tasarımını, ikinci paragraf sınırlı deneme ile ortaya çıkan eksikleri anlatır. Metnin bütünü, tek tip etiketleme düzeninin yararlı olabileceği ancak veri doğrulamasının ihmal edilmemesi gerektiği düşüncesini destekler. «Sınırlı sayıda kayıt» ifadesi tüm arşivin dönüştürüldüğünü bildirmez; «daha düzenli ilerledi» de bütün aramaların hatasız sonuçlandığını göstermez. Son cümledeki değerlendirme, yalnız biçimsel tutarlılığın değil bilgi doğruluğunun da önemli olduğunu söyler.

Araştırma merkezi metninin katmanlı yorumu

Katman	Metindeki dayanak	Gerekçeli yorum
Sorun	Dosya adları farklı	Aynı konuşmacının kayıtlarını bulmak güçleşiyor
Müdahale	Konuşmacı ve tarih etiketi tasarlandı	Aramayı düzenlemeyi amaçlayan yöntem geliştiriliyor
Gözlem	Sınırlı denemede arama daha düzenli	Olumlu fakat kapsamı sınırlı sonuç var
Eksik kalan yön	Bazı konuşmacı bilgileri bulunmuyor	Yalnız etiket biçimini değiştirmek yetmiyor
Genel ileti	Bilgileri doğrulama gereği	Düzenleme ve içerik denetimi birlikte ele alınmalı

Bu çözümleme, bilgi düzeyiyle yorumu birbirine bağlar: Kaydın bulunmasını güçleştiren sorun doğrudan söylenmiştir; yalnız biçim birliğinin yeterli olmayacağı düşüncesi iki paragrafın birlikte okunmasından anlaşılır. Metin hiçbir gerçek merkezin başarı oranını aktarmadığı için öğretici durumun dışına taşan kurumsal veya istatistiksel çıkarım yapılmaz.

22. Bütünleşik tartışmacı metin örneği: Yararı kabul ederek sınır çizme

Özgün metin: «Bir kurumun açıklamalarını kısa tutması, başvuranların temel bilgiyi hızla bulmasını sağlayabilir. Bu nedenle bütün açıklamaları birkaç satıra indirmek ilk bakışta çekici görünür. Fakat kimi işlemler birden çok koşul içerir; yalnız sonuçların yazılması, işlemin hangi durumda geçerli olduğunu belirsiz bırakabilir.

Ayrıntının tamamını ilk ekranda göstermek de her zaman iyi bir çözüm değildir. Asıl gereksinim, temel açıklamayı görünür tutarken ayrıntılı koşulları isteyen kişinin kolayca bulabileceği bir düzen kurmaktır. Böylece metnin uzunluğu tek başına başarı ölçütü olmaktan çıkar; anlaşılabilirlik ve bilgiye erişim birlikte değerlendirilir.»

Yazar, kısa açıklamaların pratik yararını kabul eder ama her metni koşulsuz kısaltmanın sakıncasını belirtir. İkinci paragraf, ters uçtaki bütün ayrıntıları baştan gösterme yaklaşımını da sınırlayarak katmanlı anlatımı önerir. Metnin genel tutumu karşılaştırmalı ve çözüm arayıcıdır. «Açıklamalar mutlaka uzun olmalı» yorumu da «kısa metinler hiçbir işe yaramaz» yorumu da metinle uyuşmaz. Son cümle, başarı ölçütünün yalnız uzunluk değil, anlaşılırlık ve erişim olduğunu belirginleştirir.

23. Bütünleşik anlatısal metin örneği: Hatıra, değişim ve örtük duygu

Özgün metin: «Babamın eski alet kutusunu yıllardır açmamıştım. Taşınmadan önce dolapları boşaltırken kutuyu görünce bir an durdum. İçindeki anahtarlar paslanmış, bir köşeye iliştirilmiş ölçü defterinin sayfaları sararmıştı. Kutuyu elime aldığımda onarılan eşyaları değil, onarım sırasında babamın uzun uzun anlattığı küçük hikâyeleri hatırladım.

Kutuyu yeni evde yüksek bir rafa koydum. Her aleti eskisi gibi kullanamayacağımı biliyordum; buna rağmen defteri atmak istemedim. Çünkü onun sayfaları, bitmiş işlerin kaydından çok birlikte geçirilen zamanın izini taşıyordu.»

Metnin yüzeyinde bir kutunun bulunması ve taşınması anlatılır; derin anlamında gündelik nesnelerin ortak yaşantıları hatırlatması vardır. Pas ve sararmış sayfalar yalnız fiziksel eskime ayrıntısı değildir: «onarılan eşyaları değil» karşıtlığı ve «birlikte geçirilen zaman» sözleri, anıların teknik kullanımdan daha değerli hâle geldiğini destekler. Ancak anlatıcıya ilişkin «babasını kesinlikle kaybetmiştir» gibi bir hüküm metinden çıkarılamaz. Babanın o anda hayatta olup olmadığı belirtilmemiştir. Bu örnek, güçlü duygusal yorumla olgu ekleme arasındaki sınırı görünür kılar.

24. Metin yorumunda yanılgılar ve kanıt denetimi

En sık görülen yorumlama yanılgıları, metnin bir parçasını bütüne eşitlemek, örnekten evrensel sonuç çıkarmak, belirtilen görüşün sahibini değiştirmek, olasılığı kesinlik gibi sunmak ve açıkça verilmemiş nedenler üretmektir. Ayrıca metinle aynı konuya ait doğru bir dış bilgi, metnin yargısını kanıtlamaz. Bir başvuru sisteminden söz eden metne dışarıdan teknoloji hakkında bilinen tüm özellikleri eklemek, metni yorumlamak yerine başka bir metin kurmaktır.

Bunun tersi de sorunludur: Metni yalnız kelimelerin düz anlamına indirgemek, açıkça desteklenen örtük iletileri görmezden gelebilir. «Oturumun sonunda herkes konuştu, ancak kimse birbirini dinlemedi» ifadesi, katılımın bulunmasıyla sağlıklı iletişimin aynı şey olmadığını ima eder. Bu yoruma ulaşmak için dışarıdan olay eklemeye gerek yoktur; «konuşma» ile «dinleme» arasındaki bilinçli karşıtlık yeterli dayanak sağlar. İyi yorum, ne aşırı yaratıcı varsayım ne de ilişkileri yok sayan yüzeysel aktarımdır.

Yanlış yorumun oluştuğu temel noktalar

Yanılgı	Metinde olan	Hatalı genişletme	Sağlam okuma
Kapsam artırma	«Bazı başvurular gecikti»	«Bütün başvurular gecikti»	Yalnız belirtilen bir bölüm gecikti
Kip dönüştürme	«Yeni sistem denenebilir»	«Sistem devreye alındı»	Öneri veya olasılık aşamasıdır
Görüşü sahibinden koparma	«Katılımcı etkili buldu»	«Etkinlik nesnel olarak etkili»	Katılımcının değerlendirmesidir
Neden uydurma	«İki gelişme aynı dönemde oldu»	«İlki ikincisini doğurdu»	İlişki gösterilmiş, neden zorunlu değil
Yüzeyde kalma	«Herkes konuştu ama kimse dinlemedi»	«Yalnız söz alma sayısı anlatılıyor»	Dinleme eksikliğine dönük eleştiri de var
Parçayı bütüne dönüştürme	İlk paragraf yararı, ikincisi koşulu açıklar	«Yazar koşulsuz övüyor»	Yararla sınır birlikte okunmalıdır

25. Bütün metni değerlendirirken izlenen gerekçeli okuma yolu

İlk okumada metnin türü, ele alınan durum ve temel odak belirlenir. İkinci okumada metnin düşünce veya olay çizgisindeki dönüşüm noktaları görülür: görüş hangi gerekçeyle destekleniyor, nerede sınırlandırılıyor, hangi ayrıntı bir duyguyu belirginleştiriyor, hangi sonuç gerçekten gerçekleşmiş sayılıyor? Üçüncü aşamada yorum, metindeki kanıtlarla karşılaştırılır. Yorumda «her», «kesin», «yalnız», «tamamlandı», «sebep oldu» gibi güçlü sözcükler varsa bunları destekleyen açık işaretler aranır. Bulunamadığında söylenenin gücü metnin düzeyine indirilir veya yargıdan vazgeçilir.

Bu yaklaşım metnin uzunluğuna göre değişebilir. Kısa paragrafta bağlam birkaç cümleden oluşur; çok paragraflı metinde gelişme çizgisini izlemek gerekir; iki metnin karşılaştırılmasında ortak ölçütler belirlenir; edebî metinde ise anlatıcı ve imgesel dilin işlevi öne çıkar. Bütün bu farklılıklara rağmen ortak ilke değişmez: Yorum, metinden hareket etmelidir. Aynı düşünceyi başka sözcüklerle tekrarlamak kadar, metnin taşıyamayacağı yeni bir kesinlik eklemek de yorumun niteliğini düşürür.

26. Türkçe anlama ve paragraf modülünün düşünsel bütünlüğü

Sözcük ve cümle anlamını bilmek, metnin her yerinde aynı anlamın otomatik olarak geçerli olduğu anlamına gelmez; bağlam sözcüklerin işlevini belirler. Ana düşünce ve yardımcı düşünce, yazarın neyi öne çıkardığına ve bunu nasıl desteklediğine açıklık kazandırır. Tamamlama ve sıralama, cümleler arasındaki anlam bağlarını görünür kılar. Akışı bozan cümle incelemesi, aynı genel konudan söz etmenin bir paragrafta işlev sahibi olmak için yeterli olmadığını gösterir. Metin yorumlama ise bu kazanımları bir bütün olarak kullanır.

Bir metnin anlaşılması yalnız «ne söylendiği» sorusuyla tamamlanmaz; «kim söylüyor, hangi amaçla, hangi koşullarla, neye dayanarak ve hangi sınır içinde söylüyor?» sorularının metindeki karşılıkları da incelenir. Bu soruların tümü her metinde aynı ağırlığı taşımaz. Bilgilendirici yazıda koşul ve kanıt, tartışmacı yazıda görüşlerin ilişkisi, anlatıda bakış açısı ve duygu dönüşümü önem kazanabilir. Okuyucunun görevi her metne aynı hazır yargıyı uygulamak değil, metnin kendi kuruluşundan hareketle gerekçeli ve ölçülü bir anlam ortaya koymaktır.

BÖLÜM 07

SÖZEL MANTIK VE MUHAKEME

KONU 7.1

SIRALAMA VE YERLEŞTİRME PROBLEMLERİ

Sözel mantıkta sıralama ve yerleştirme, belirli kişilerin, nesnelerin ya da olayların verilen koşullara uygun konumlarını belirleme işidir. Bir anlatıda «Önce Ayla konuşacak, Bora ise Deniz'den hemen sonra söz alacak» denildiğinde yalnız sözcüklerin anlamlarını kavramak yeterli değildir; olayların birbirine göre konumunu da tutarlı bir düzene dönüştürmek gerekir. Düzenin doğru kurulması, hem her koşulun eksiksiz kullanılmasına hem de metinde belirtilmeyen özelliklerin kendiliğinden eklenmemesine bağlıdır.

Bu alandaki temel beceri, rastgele sıralamalar denemek değil, koşulların izin verdiği yerleşimleri sistemli biçimde daraltmaktır. Kimi düzenlerde bütün konumlar tek biçimde belirlenir; kimilerinde birkaç yerleşim mümkün kalır. Tek bir örnek düzen bulmak, diğer düzenlerin olanaksız olduğunu kanıtlamaz. Bu bölüm, fihristin sonraki başlıklarında ayrıca işlenecek eşleştirme-gruplandırma, koşullu önermeler ve geniş tablolama konularına geçmeden önce, tek boyutlu sıralama ve yerleştirme mantığının sağlam temelini kurar.

1. Sıralama problemi ve çözümün iki ayrı bileşeni

Bir sıralama probleminde ilk bileşen yerleştirilecek varlıklardır: kişiler, dosyalar, kitaplar, konuşmalar, araçlar veya faaliyetler. İkinci bileşen, bu varlıkların yerleşeceği konumlardır: bir sıradaki koltuklar, bir rafın soldan sağa bölmeleri, bir günün zaman aralıkları ya da yarışmanın dereceleri. «Beş kişi beş ayrı sırada konuşacak» ifadesi, her kişinin bir konum alacağını ve her konumda bir kişi bulunacağını bildiriyorsa aynı kişinin iki kez yerleştirilmesi veya bir sıraya iki kişinin yazılması mümkün değildir.

Koşullar bu iki bileşen arasındaki ilişkileri sınırlar. «A, B'den önce» bağıntısı A'nın kesin sıra numarasını değil, A'nın B'ye göre yönünü verir. «A üçüncü sırada» ise bir kişiyi belirli bir konuma sabitler. «A ile B art arda» iki kişinin komşuluğunu bildirir ama hangisinin önce olduğunu tek başına söylemez. Sözcüklerdeki bu görev farkı, çözümde kullanılacak temsilin türünü belirler.

2. Konumları numaralandırma ve yönü baştan sabitleme

Düz bir sıra soldan sağa 1, 2, 3, …, n biçiminde numaralandırılabilir. Bu durumda bir konumun numarası büyüdükçe sağa gidilir. Konuşma sırası, sabahın ilk oturumundan son oturuma doğru 1, 2, 3, … biçiminde gösterilebilir; daha büyük numara daha geç zamanı ifade eder. Bir başka metin farklı yön seçebilir; bu durumda seçilen yön başta açıkça yazılır ve çözüm boyunca değiştirilmez.

Altı koltuğun soldan sağa numaralandırıldığı bir düzende «C, D'nin sağındadır» koşulu konum(C) > konum(D) anlamına gelir. Aynı cümleyi soldan sağa çizilen sıranın üzerinde D … C biçiminde göstermek mümkündür; aradaki noktalar, iki kişi arasında başkalarının bulunabileceğini ve komşuluğun henüz kesin olmadığını anlatır. Daha sonra «hemen sağında» denilirse aradaki boşluk kaldırılır. Yön tutarlılığı sağlanmadığında doğru çıkarılmış bir bağıntı bile çizimde ters görünebilir.

Sıralama anlatısındaki konum türleri

Anlatım	Matematiksel okuma	Sonuç
A, B'den önce	sıra(A) < sıra(B)	A'nın yeri kesinleşmez; yön bilinir
A, B'den hemen önce	sıra(B) = sıra(A) + 1	A ve B bitişiktir, yönleri bellidir
A ve B yan yana	|sıra(A) − sıra(B)| = 1	İki yön de mümkün olabilir
A üçüncü	sıra(A) = 3	Kesin konumdur
A, B ile C arasında	sıra(B) < sıra(A) < sıra(C) veya tersi	A iki uçtan birinin arasındadır
A uçlardan birinde	sıra(A) = 1 veya sıra(A) = n	Yeri iki konumdan birine sınırlanır

3. Her kişi ve her yerin bir kez kullanılması

Yerleşimler bire bir yapılacaksa her kişi veya nesne tam olarak bir konuma, her konum da tam olarak bir kişi veya nesneye karşılık gelir. Bu ilke, yalnız ek bir bilgi değil, bütün düzenin temel kısıtıdır. Örneğin dört dosyanın dört farklı rafa tek tek konulduğu belirtilmişse bir dosya iki rafa birden yazılamaz. Bir konumu doldurmak o konumu diğer dosyalara kapatır; bir dosyayı yerleştirmek de başka bir konuma tekrar yazılmasını engeller.

Bununla birlikte her sıralama metninde aynı sayı ve tekillik varsayımı bulunmaz. Beş kişinin altı koltuğa oturduğu anlatılıyorsa bir koltuk boş kalacaktır; hangi koltuğun boş olacağı ayrıca verilmedikçe belirli değildir. İki kişinin aynı saat diliminde sunum yapabileceği bildirilmişse zaman dilimleri bire bir değildir. Yerleştirme modelinin nasıl kurulduğu, «her biri farklı» ve «birer kez» gibi ifadelerden anlaşılır; metinde bulunmayan kapasite koşulları eklenmez.

4. «Önce» ile «hemen önce» arasındaki zorunlu fark

«Elif, Gül'den önce konuşacaktır» bilgisi, Elif'in konuşmasının Gül'ünkinden daha erken bir sırada gerçekleşeceğini gösterir. İki konuşma arasında başka kişilerin bulunması mümkündür. Elif birinci, Gül dördüncü sıradaysa koşul doğrudur. Buna karşılık «Elif, Gül'den hemen önce konuşacaktır» denildiğinde bu iki konuşma art arda gerçekleşmelidir; aralarında üçüncü bir konuşmacı bulunamaz.

Bu ayrımın tersi de önemlidir: «Yan yana» veya «art arda» denilmesi kendi başına ilk ve ikinci kişinin yönünü belirlemez. İki kitabın rafta yan yana olması hem M–N hem N–M düzenine izin verir; «M, N'nin hemen solunda» ifadesi yalnız M–N düzenine izin verir. Yönü belli olmayan komşuluk çiftini baştan tek bir sıraya çevirmek, gerçekte geçerli olan düzenlerin yarısını gözden kaçırabilir.

Öncelik ve komşuluk ifadelerinin sınırları

Verilen koşul	Uygun görünüm	Uygun olmayan görünüm	Gerekçe
P, R'den önce	P–Q–R	R–Q–P	Öncelik korunmalı
P, R'nin hemen önünde	P–R–Q	P–Q–R	Arada başka kişi olamaz
P ile R yan yana	R–P–Q	P–Q–R	Yön sabit değil; komşuluk zorunlu
P, R'den sonra	R–Q–P	P–R–Q	Sonra olmak hemen sonra olmak demek değil
P ilk sırada değil	Q–P–R	P–Q–R	Birinci yer yasaktır; diğerleri açık

5. Kesin sıra bilgisi ve göreli sıra bilgisinin farklı gücü

«Kemal dördüncü sırada» ifadesi doğrudan 4. konumu belirler. «Kemal, Leyla'dan önce» ise iki konum arasındaki eşitsizliği belirtir. Kesin bilgi, diğer kişilere de dolaylı olarak sınır getirir: Dört kişilik bir sırada Kemal dördüncüyse hiç kimse Kemal'den sonra yer alamaz. Ancak «Kemal, Leyla'dan önce» koşulu tek başına Kemal'in ilk sırada olduğunu kanıtlamaz; her iki kişi ikinci ve dördüncü sırada da bulunabilir.

İki tür bilgi birlikte kullanıldığında çıkarım güçlenir. Beş sıradan oluşan bir programda Leyla üçüncü ve Kemal ondan hemen sonraysa Kemal dördüncü sıradadır. Burada yeni konum, üçüncü sıra ile ardışıklık bilgisinin birlikte sonucudur. Konumların kesinleşmesinde hangi koşulların kullanıldığını açıkça göstermek, yanlış bir varsayımın tüm düzeni etkilemesini önler.

6. Konum sayısından doğan sınırlar

Dört kişilik bir sırada A, B ve C'nin üçü de D'den önce olacaksa D dördüncü sırada bulunmak zorundadır. Çünkü D'nin önünde en az üç farklı kişi yer almalıdır ve toplam dört konum vardır. Aynı mantıkla D'den sonra üç kişinin bulunması gerekiyorsa D birinci sıradadır. Konum sayısı, bazı sözel ifadeleri doğrudan kesin yere dönüştürür.

Altı kişilik bir sırada «A'nın önünde tam iki kişi vardır» ifadesi A'yı üçüncü konuma yerleştirir. «A, sondan ikinci kişidir» ise A'nın beşinci konumda bulunduğunu bildirir. «A ile en baş arasında iki kişi vardır» koşulunda A dördüncü sıradadır; başlangıç noktasından A'ya kadar sayılan konum sayısı ile aradaki kişi sayısı aynı değildir. Bu fark özellikle sıra numarası hesaplarının kontrolünü gerektirir.

> Baştan sıra k + sondan sıra s = toplam konum sayısı n + 1
>
> **Anlamı:** Aynı kişinin iki uçtan sayılan sıra numaralarının toplamı, kendisi iki sayımda birer kez yer aldığı için n + 1'dir.
> **Koşullar:** n farklı konumun tamamı bir doğrusal sıra oluşturur; aynı kişi tek konumdadır; iki sayı aynı sıra için ölçülür.

Örneğin dokuz kişilik sırada baştan üçüncü olan kişi sondan yedincidir; 3 + 7 = 9 + 1. Tersi olarak sekiz kişilik bir sırada sondan üçüncü olan kişi baştan altıncıdır. Bu sonuç, sıranın iki ucundan yapılan sayımın aynı konumda buluşmasıyla da doğrulanır; yalnız formül uygulamasına dayanmaz.

7. Uçlar, iç konumlar ve izin verilen yerler

Bir sıranın iki ucu birinci ve sonuncu konumdur. «Ayşe uçta değildir» ifadesi, en az üç konum bulunduğunda Ayşe'nin iç konumlardan birinde yer almasını gerektirir. Beş koltukta bu ifade Ayşe için ikinci, üçüncü veya dördüncü koltukları açık bırakır. «Ayşe yalnız uçlardan birindedir» ifadesi ise birinci veya beşinci konumdan birini seçme zorunluluğu doğurur; hangi uç olduğu başka kısıtlara bağlıdır.

Uçta bulunacak bir kişi komşuluk koşuluyla birlikte ele alınabilir. Beş koltukta «A uçta, B ise A'nın hemen sağında» bilgisi A'nın yalnız ilk koltukta bulunabileceğini söyler; A son koltukta olsaydı sağında yer yoktu. Bu çıkarımda komşuluğun yönü belirleyicidir. «B, A'nın yanında» denilseydi A'nın her iki uçta bulunması da mümkün kalırdı.

Beş konumlu sırada uç ve yer sınırlaması

Koşul	A'nın mümkün konumları	Açıklama
A uçtadır	1 veya 5	İki olasılık var
A uçta değildir	2, 3 veya 4	İki uç dışlanır
A'nın sağında en az iki kişi vardır	1, 2 veya 3	Son iki konum dışlanır
A'nın solunda tam iki kişi vardır	3	Kesin sıra
A, B'nin hemen solundadır	1, 2, 3 veya 4	A son konum olamaz

8. Arada bulunma, arasında bir kişi olması ve mesafe

«Efe, Gökçe ile Hakan arasında oturuyor» bilgisi Efe'nin bu iki kişinin sıralamadaki ortasında bulunmasını gerektirir; iki kişiyle doğrudan yan yana olması gerekmez. Gökçe birinci, Efe üçüncü ve Hakan beşinci koltukta olabilir. Buna karşılık «Efe, Gökçe ile Hakan'ın tam ortasında» denildiğinde doğrusal ve eşit aralıklı konumlar kastediliyorsa Efe'nin her iki uca sıra uzaklığı eşit olmalıdır. Bu ayrım, «arasında» sözcüğünün her durumda eşit uzaklık anlamına gelmediğini gösterir.

«A ile B arasında tam iki kişi vardır» denildiğinde konum numaralarının farkı üç olur. A ikinciyse B beşinci olabilir; B ikinciyse A beşinci olabilir. «A ile B'nin arasında iki sıra farkı vardır» gibi belirsiz anlatımlarda ise ilgili dilin konum farkını mı, arada kalan kişi sayısını mı anlattığı bağlamdan açık olmalıdır. Kitapta açık ve kesin gösterim için «aralarında tam iki kişi var» ifadesi kullanıldığında aradaki kişi sayısı esas alınır.

$$\text{Arada bulunan kişi sayısı} = |\text{sıra}(A) - \text{sıra}(B)| - 1$$

Anlamı: İki ayrı konumun uçları çıkarıldığında arada kalan konumların sayısı bulunur.

Koşullar: Doğrusal, boşluksuz, art arda numaralandırılmış konumlar ve $A \neq B$ olmalıdır. Boş koltuk bulunuyorsa formül aradaki konum sayısını verir; dolu kişi sayısını otomatik vermez.

Yedi kişilik dolu sırada A ikinci, B altıncıysa aralarında üçüncü, dördüncü ve beşinci konumlardaki üç kişi bulunur; $|6 - 2| - 1 = 3$ hesabı doğrudan saymayla doğrulanır. Boş koltukların mümkün olduğu bir sıradaysa aynı hesap üç koltuk bulunduğunu gösterir ancak üçünün de dolu olduğunu kanıtlamaz. Matematiksel modelin varsayımı metnin kapasite koşuluyla uyuşmalıdır.

9. Ardışık kişileri blok olarak düşünme

«D, E'nin hemen önünde» bilgisi D–E yönlü bir blok oluşturur. Bir blok, tek bir kişinin sırası gibi kaydırılarak farklı boşluklara yerleştirilebilir; fakat blok içindeki D–E sırası bozulamaz. Beş kişilik bir programda iki kişilik bu blok başlangıçta 1–2, 2–3, 3–4 veya 4–5 konumlarını kaplayabilir. Başka koşullar blok başlangıçlarını sınırlandırabilir.

«D ve E bitişiktir» denildiğinde blok kendi içinde D–E veya E–D biçiminde bulunabilir. Üç kişi art arda sıralanacaksa «A, B'den hemen önce; B de C'den hemen önce» ilişkilerinin birleşimi A–B–C bloğunu verir. Ancak yalnız «A ile B yan yana, B ile C yan yana» koşulları B ortada olmak üzere A–B–C veya C–B–A seçeneklerine izin verir. Blok yaklaşımı, kesin olmayan yönleri kesinmiş gibi almadan düzenin yapısını görmeyi sağlar.

Blok türlerinin farklı anlamları

Bilgi	Blok olasılığı	Sabit kalan
A, B'nin hemen önünde	A–B	Yön ve bitişiklik
A ile B yan yana	A–B veya B–A	Bitişiklik; yön açık
A önce B, B hemen önce C	A … B–C	B ile C bitişik; A daha önce
A hemen önce B, B hemen önce C	A–B–C	Üçlü sıra tek yönlü
A ile B arasında tam bir kişi	A–X–B veya B–X–A	Uçlar arasında tek konum

10. Birden çok «önce» bağıntısını birleştirme

«A, B'den önce; B de C'den önce» koşulları birlikte A … B … C yönünü kesinleştirir. A'nın C'den önce bulunması, iki bağıntının zorunlu sonucudur. Fakat A, B ve C'nin art arda olduğu sonucu çıkmaz. Başka kişiler aralara yerleşebilir. Göreli öncelik ilişkileri birbirini desteklese de aralarında kaç konum olduğu ayrıca belirtilmelidir.

«A, C'den önce; B de C'den önce» ifadesi A ile B'nin birbirine göre sırasını belirlemez. C'nin iki kişinin arkasında olması, bu kişilerin hangisinin ilk olduğunu söylemez. Böyle durumlarda A … B … C ile B … A … C düzenleri, diğer koşullar dışlamadıkça mümkün kalır. İlişkileri zincir hâline getirmek ile ortak bir kişi üzerinden yön bağlantısı kurmak farklı işlemlerdir.

11. Olumsuz koşulları doğru kullanma

«Sena birinci sırada değildir» bilgisi yalnız ilk konumu yasaklar; Sena'nın kesinlikle sonuncu olduğunu bildirmez. «Sena, Ozan'ın hemen arkasında değildir» ise Sena'nın Ozan'dan hemen sonraki konumda bulunmasını engeller ama Ozan'dan daha önce veya araya başka bir kişi girerek sonra bulunmasına izin verebilir. Olumsuz bilgi, özellikle yerleşimde seçenek sayısını azaltır; hangi seçeneğin kesinleştiği ise kalan olumlu kısıtlarla birlikte belirlenir.

«A ile B yan yana değildir» ifadesi $|\text{sıra}(A) - \text{sıra}(B)| \neq 1$ koşuludur. A ve B'nin önce–sonra yönü hakkında bilgi sağlamaz. Aynı şekilde «A, B'den önce değildir» sözü, kişilerin farklı konumlarda bulunması zorunluysa A'nın B'den sonra olduğunu gösterir; aynı anda bulunmaları mümkünse bu sonuç ayrıca sorgulanır. Olumsuz yüklemin hangi ilişkiyi yasakladığını açıklaştırmak, sözel koşulları yanlış çevirmeyi önler.

Olumsuz koşuldan çıkarılabilecek sınır

Olumsuz koşul	Kesin dışlanan	Tek başına belirlenmeyen
A ilk sırada değil	A = 1	A'nın hangi başka sırada olduğu
A, B'nin hemen ardından değil	sıra(A) = sıra(B)+1	A'nın B'ye göre bütün yönü
A ile B bitişik değil	Sıra farkı 1	Hangi kişinin önce olduğu
A sonuncu değil	A = n	A'nın ilk veya orta sırada olması
A, B'den önce değil (farklı konumlar)	sıra(A) < sıra(B)	B'den sonraki kesin konumu

12. Koşulları aynı anda karşılayan yerleşim

Bir yerleşimin geçerli sayılabilmesi için verilen bütün koşulların aynı anda doğru olması gerekir. Bazı koşulları karşılayan güzel görünümlü bir sıra, kalan tek bir koşulu çiğniyorsa geçerli değildir. Bu nedenle denetim, koşul başına ayrı bir kontrol yapmayı gerektirir: kişinin bir kez bulunması, sabit sıra, öncelik, bitişiklik, yasaklı komşuluk ve uç koşulları sırayla gözden geçirilir.

Örneğin beş kişinin A, B, C, D, E olduğu bir sırada «A hemen B'den önce», «C dördüncü», «E, C'den sonra» ve «D, C'den önce» koşulları bir arada ele alınsın. C dördüncü olduğundan E beşinci sıradadır. İlk üç yer A, B, D kişilerine kalır. A–B bloğu 1–2 veya 2–3 konumlarını kaplayabilir. Blok 2–3 olursa D birinci olur; bu da D'nin C'den önce olmasıyla uyumludur. Dolayısıyla burada iki düzen mümkündür: A–B–D–C–E ve D–A–B–C–E. «D, B'den sonra» koşulu da eklenirse yalnız ilk düzen kalır. Son koşulun eklenmesinden önce tek çözüm bulunduğunu ileri sürmek doğru olmaz.

13. Kesin yerleşimi kanıtlama: Beş konuşmacı modeli

Öğretici modelde beş farklı konuşmacı A, B, C, D ve E, birbirinden farklı beş sırada birer kez konuşacaktır. Veriler şunlardır: C dördüncü konuşmacıdır; E, C'den sonra konuşur; A, B'den hemen önce konuşur; D, C'den önce ve B'den sonra konuşur. Modelde «sonra» ifadesi zorunlu komşuluk bildirmez; «hemen önce» ise bildirir.

Önce C dördüncü, E beşinci konuma yerleşir. Kalan 1, 2 ve 3 konumları A, B ve D'ye ayrılmıştır. A ile B art arda ve bu sırayla bulunmalıdır. D'nin B'den sonra olması gerektiğinden D birinci olamaz; A–B bloğu 2–3'te olsaydı D'nin tek yeri 1 olurdu ve koşul bozulurdu. Bu nedenle A birinci, B ikinci, D üçüncü sıradadır. Nihai sıra A–B–D–C–E olur.

Beş konuşmacının zorunlu yerleşimi

Konum	Konuşmacı	Konumu belirleyen ilişki
1	A	A–B bloğu ve D'nin B'den sonra olması
2	B	A'nın hemen arkasından B gelir
3	D	C'den önce ve B'den sonra tek yer
4	C	Doğrudan verilen kesin sıra
5	E	C'den sonra kalabilen tek sıra

Bağımsız denetimde B'nin A'dan hemen sonra olduğu, D'nin hem B'den sonra hem C'den önce bulunduğu, C'nin dördüncü, E'nin de C'den sonra olduğu ayrı ayrı görülür. Çözümün tekliği ise A–B bloğunun ilk üç yer içindeki diğer konumu 2–3'ün, D'nin yerini yanlış yöne zorlamasıyla ispatlanır. Yalnız geçerli bir diziliş sergilemekten farklı olarak alternatifin neden mümkün olmadığını da gösterir.

14. Kesin bilgiyle olası bilginin karşılaştırılması

Bazı problemler bütün sırayı değil, yalnız belirli bir kişinin kesin yerini veya kimlerin hangi yerde bulunabileceğini belirlemeye elverişlidir. Örneğin altı kişi için yalnız «A, B'den önce» deniliyorsa A'nın birinci ve B'nin altıncı olması mümkündür; A ikinci ve B üçüncü olması da mümkündür. Buradan A'nın kesin ilk sırada bulunduğu çıkarılamaz. Buna karşılık A'nın son sırada olamayacağı kesindir; çünkü ondan sonra B için bir yer kalmalıdır.

Bir yargının «kesin» olması, koşulları karşılayan bütün geçerli yerleşimlerde doğru olması demektir. «Mümkün» olması ise en az bir geçerli yerleşimde doğru olması ve diğer koşullarla çelişmemesi demektir. Bu iki tanım çözüm mantığının temelini oluşturur. Bir yerleşimi zihinde kolayca tasarlayabilmek, onun bütün

koşullara uyduğunu kanıtlamaz; bütün koşullara uyan tek düzen bulmak da diğer seçeneklerin kalmadığını göstermez.

15. Alternatif düzenleri sistematik inceleme

Bir yerleşimin birden fazla olasılığı bulunduğunda, önce hangi kısıtın iki veya daha az konuma izin verdiği belirlenir. Örneğin beş koltukta «A uçlardan birinde» koşulu A için iki farklı ana durum doğurur: A birinci veya A beşinci. Diğer koşulların her durumun içinde ayrıca uygulanması gerekir. Böylece hangi ana durumun olanaksız olduğu, hangisinin geçerli kaldığı gözlenebilir.

Olasılıkları sıralarken baştan bütün kişi permütasyonlarını yazmak çoğu zaman gereksizdir. Önce kesin yerler, ardından yönlü bitişik bloklar, sonrasında göreli öncelik ve yasak konumlar incelenirse seçenekler önemli ölçüde daralır. Ancak son aşamada iki farklı düzen hâlâ geçerliyse ve ikisi de bütün koşulları karşılıyorsa keyfî biçimde biri seçilmez. Problem tek çözüm vaat etmiyorsa iki düzen de geçerli bir sonuç olabilir.

Çözüm seçeneklerini sınırlandıran işlem sırası

Bilgi türü	İlk değerlendirme	Kontrol edilen nokta
Kesin sıra	İlgili konumu sabitleme	Aynı yere ikinci kişi yazılmaması
Yönlü komşuluk	İki kişilik blok	Blok yönü ve uçta taşma
Göreli öncelik	Önce/sonra ilişkisi	Komşuluk varsayılmaması
Aralık	Sıra farkı ve aradaki yer	Boş konumun hesaba katılması
Yasak konum	O yere yerleştirmeme	Kalan seçeneklerin korunması
İki olasılık	Ayrı durumlarda denetim	Başka geçerli dizilişin atlanmaması

16. Bir yerin boş kalabildiği düzenler

Bütün koltukların dolu olmadığı bir durumda kişi sırası ile koltuk numarası farklı bilgi üretir. Altı koltuğa beş kişi yerleştiğinde «B ikinci kişidir» ifadesi, soldan ikinci dolu koltuğa işaret edebilir; «B ikinci koltuktadır» ise fiziksel olarak 2 numaralı yeri belirtir. Birinci koltuk boşsa bu iki konum aynı değildir. Sözel ifadelerin hangisini kastettiği modelde açıkça belirlenmelidir.

Örneğin soldan sağa 1–5 numaralı koltuklara dört kişi oturacak ve bir koltuk boş kalacaktır. A birinci, B beşinci koltuktadır; C, A'nın hemen sağındaki koltuktadır. Böylece A 1, C 2, B 5 olarak sabitlenir. D ya üçüncü ya dördüncü koltukta bulunabilir; diğer koltuk boş kalır. «D, C'den iki koltuk sağdadır» bilgisi eklenirse D dördüncü, üçüncü koltuk boş olur. «D ikinci kişidir» gibi yeni bir koşul ise yerleşimde C zaten ikinci kişi olduğu için çelişki doğurur. Doluluk kavramının açıklığı bütün yorumun dayanağıdır.

17. Çelişkili verilerle eksik verileri birbirinden ayırma

Çelişki, bütün koşulların aynı anda doğru olabileceği hiçbir yerleşimin bulunmamasıdır. Beş farklı sırada A'nın üçüncü, B'nin A'dan hemen önce ve yine B'nin beşinci olduğu bildirilirse koşullar birlikte sağlanamaz; B hem ikinci hem beşinci olamaz. Buna karşılık A'nın üçüncü ve B'nin A'dan önce olduğu bilgisi birkaç düzene izin verebilir. Bu ikinci durumda sorun çelişki değil, yerleşimin henüz tekleşmemiş olmasıdır.

Belirsizlik, çözümsüzlükle de karıştırılmamalıdır. Bazı bilgileri verilen bir sırada yalnız A ile B'nin yerleri belirlenmiş, diğer kişiler farklı biçimlerde yerleşebiliyorsa birden fazla çözüm vardır. «Verilenler tek bir sonuç çıkarmaya yetmiyor» yargısı, sıralamayı hiç kuramamak anlamına gelmez. Aksine alternatiflerin açıkça görülebilmesi, bilinenlerle bilinmeyenleri ayıran doğru bir mantık denetimidir.

Kesinlik ölçütü Bir sıralamanın mümkün olduğunu göstermek için bütün koşullara uyan en az bir düzen yeterlidir. Bir sıralamanın zorunlu olduğunu göstermek içinse koşullara uyan bütün düzenlerin o özelliği taşıdığı belirlenmelidir. Hiçbir geçerli düzen yoksa sorun eksik bilgi değil, koşulların çelişmesi veya modelin yanlış kurulması olabilir.

18. Zaman sırası ile mekân sırasını doğru okumak

Zamana dayalı yerleştirmelerde ilk–son, erken–geç ve hemen önce–hemen sonra sözcükleri kullanılır. Mekâna dayalı yerleştirmelerde sol–sağ, üst–alt, yakın–uzak ve bitişik olma ilişkileri öne çıkar. Bu ifadelerin hepsi aynı genel sıralama fikriyle modellenebilse de her zaman birbirinin karşılığı değildir. Örneğin saat 09.00 ve 11.00 oturumları arasında 10.00 oturumu varsa iki oturum art arda değildir; fakat üç oturumun saatleri arasında bir saatlik eşit aralık bulunduğu ayrıca biliniyor olabilir.

Zamanla ilgili «A, B'den iki saat sonra» ifadesi ile «A, B'den iki oturum sonra» ifadesi de farklıdır. Oturum saatleri 09.00, 10.30, 13.00 ve 15.00 ise iki oturumluk ilerleme sabit bir saat farkına karşılık gelmez. Benzer şekilde bir binadaki odalar numaralı sırayla dizilmediyse oda numaralarının büyük olması fiziksel olarak sağda bulunmayı garanti etmez. Matematiksel temsil, anlatıdaki gerçek ölçüye dayanmalıdır.

19. Sözel koşulları parçalayarak işlem sırası oluşturma

Uzun bir yerleştirme metninde aynı cümle içinde birden fazla koşul bulunabilir: «A, C'den önce konuşacak ve B ile yan yana olmayacaktır.» Bu cümle iki ayrı ilişki taşır: A, C'den önce ve A ile B bitişik değil. İkinci ilişkiyi ilkine bağlı bir neden veya alternatif gibi okumak doğru değildir. «A, C'den önce konuşacak; B ise A'nın hemen ardından gelecek» cümlesi ise önce A'nın C'ye göre yönünü, sonra B'nin A'ya göre kesin komşuluğunu bildirir.

Bilgilerin birbirinden ayrılması, çözümün sonrasında yeniden birleştirilmeleri içindir. Koşullardan biri atlanırsa geçersiz düzenler yanlışlıkla kabul edilebilir. Aynı kuralın birden fazla kez yazılması ise yeni ve bağımsız bir sınır oluşturmaz. Bu nedenle koşulları anlam bakımından sınıflandırmak, rastgele altı ayrı çizim yapmaktan daha güvenilir bir başlangıç sağlayabilir.

20. Altı öğeli model: Konum ve komşuluk birlikte

İkinci özgün örnekte A, B, C, D, E ve F adlı altı dosya, numaraları soldan sağa 1'den 6'ya artan altı ayrı bölmeye yerleştirilecektir. C üçüncü, D altıncı bölmededir. A, C'den önce yer alır. E, B'nin hemen sağındadır. F, C'ye bitişik değildir. Her bölmede tam bir dosya bulunacaktır.

C üçüncü olduğu için A yalnız birinci veya ikinci bölmede bulunabilir. D altıncı sabittir. C'nin bitişiği ikinci ve dördüncü bölmeler olduğundan F bu bölmelere gelemez. Ayrıca üçüncü ve altıncı bölmeler doludur. Geriye F için yalnız birinci veya beşinci bölmeler kalır. B–E yönlü bloğunun ise boş bölmelere sığması gerekir. F beşinci varsayılırsa A, B ve E için yalnız 1, 2 ve 4 numaralı bölmeler kalır. B–E bloğu bu yerler arasında ancak 1–2 konumlarını kaplayabilir; o durumda A dördüncüye düşer ve A'nın C'den önce olması koşulu bozulur. Dolayısıyla F birinci bölmededir. A ikinci bölmeye yerleşir. B–E bloğu için kalan bitişik yerler dördüncü ve beşincidir: B dördüncü, E beşinci olur. Tam sıra F–A–C–B–E–D'dir.

Altı dosyanın tek geçerli yerleşimi

Bölme	Dosya	Sonuç doğrulaması
1	F	C'nin hemen yanında değil
2	A	C'den önce
3	C	Verilen sabit konum
4	B	E'nin hemen solunda
5	E	B'nin hemen sağında
6	D	Verilen sabit konum

Bu çözümde önemli nokta, F'nin beşinci olasılığının yalnız sezgiyle değil, yer kalmama gerekçesiyle dışlanmasıdır. Nihai dizilişte A < C, konum(E) = konum(B)+1 ve F ile C arasındaki konum farkı 2 olduğundan tüm koşullar sağlanır. Tekliği ayrıca brute-force sayımına değil, seçeneklerin niçin daraldığını gösteren gerekçeye dayanır. Mantık, bulunmuş bir düzeni onaylamak kadar diğer düzenlerin neden dışlandığını açıklama işidir.

21. Ortada, ilk yarıda ve ikinci yarıda bulunma ifadeleri

Tek sayıda konum varsa tam ortada bir konum bulunur. Yedi kişilik bir sıranın ortası dördüncü konumdur; kişinin solunda da sağında da üçer kişi vardır. Çift sayıda konumda ise tek bir orta koltuk yoktur. Altı kişinin sıralandığı düzende üçüncü ve dördüncü konumlar ortadaki iki konumdur. «Tam ortadaki kişi» gibi tekil bir anlatım, başka bir ölçü belirtilmedikçe çift uzunluklu sırada belirsizlik yaratır.

«İlk yarı», konum sayısı çiftse baştan n/2 konumu ifade edecek biçimde tanımlanabilir; altı kişilik bir sıralamada ilk üç kişi ilk yarıdadır. Ancak yedi kişide orta konumun hangi yarıya dâhil edileceği ayrıca belirtilmedikçe matematiksel olarak açık değildir. Bir sıralama modeli, günlük dilde kolay anlaşılan fakat sınırları farklı yorumlanabilecek ifadeleri gerektiğinde netleştirmelidir.

22. Birden fazla geçerli düzenin ders bakımından anlamı

Dört toplantı sırasını A, B, C ve D oluştursun. Yalnız «A, B'den önce», «C de D'den önce» bilgileri verilmiş olsun. Bu iki bağıntı birbirinden bağımsız olduğu için A'nın C'den önce olması zorunlu değildir. Örneğin A–B–C–D, C–D–A–B ve A–C–B–D düzenleri iki koşulu da karşılar. Dolayısıyla «A mutlaka ilk iki sıradadır» yargısı doğru değildir; C–D–A–B düzeninde A üçüncüdür.

Bununla birlikte A'nın son sırada, B'nin ilk sırada olamayacağı kesindir. A'nın önüne B'nin gelmesi gerekmese de B ondan sonra yer almak zorundadır. Benzer biçimde D ilk konumda olamaz; çünkü C ondan önce bulunmalıdır. Bütün kişilerin yerinin sabit olmaması, bu tür zorunlu sınırların bulunmadığı anlamına gelmez. Doğru çözüm, tam sıra tekleşmese de her kişi için hangi sınırların kesin olduğunu belirler.

İki bağımsız öncelik koşulunun sonuçları

Çıkarım	Durum	Gerekçe
A, B'den önce	Kesin	Doğrudan koşul
C, D'den önce	Kesin	Doğrudan koşul
A, C'den önce	Kesin değil	A–B ile C–D çiftlerinin birbirine göre sırası açık
B ilk sırada	Olanaksız	A için önceki konum gerekir
A son sırada	Olanaksız	B için sonraki konum gerekir
C ilk sırada	Mümkün	C–D–A–B düzeni koşullara uyar

23. Yargıyı bozan karşı örnek ve zorunluluğu kanıtlama

Bir yerleşim hakkında «A her durumda üçüncüdür» deniliyorsa bu yargıyı yanlışlamak için bütün koşullara uyan ve A'nın üçüncü olmadığı tek bir düzen yeterlidir. Buna karşı örnek denir. Buna karşılık A'nın her durumda üçüncü olduğunu kanıtlamak için yalnız bir örnek düzen yeterli değildir; diğer bütün geçerli düzenlerin de aynı konumu zorunlu kıldığı gösterilmelidir.

Örneğin beş kişilik bir sırada «A, B'den hemen önce» bilgisi varsa A'nın sonuncu olamayacağı zorunludur; çünkü B'nin A'nın sağında başka bir konuma yerleşmesi gerekir. A'nın kesin birinci olduğunun kanıtı ise bu bilgiyle kurulamaz; A–B bloğu 2–3 veya 3–4 gibi farklı yerleri de kaplayabilir. Karşı örnek, güçlü görünen fakat dayanağı olmayan bir genellemeyi sınamak için etkili bir araçtır.

24. Eksik, fazla ve yinelenen koşulların sonuçları

Bir kısıt zaten diğer kısıtlardan zorunlu olarak çıkıyorsa aynı kısıtın yeniden verilmesi geçerli düzen kümesini değiştirmez. «A, B'den önce; B, C'den önce; A, C'den önce» ifadelerinde üçüncü ilişki ilk ikisinin doğal sonucudur. Buna karşılık «A, B'den önce» şartı kaldırılırsa A'nın yeri daha serbest hâle gelebilir; kaldırılan koşulun gerçekten yeni düzen oluşturup oluşturmadığı kalan bilgilerle incelenir.

«Çok bilgi var, öyleyse çözüm tektir» sonucu yanlıştır. Birbiriyle aynı anlama gelen birçok koşul yerleşimi tekleştirmeyebilir; az sayıda ama güçlü koşul ise bütün düzeni belirleyebilir. Ayrıca gereğinden fazla kısıt eklenmesi çelişki de yaratabilir. Bu nedenle kısıt sayısından çok kısıtların bağımsızlığı ve ortak etkisi önemlidir.

25. Yerleştirme çözümünü sonradan doğrulama

Çözüm tamamlandığında her öğenin bir kez kullanıldığı, her konumun kapasitesinin aşılmadığı, sabit konumların doğru olduğu, tüm önce–sonra ve hemen önce–hemen sonra ilişkilerinin sağlandığı denetlenir. Olumsuz koşullar ayrıca kontrol edilmelidir; çünkü ilk bakışta doğal görünen bir sıra yasaklı komşuluğu taşıyor olabilir. Bir durum ayrımı yapıldıysa önce reddedilen durumun neden reddedildiği, sonra kalan düzenin bütün koşullara uyup uymadığı açıklanır.

Tam yerleşim tek bir düzene indirgenmediyse sonuç «çözülmedi» diye etiketlenmez; geçerli düzenlerin ortak özellikleri ve açık kalan alternatifler bildirilir. Böylece hesaplama ve mantıksal gerekçe birbirini denetler. Dersin devamındaki eşleştirme, gruplama ve koşullu sözel muhakeme konuları daha çok değişken içerebilir; ancak burada geliştirilen temel ilke aynı kalır: Verilen sınırlar korunur, yeni bilgi uydurulmaz ve kesinlik yalnız tüm geçerli yerleşimlerin ortak sonucuysa kabul edilir.

KONU 7.2

EŞLEŞTİRME VE GRUPLANDIRMA

Sözel mantıkta bazı bilgiler kişi, görev, yer ve zaman gibi farklı türdeki öğeleri birbirine bağlar. Bir görevlinin hangi dosyayı incelediği, hangi eğitmenin hangi salonda bulunduğu veya belirli sayıdaki kişinin hangi çalışma grubuna katıldığı, yalnız metni anlamakla değil, verilen ilişkileri aynı anda koruyarak çözülür. Eşleştirme, iki veya daha fazla öğe kümesi arasında bağlantı kurmayı; gruplandırma ise öğeleri belirli ölçütlere göre kümelere ayırmayı ifade eder. İki işlem çoğu durumda birbiriyle ilişkilidir, ancak farklı kapasite ve tekrar kurallarına sahip olabilir.

Bu bölümde amaç, belirli bir eşleştirme tablosunu ezberlemek değil, sözel koşulların hangi bağlantıları zorunlu kıldığını ve hangilerini açık bıraktığını açıklamaktır. Bir önceki bölümdeki sıra ve konum ilişkilerinden farklı olarak burada öğeler her zaman soldan sağa dizilmez; aynı gruba birden çok kişi girebilir veya iki öğenin birbirine bağlanması üçüncü bir öğeye ilişkin kısıtı değiştirebilir. Çözüm, koşulların doğru yorumlanması ve tüm geçerli düzenlerin dikkate alınmasıyla kurulmalıdır.

1. Eşleştirme probleminin temel yapısı

En yalın eşleştirmede iki ayrı öğe kümesi vardır: kişiler ile dosyalar, birimler ile görevler veya konuşmacılar ile sunum başlıkları gibi. Birinci kümeden seçilen bir öğenin ikinci kümedeki hangi öğeyle ilişkili olduğu araştırılır. Örneğin üç çalışanın üç farklı rapordan birini hazırladığı durumda, çalışan adları ile rapor adları aynı tür bilgi değildir; aralarındaki bağ, problemin çözülmesi gereken ilişkisidir.

Eşleştirmenin yönü anlatım bakımından tersine çevrilebilir: «Aylin bütçe dosyasını inceler» cümlesi «Bütçe dosyasının inceleyeni Aylin'dir» cümlesiyle aynı bağı tanımlar. Ne var ki «Aylin bütçe dosyasını inceleyebilir» ifadesi henüz gerçekleşmiş veya zorunlu bir eşleştirme bildirmez. Eylemin kipini, bağlantının kesinliğini ve bir öğenin kaç eşleşmeye sahip olabileceğini ayırmak gerekir.

2. Bire bir eşleştirme ve farklı eşleşme türleri

Bire bir ve tam eşleştirmede her kişi yalnız bir görev alır ve her görev yalnız bir kişiye verilir. Dört kişi ile dört farklı görev böyle ilişkilendirilmişse bir görev bir kişiye sabitlendiğinde hem o kişinin başka görev alma ihtimali hem de diğer kişilerin aynı görevi alma ihtimali ortadan kalkar. İki tarafı da kapsayan bu sınırlama, çözümün önemli bir kaynağıdır.

Bununla birlikte «her kişi bir görev üstlenir» cümlesi tek başına görevlerin farklı olduğunu söylemez. Birden çok kişinin aynı görevi üstlenmesi yasaklanmamışsa bire bir eşleştirme varsayılamaz. «Her kişi farklı bir görev üstleniyor» ifadesi dört kişi ve dört görev söz konusu olduğunda, bütün görevlerin kullanıldığını ancak görevler kümesinin tam olarak bu dört görevden oluştuğu da biliniyorsa garanti eder. Kişi ve seçenek sayıları eşit değilse, tek tek bağlantılar ile tüm seçeneklerin kullanılması ayrı koşullardır.

Eşleştirme türünü belirleyen ifadeler

Metindeki bilgi	Kurulabilecek ilişki	Çıkarılamayacak sonuç
Her kişi bir dosya inceler	Her kişinin en az bir atanmış dosyası vardır	Dosyalar mutlaka farklıdır
Her kişi yalnız bir farklı dosya inceler	Kişi başına bir dosya, kişiler arasında dosya tekrarı yok	Dosya sayısı belirtilmemişse her dosya kullanılmıştır
Her dosyayı tam bir kişi inceler	Dosya başına bir kişi	Her kişinin yalnız bir dosyası vardır
Üç kişi, üç farklı dosyayı birer tane inceler	Tam bire bir eşleştirme	Aynı kişinin iki dosyası olabilir
Bir görev birden fazla kişiye verilebilir	Çoktan bire ilişki mümkündür	Birden fazla kişiye verilmesi zorunludur

3. Eşleştirmede kapsam, evren ve kullanılmayan seçenekler

Bir metinde adı geçen seçeneklerin tümünün kullanılacağı her zaman belirtilmez. Dört kişiye beş olası şubeden birer farklı şube atanıyorsa bir şube boş kalır. Beş şube, beş kişi bulunması ise ancak her kişinin farklı bir şubede çalıştığı ve her şubeden yalnız bir kişinin seçildiği bilgileri birlikte varsa tam bir karşılıklılık doğurur. Boş bırakılabilecek öğe ile tanımı gereği mutlaka kullanılacak öğe arasındaki ayrım, görünürde küçük ancak çözümü değiştiren bir koşuldur.

«Bu kişiler arasından üçü görevlendirildi» cümlesinde görevlendirilmemiş kişi olasılığı korunur. «Üç kişinin her biri görevlendirildi» cümlesinde ise kişiler kümesinin tümü kapsanır. Benzer biçimde bir olayda başka kişi, görev veya gün bulunup bulunmadığı açıklanmamışsa metindeki sayılar tüm evren sayısıymış gibi genişletilemez. Mantıksal yerleştirme, ancak problemin tanımladığı evren için kesin yargı üretir.

4. Doğrudan eşleşme, dışlama ve aday bağlantılar

«Bora ulaşım dosyasıyla ilgileniyor» doğrudan bir eşleşmedir; bire bir modelde Bora'nın diğer dosyaları ve ulaşım dosyasının diğer kişileri elenir. «Deniz eğitim dosyasında çalışmıyor» yalnız bir bağlantıyı yasaklar. «Cem arşiv ya da bütçe dosyasındadır» ifadesiyse adayları iki seçenekle sınırlar; tek başına bu ikisinden hangisinin seçildiğini söylemez. Her ifade önce gerçek gücüyle kaydedilmelidir.

Özgün bir örnekte Aylin, Bora, Cem ve Deniz'in Arşiv, Bütçe, Eğitim ve Ulaşım adlı dört farklı dosyayı, kişi başına bir dosya olmak üzere incelediği bilinsin. Bora Ulaşım'da, Deniz Bütçe'dedir. Aylin Arşiv'de değildir. Ulaşım ile Bütçe kullanıldığı için Aylin ve Cem'e yalnız Arşiv ile Eğitim kalır; Aylin Arşiv'de olamayacağından Eğitim'i, Cem de Arşiv'i alır. Böylece Aylin–Eğitim, Bora–Ulaşım, Cem–Arşiv ve Deniz–Bütçe eşleşmesi elde edilir. Son adımda her kişinin ve dosyanın yalnız bir kez kullanıldığı kontrol edilirse sonuç metindeki bütün koşullarla uyuşur.

Dört kişi ile dört dosyanın özgün eşleştirme modeli

Kişi	Dosya	Gerekçe
Aylin	Eğitim	Ulaşım ve Bütçe dolu; Arşiv yasak
Bora	Ulaşım	Doğrudan bilgi
Cem	Arşiv	Diğer dosyalar kullanıldı
Deniz	Bütçe	Doğrudan bilgi

5. Bir eşleşmenin diğer öğelere etkisi

Bire bir eşleştirmede bir kişinin dosyası kesinleştiğinde sonuç tek hücrede kalmaz; kullanılan dosyanın diğer kişiler bakımından da kapanması gerekir. Dört dosyalı örnekte Bora'nın Ulaşım'da olması, Cem'in, Aylin'in ve Deniz'in Ulaşım'da olamayacağı anlamına gelir. Bu etki dışlama bilgisinin kişiden göreve ve görevden kişiye iki yönlü taşınmasıdır. Ancak aynı aktarım, bir görevde birden çok kişinin çalışmasına izin verilen modelde geçerli değildir.

Olumsuz bir koşul da başka eşleşmeleri zorunlu kılabilir. Dört dosyalı örnekte iki dosya doğrudan, üçüncü dosya dışlama nedeniyle belirlendiğinde dördüncü dosya kendiliğinden kesinleşir. Bu sonuca yalnız «geriye tek seçenek kaldı» düşüncesiyle değil, tam bire bir olma koşulunu da kullanarak ulaşılır. Çözümde kullanılan her dolaylı bağlantının dayandığı kural görünür kalmalıdır.

6. Aday kümelerinin daraltılması ve tek seçenek ilkesi

Bir kişi için mümkün görevler önce geniş bir küme oluşturabilir. Yeni koşullar geldikçe bu kümeden yasaklı görevler çıkarılır. Kalan aday kümesi tek öğeye düşerse eşleşme kesinleşir. Aynı işlem bir görev için uygun kişi adayları bakımından da yapılır. Bu çift yönlü denetim, bir kişinin çok seçeneği varken belirli bir görevin yalnız bir adayı kaldığı durumlarda özellikle önemlidir.

Örneğin üç uzman P, R ve S'nin üç farklı birimde çalıştığını ve birimlerin Denetim, Eğitim, Planlama olduğunu varsayalım. P'nin Denetim'de olmadığı, R'nin Eğitim'de olmadığı ve Planlama'nın S tarafından yürütüldüğü bildirildiğinde P ile R'ye Denetim ve Eğitim kalır. P Denetim olamadığı için Eğitim'dedir; R Denetim'dedir. Burada bir kişiye yöneltilen olumsuz bilgi, aynı birime ilişkin olumlu sonucu ancak tüm adaylar değerlendirildiğinde üretmiştir.

7. Çift yönlü aday kontrolü ve örtük zorunluluk

Bir eşleştirmenin kesinliğini belirlerken yalnız kişilerin seçeneklerini saymak yeterli değildir. Bir görev için birden fazla uygun aday varmış gibi görünse de diğer görevlerin aday sıkışıklığı sonucu belirleyebilir. İki farklı görev yalnız iki aynı kişi tarafından yapılabiliyorsa ve bire bir atama geçerliyse bu iki kişi söz konusu iki görevi kendi aralarında paylaşır. Hangisinin hangi görevi alacağı henüz açık olsa bile üçüncü kişiye bu görevlerden biri verilemez.

Buna «aday kümesini birlikte koruma» denebilir. Özellikle tablo büyüdükçe her satırın tek başına değil, satırlar arasındaki ortak daralmaların birlikte görülmesi gerekir. Benzer bir sonuç görevlerden kişilere ters yönde de kurulabilir. İki belirli kişinin yalnız iki farklı görev arasından seçim yapması, diğer kişilerin o iki göreve atanamayacağını gösterebilir. Bu sonuç, bire bir ve tam eşleştirmenin dışında otomatik olarak kullanılamaz.

Aday kümesi örüntülerinin anlamı

Durum	Kesin sonuç	Kesin olmayan kısım
Bir kişi için yalnız bir görev mümkün	O kişi o görevdedir	Başka bağlar ayrıca kontrol edilir
Bir görev için yalnız bir kişi mümkün	O görev o kişidedir	Kişinin diğer görevleri alması modelden belirlenir
İki kişi yalnız aynı iki göreve aday	Bu iki görev o iki kişi arasında paylaşılır	Hangi kişinin hangisini aldığı henüz belirsiz olabilir
İki farklı görev için yalnız aynı iki kişi aday	O iki kişi bu görevleri paylaşır	Kişi-görev sırası açık kalabilir
Bir görevde birden fazla çalışan serbest	Aday çoğalması mümkün	Bir eşleşmeden diğer adaylar otomatik elenmez

8. Gruplandırmanın anlamı ve eşleştirmeden farkı

Gruplandırmada birden çok öğe aynı sınıfa, çalışma ekibine veya seçeneğe bağlanabilir. Altı personelin iki eğitime üçer kişilik katılması, dört kişinin iki odada ikişer kişi bulunması ya da dosyaların içerik türlerine göre sınıflandırılması bu yapıdadır. Gruplar arasındaki fark çoğu zaman numarayla değil, adları veya kabul ölçütleriyle belirlenir. «Doğu odası» ile «Batı odası» farklı etiketler olduğundan aynı kişi birleşimleri bu etiketlere farklı dağıtıldığında iki ayrı yerleşim ortaya çıkabilir.

Bire bir eşleştirmede her görev en çok bir kişiyle dolarken, gruplandırmada kapasite birden fazla olabilir. Bununla birlikte «grup» sözcüğü, üyeliklerin mutlaka birbirinden ayrık olduğu anlamına gelmez. Bir kişinin yalnız bir gruba mı, yoksa aynı anda birden çok gruba mı girebildiği metne göre belirlenmelidir. Farklı kapsamlar aynı isimle anlatılsa bile mantıkta farklı çözüm modelleri üretir.

9. Ayrık gruplar, örtüşen gruplar ve katılım kuralları

Ayrık grup modelinde bir öğe aynı anda iki farklı grupta yer alamaz. «Herkes yalnız bir çalıştay grubuna katılmıştır» ifadesi bu ayrılığı bildirir. «Personelin bir bölümü ilk yardım, bir bölümü iletişim eğitimine katılmıştır» cümlesi ise iki eğitime birlikte katılımın yasak olduğunu kendi başına göstermez. Bir çalışanın her iki eğitimi de alabilmesi serbestse iki grup örtüşebilir.

Örneğin beş çalışan arasında İlk Yardım eğitimine A, B ve C; İletişim eğitimine C, D ve E katılmış olsun. İlk grubun üç, ikinci grubun üç üyesi vardır; ancak toplam altı ayrı çalışan bulunmaz, çünkü C her iki grubun da üyesidir. Bu iki grubun birleşimi beş kişiden, kesişimi yalnız C'den oluşur. Gruplardaki kişi sayıları toplanırken tekrar eden kişilerin iki kez sayılması ayrı kişi toplamını yanlış verir. Bu nedenle grup kapasitesi ile farklı kişi sayısı arasındaki ilişki, grupların örtüşüp örtüşmemesine bağlıdır.

Gruplandırmada üyelik düzenleri

Düzen	Anlam	Temel denetim
Ayrık gruplar	Bir kişi yalnız bir gruba üyedir	Hiç kimse iki grupta görünmez
Örtüşen gruplar	Aynı kişi birden çok gruba üye olabilir	Birleşim sayımında tekrar eden kişi tek sayılır
Herkes en az bir grupta	Grup dışı kişi kalmaz	Bütün kişiler en az bir yerde görünür
Herkes tam bir grupta	Hem kapsam tam hem gruplar ayrıktır	Her kişi bir kez görünür
Seçmeli katılım	Hiçbir gruba katılmamak mümkün olabilir	Toplam katılımcı sayısı ayrıca verilmelidir

10. Grup kapasitesi ve sayı sınırlarının doğru okunması

«A grubunda iki kişi vardır» ifadesi tam iki kişiyi; «A grubunda en az iki kişi vardır» ifadesi iki veya daha fazla kişiyi; «A grubunda en fazla iki kişi vardır» ifadesiyse sıfır, bir veya iki kişiyi mümkün kılar. «A grubunda en az bir kişi bulunacaktır» koşulu grubu boş bırakmayı yasaklar fakat grup büyüklüğünü tekleştirmez. Sayı sınırlarının karıştırılması, özellikle bir gruba son kişi yerleştirilirken yanlış dışlamalara neden olur.

Altı kişinin iki ayrık gruba dağıtıldığı ve her iki grubun da üçer kişilik olduğu durumda gruplardan birine üç kişi kesinleştiğinde kalan üç kişinin diğer gruba geçmesi zorunludur. Ancak «en fazla üç kişi» koşulu tek başına her grupta mutlaka üç kişi olduğunu vermez; bu sonuç için tüm altı kişinin mutlaka bu iki gruptan birine girmesi ve başka seçenek bulunmaması da gereklidir. Kapasite, katılım zorunluluğuyla birlikte yorumlanır.

$$n(A) + n(B) = n(T)$$

Anlamı: Ayrık A ve B grupları, T kişi topluluğunu eksiksiz kapsıyorsa grup büyüklüklerinin toplamı T'nin büyüklüğüne eşittir.

Koşullar: Her kişi tam bir grupta bulunmalı; gruplar ayrık ve birlikte tüm T kişilerini kapsamalıdır. Örtüşen gruplar veya grup dışı kişiler için bu eşitlik doğrudan kurulamaz.

11. Aynı grupta ve farklı grupta bulunma koşulları

«Aylin ile Bora aynı gruptadır» bilgisi, ikisinin hangi grupta olduğunu söylemeden birbirlerine bağlı hareket ettiklerini belirtir. Bu iki kişi ayrı gruplara dağıtılamaz. «Cem, Deniz ile aynı grupta değildir» bilgisi ise iki grup varsa kişilerin farklı gruplarda yer almasını gerektirir; üçüncü bir grup bulunuyorsa Cem'in Deniz'in dışında hangi grupta olduğu tekleşmez.

«A ile B aynı grupta, B ile C aynı grupta» koşulları birlikte verilmişse A ile C'nin de aynı grupta olması zorunludur. Buna karşılık «A, B'den farklı grupta; B, C'den farklı grupta» koşullarından A ile C'nin farklı gruplarda olduğu sonucu çıkmaz. İki gruplu ayrık düzende A ile C aynı gruba düşer; üç veya daha çok gruplu düzende ise ikisi aynı veya farklı grupta olabilir. Aynılık geçişliliği ile farklılık ilişkisini birbirine karıştırmamak gerekir.

12. Birlikte hareket eden üyeler ve kapasite ilişkisi

Aynı grupta bulunmak zorunda olan kişiler tek bir bağlı küme gibi değerlendirilebilir. Bunun yararı, her üyeyi ayrı yerleştirme olasılıklarını azaltmaktır. Ancak bu tür küme grup kapasitesini tek kişi gibi kullanmaz: Üç kişilik bir bağlı küme, kapasitesi iki olan gruba sığmaz. Dolayısıyla birlikte düşünmek yalnız ilişkileri yönetme kolaylığı sağlar; gerçek kişi sayısı değişmez.

Örneğin beş kişinin X ve Y gruplarına dağıldığını, X'in iki, Y'nin üç kişilik olduğunu ve A, B, C'nin birlikte bulunması gerektiğini varsayalım. Bu üçlü X'e sığamaz; Y'yi bütünüyle doldurur. Geriye kalan D ile E, X'te birlikte yer alır. Üçlü koşulun hangi gruba denk geldiği doğrudan verilmemesine rağmen kapasite sınırı onu zorunlu kılar. «Birlikte» sözcüğünün iki farklı uygulaması olabilir: Metin, aynı grupta olmayı mı yoksa aynı çalışma masasında yan yana bulunmayı mı söylüyorsa o düzey korunmalıdır; yan yana olmanın sıralama anlamı otomatik olarak eklenmez.

13. Özgün iki gruplu yerleştirme modeli

A, B, C, D ve E adlı beş görevlinin X ve Y eğitim gruplarına, herkes tam bir grupta olacak şekilde ayrıldığını düşünelim. X iki, Y üç kişi alacaktır. E'nin X'te olduğu, C ile D'nin aynı grupta yer aldığı, B'nin E ile aynı grupta olmadığı verilmiştir. Öncelikle B'nin Y'de olduğu kesinleşir. C ve D'nin birlikte X'e yerleştirilmesi olanaksızdır; çünkü X'te E zaten bir yer kaplamıştır ve yalnız bir boş yer kalmıştır. Bu nedenle C ile D Y'de olmak zorundadır.

Y grubu B, C ve D ile dolduğunda A için tek yer X'tir. Son dağılım X = {A, E} ve Y = {B, C, D} olur. Sonuç denetlenirken E'nin X'te, B'nin E'den farklı grupta, C ile D'nin aynı grupta olduğu ve iki grup kapasitesinin tam sağlandığı görülür. Burada bir eşleşmenin sonucu yalnız kişilerin yerini göstermemiş; birlikte kalma şartı ile grup kapasitesinin birleşimi başka bir kişiyi de zorunlu olarak yerleştirmiştir.

Beş görevli ve iki eğitim grubunun kesin yerleşimi

Grup	Üyeler	Kapasite kontrolü	Belirleyici gerekçe
X	A ve E	2 / 2	E sabit; C ve D birlikte sığamaz
Y	B, C ve D	3 / 3	B, E'den farklı; C ile D birlikte

14. Koşul kaldırıldığında çözümün değişmesi

Beş görevli örneğindeki «B, E ile aynı grupta değildir» koşulu kaldırılırsa geriye E'nin X'te olması ve C ile D'nin birlikte bulunması kalır. C ile D yine X'e sığamaz; Y'de olmak zorundadır. Fakat A ile B'den hangisinin E'yle birlikte X'te olacağı artık belirlenemez. X = {A, E}, Y = {B, C, D} ve X = {B, E}, Y = {A, C, D} yerleşimlerinin ikisi de kalan koşullara uyar.

Bu karşılaştırma, çözümün yalnız tamamlanmış bir yerleşimden ibaret olmadığını gösterir. Bir ifadenin zorunlu olduğunu ileri sürmek, diğer bütün geçerli yerleşimleri de dışlayabilen bir gerekçe gerektirir. Tek bir koşul çıkarıldığında iki farklı düzen oluşması, o koşulun hangi kişiyi kesinleştirdiğini de görünür kılar. Aynı mantık yeni bir koşul eklendiğinde çözüm sayısının azalıp azalmadığını değerlendirmede de kullanılır.

15. «Yalnızca», «en az», «en fazla» ve olumsuz ifadelerin etkisi

«Yalnız A ve B bu gruptadır» ifadesi, bağlama göre grubun üyelerinin sadece bu iki kişi olduğunu belirtir; diğer bütün kişiler o grubun dışındadır. «A ve B bu gruptadır» ifadesi ise başka üyeleri dışlamaz. «Sadece bir kişi iki gruba da katıldı» ifadesinde tam bir ortak üye vardır; «en az bir kişi iki gruba katıldı» ifadesi ortak üye sayısını daha büyük de bırakır. İfade sınırlarını daraltan sözcükler çözümün bir parçasıdır.

«A, X grubunda değil» bilgisi, A'nın diğer hangi grupta olduğunu ancak olası bütün gruplar biliniyorsa belirler. Bir kişinin X'te bulunmaması, başka bir kişinin otomatik olarak X'te bulunmasını sağlamaz; böyle bir çıkarım için tam sayı ve katılım koşulları gerekir. «A'nın Y'ye katılması zorunlu değildir» ifadesi de «A, Y'ye katılamaz» ile aynı anlama gelmez: birincisi Y dışında geçerli bir seçenek bulunduğunu, ikincisi Y'nin tamamen yasaklandığını ifade eder.

Gruplandırmada nicelik ve olumsuzluk ifadeleri

İfade	Gerektirdiği durum	Sık yapılan yanlış çıkarım
Tam iki kişi	Grup büyüklüğü 2'dir	İki kişiden fazlasına izin vermek
En az iki kişi	Grup büyüklüğü 2 veya daha çoktur	Tam iki kişi sanmak
En fazla iki kişi	Grup büyüklüğü 0, 1 veya 2 olabilir	İki kişinin şart olduğunu sanmak
Yalnız A ve B	Başka üye yoktur	Diğer üyeleri açık bırakmak
A ve B de	A ve B üye; başka üyeler mümkün	Üyeleri yalnız A ve B ile sınırlamak
X'te değil	X yasak	Diğer bir grubu, seçenekler bilinmeden kesinlemek

16. Birden fazla özelliği eşleştirmek

Bazı sözel mantık problemleri iki değil üç veya daha fazla öğe türünü ilişkilendirir. Kişi, toplantı günü ve kullanılan program; görevli, dosya türü ve çalışma odası; konuşmacı, başlık ve sunum süresi bunlara örnektir. Böyle bir modelde «hangi gün hangi araç kullanıldı» bilgisi doğrudan bir kişiyi söylemeyebilir; ancak kişinin günü kesinleşirse araç da dolaylı olarak belirlenebilir. Bağlantıların aynı olayın farklı özelliklerini gösterdiği unutulmamalıdır.

Örneğin İpek, Kerem ve Lale'nin pazartesi, salı ve çarşamba günlerinin her birinde tam bir sunum yaptığı; her kişinin farklı günde bulunduğu ve Excel, Python, SQL araçlarının her birinin bir kez kullanıldığı varsayılsın. Lale salı günü sunmuştur; Excel salı günkü sunumda kullanılmıştır. Kerem SQL kullanmıştır ve SQL kullanılan sunum çarşamba yapılmıştır. İpek Python kullanmıştır. Bu bilgiler Lale'nin Excel kullandığını, Kerem'in çarşamba SQL kullandığını zorunlu kılar. Geriye kalan kişi İpek, pazartesi Python sunumunu yapar.

Bu örnekte «Excel salı kullanıldı» ile «Lale salı sundu» aynı gün üzerinden birleşir. «Kerem SQL kullandı» ile «SQL çarşamba kullanıldı» ise aracı köprü olarak kullanır. Böylece iki ayrı eşleştirme ilişkisinden üçlü kişi–gün–araç bağı oluşturulur. Modelde aynı gün birden fazla sunum yapılabilseydi veya birden fazla kişi aynı aracı kullansaydı bu çıkarımlar aynı kesinlikte kurulamazdı.

Üç özellikli özgün sunum eşleştirmesi

Kişi	Gün	Araç	Denetim
İpek	Pazartesi	Python	Geriye kalan gün; doğrudan araç bilgisi
Lale	Salı	Excel	Salı günü ve Excel'in salı kullanılması
Kerem	Çarşamba	SQL	Kerem'in SQL kullanması; SQL'in çarşamba kullanılması

17. Bir bilginin iki küme arasında köprü oluşturması

Üç özellikli eşleştirmede iki kişi aynı özellik üzerinden dolaylı olarak karşılaştırılabilir. «Eğitim sunumu salı günü yapıldı» ve «Lale salı sunum yaptı» cümleleri, her gün tek sunum varsa Lale'nin Eğitim sunumunu yaptığını gösterir. Ancak «Lale salı günü sunum yaptı» ile «salı günü iki sunum vardır» koşulları birlikte verilirse aynı özdeşlik zorunlu olmaz. Köprü kurmanın geçerliliği, bağlayıcı özelliğin tekil olup olmamasına bağlıdır.

Benzer biçimde «A projesi Doğu odasındadır» ve «Bora Doğu odasındadır» ifadeleri, Doğu odasında yalnız bir kişinin çalıştığı bilgisi yoksa Bora'nın mutlaka A projesinde olduğunu göstermez. Bir odada iki çalışan ve iki proje bulunabilir. Aynı konumda bulunmak ile bire bir eşleşmiş olmak farklıdır. Bu ayrım, çok özellikli tabloların görünürde mantıklı ama aslında yetkisiz bağlar üretmesini önler.

18. Grup sayısı ile grup adlarının değiştirilmesi

İki grup X ve Y olarak adlandırıldığında, üyelerin yer değiştirmesi her zaman yeni bir çözüm oluşturmaz. Metin «X grubu kuzey odasındadır, Y grubu güney odasındadır» diyorsa X ve Y farklı ve sabit etiketlerdir; aynı kişi çiftlerinin bu odalara ters dağıtılması fiziksel olarak başka bir yerleşimdir. Ancak «iki adsız çalışma grubu oluşturulacak» denmişse yalnız grupların adlarının değişmesi yeni bir bölüşüm sayılmayabilir.

Örneğin dört kişi A, B, C ve D'nin ikişerli iki adsız gruba ayrıldığı modelde {A, B} ve {C, D} bölüşümü, iki grubun sırasının değiştirilmesiyle yeni bir bölüşüme dönüşmez. Oysa gruplardan birinin adı X, diğerinin Y ve her biri farklı görev üstleniyorsa X = {A, B}, Y = {C, D} ile X = {C, D}, Y = {A, B} ayrı yerleşimlerdir. Çözüm sayıları, sadece kişiler kadar grup etiketlerinin anlamına da bağlıdır.

19. Birden fazla geçerli dağılımda kesin ve olası bilgiler

Gruplandırma problemi tek çözüm üretmeyebilir. Örneğin dört kişi A, B, C ve D'nin kapasitesi ikişer olan X ve Y adlı iki gruba dağıtıldığı ve A ile C'nin aynı grupta olduğu bilinsin. A ile C, X'te de Y'de de bulunabilir. Ancak hangi grupta olurlarsa olsunlar o grubu doldururlar; B ile D diğer grupta birlikte olur. Böylece «B ile D aynı gruptadır» kesin, «A, X'tedir» ise yalnız mümkündür.

X = {A, C}, Y = {B, D} ve X = {B, D}, Y = {A, C} çözümlerinin her ikisi de geçerlidir. «A mutlaka X'tedir» yargısı ikinci düzenle yanlışlanır; «A ile C aynı gruptadır» ve «B ile D aynı gruptadır» yargıları her iki düzende de doğrudur. Çözüm tekleşmese bile hangi bağlantıların zorunlu kaldığı böyle belirlenir.

İkişerli iki grup örneğinde zorunlu ve mümkün üyelik

İfade	Mantıksal durumu	Gerekçe
A ile C aynı gruptadır	Zorunlu	Doğrudan koşul
B ile D aynı gruptadır	Zorunlu	A ile C bir grubu bütünüyle doldurur
A X grubundadır	Mümkün; kesin değil	Grup etiketleri ters değişebilir
B X grubundadır	Mümkün; kesin değil	İkinci geçerli dağılım
A ile D aynı gruptadır	Olanaksız	A ile C'nin bulunduğu grupta başka yer yoktur

20. Boş grup, kullanılmayan seçenek ve eşit olmayan büyüklükler

Bazı modellerde gruplar farklı kapasitelerle tanımlanır. Beş kişilik ekipte iki kişilik Araştırma ve üç kişilik Uygulama grubu olduğu belirtilmişse, tüm personelin bu iki gruba tam bir kez katıldığı koşuluyla gruplar tamamen dolar. Oysa «iki gruba en fazla ikişer kişi seçilecek» denildiğinde katılmayan kişiler bulunabilir. Bu durumda hiçbir gruba seçilmeyen kişi sayısı da çözümün bir parçasıdır.

Grupların aynı büyüklükte olması da varsayılmamalıdır. «X'te en az iki kişi; Y'de X'ten bir fazla kişi olacak» cümlesi, toplam kişi sayısı verilmemişse grup büyüklüklerini tek başına belirlemez. Toplam yedi kişinin yalnız bu iki ayrık grupta bulunduğu ayrıca verilirse X üç, Y dört kişi olur: X + Y = 7 ve Y = X + 1 bağıntıları birlikte değerlendirilir. İkinci denetimle 3 + 4 = 7 ve 4 = 3 + 1 koşulları sağlanır. «X'te en az iki kişi» bilgisi de sonuçla uyumludur.

$$x + y = 7;\ y = x + 1 \Rightarrow x = 3,\ y = 4$$

Anlamı: İki ayrık grubun toplamı yedi kişi ve ikinci grup bir kişi daha büyükse büyüklükleri üç ve dörttür.

Koşullar: Her kişi yalnız bir grupta olmalı; toplam yedi kişinin tamamı iki grubun birleşimini oluşturmalıdır. x ve y negatif olmayan tam sayıdır.

21. Çelişkili gruplandırma koşullarını belirlemek

Bir grup için zorunlu üyelerin toplamı kapasiteyi geçiyorsa model çözümsüzdür. Örneğin X iki kişilikken A, B ve C'nin üçünün de X'te bulunması koşulu aynı anda sağlanamaz. Aynı biçimde A ile B'nin aynı grupta, B ile C'nin aynı grupta ve A ile C'nin farklı gruplarda olması isteniyorsa koşullar çelişir. İlk iki bilgi A, B ve C'yi aynı grup içine yerleştirirken son bilgi bunu yasaklar.

Çelişki, hangi seçeneğin seçileceği henüz bilinmemesinden farklıdır. Birden çok geçerli yerleşim varsa bilgi eksik ama model tutarlıdır. Hiçbir yerleşim tüm koşulları sağlayamıyorsa model tutarsızdır. Her iki durumda da zorlayarak tek bir cevap üretmek yanlıştır. Çözümün güvenilirliği, gerektiğinde «bu koşullar birlikte sağlanamıyor» veya «birden fazla dağılım geçerli» diyebilmesine bağlıdır.

22. Tek çözüm iddiasının ve karşı örneğin denetimi

Bir grup dağılımının tek olduğunu göstermek, bulunan düzenin koşullara uygun olduğunu göstermeye ek olarak diğer geçerli düzenlerin bulunmadığını da gerekçelendirmeyi gerektirir. Beş kişilik X–Y örneğinde önce E'nin X'te, B'nin Y'de olduğu belirlenir; C ile D'nin kapasite nedeniyle X'e birlikte sığamayacağı görülür; sonra A için geriye X kalır. Olası başka bir kişiyi X'e koymak C ile D'yi aynı grupta tutma veya grup kapasitesi kısıtını bozar. Bu nedenle bulunan sonuç yalnız bir örnek düzen değil, tek geçerli düzendir.

Buna karşılık aynı koşullardan B'nin E'den farklı grupta olma şartı kaldırıldığında iki ayrı düzen mümkün hâle gelir. Bu iki düzenin açıkça gösterilmesi, kalan koşullarla «A kesin X'tedir» yargısının desteklenmediğini kanıtlar. Tek bir karşı örnek, zorunluluk iddiasını çürütmeye yeterlidir; ama bir tek geçerli örnek, tek çözüm olduğunu kanıtlamaz.

23. Sınıflandırma ölçütü, üye niteliği ve grup adının ayrımı

Gruplandırmada önce hangi ölçütün kullanılacağı belirlenir. Personelin görev türüne, bir ürünün durumuna veya dosyanın ait olduğu döneme göre oluşturulan gruplar aynı varlıkları farklı biçimde ayırabilir. «Teknik uzmanlar» ve «sabah çalışanlar» grupları birbirinden farklı ölçütlere dayandığı için aynı kişi iki grupta da yer alabilir. Buna karşılık «yalnızca teknik görevde olanlar ile yalnızca idari görevde olanlar» şeklinde ve herkesin tek bir görev türüne sahip olduğu açıkça söylenen bir model ayrık gruplar oluşturabilir.

Grup adı bazı durumlarda yalnız bir etikettir; o etiketten fazladan özellik çıkarılamaz. Örneğin «Mavi grup» denildi diye üyelerin mavi renkli malzeme kullandığı kabul edilmez. «Denetim ekibi» adı, bu ekibin bütün denetim işlerini yürüttüğünü tek başına ispatlamaz. Sorunun verdiği grup tanımları ile günlük yaşamdan akla gelen varsayımlar birbirinden ayrılmalıdır.

Grup ölçütleri ve bağ kurma sınırları

Bilgi	Desteklenen çıkarım	Desteklenmeyen varsayım
Çalışanlar görev alanına göre ayrıldı	Ölçüt görev alanıdır	Her grup eşit büyüklüktedir
Bazı çalışanlar iki eğitimde yer aldı	Kesişim mümkündür ve vardır	Bütün katılımcılar iki eğitime de girmiştir
X grubuna en fazla üç kişi atanır	Kapasite üst sınırı üçtür	Grup doludur
X ve Y adı verilen iki oda	Adlar farklı seçenekleri belirtir	Odaların kapasiteleri eşittir
A ile B birlikte çalışır	Ortak çalışma ilişkisi vardır	Zorunlu olarak aynı masadadırlar

24. Eşleştirmede aşamalı kontrol: kişi, görev ve grup

Çok katmanlı ilişkilerde önce bireysel bağlantılar, sonra grup sınırlamaları kontrol edildiğinde hata olasılığı azalır. Her kişinin bir görevi olduğu, görevlerin farklı kişiler tarafından yürütüldüğü ve kişilerin ayrıca iki çalışma ekibine ayrıldığı bir modelde görev dağılımı ile ekip üyeliği iki ayrı ilişkiyi temsil eder. Görev eşleşmesinin kesinleşmesi, kişinin ekip üyeliğini ancak o göreve ilişkin ek bir ekip kuralı varsa kesinleştirir.

Örneğin «Arşiv görevini üstlenen kişi X ekibindedir» ve «Cem arşiv görevini yürütür» bilgileri Cem'in X'te olduğunu gösterir. Fakat «Arşiv görevini üstlenenler X'tedir» cümlesinden «X'teki herkes arşiv görevini üstlenir» sonucu çıkmaz. Bu, bir yönlü kapsamanın yanlışlıkla iki yönlü eşitliğe dönüştürülmesidir. Metindeki ilişkinin yönü ile grubun kapsamı korunursa çözüm hem ayrıntılı hem tutarlı kalır.

25. Çözümü bağımsız denetleme ve ilerleyen konulara bağlantı

Son bir denetimde her öğenin gerçekten gerekli sayıda eşleşip eşleşmediği, aynı görevin yasak biçimde iki kişiye verilip verilmediği, grupların kapasitelerinin aşılıp aşılmadığı, birlikte veya ayrı bulunması gereken kişilerin doğru yerleşip yerleşmediği ve olumsuz koşulların sağlanıp sağlanmadığı incelenir. Sonuca ancak tüm koşullar birlikte sağlandığında geçerli denebilir. Bir düzenin geçerliliği ile tek olması ayrı özelliklerdir; ikinci özellik için alternatiflerin de dışlandığı gösterilmelidir.

Eşleştirme ve gruplandırma, verilen bilgiyi mantıksal sınırlarına kadar kullanma becerisini geliştirir. Bire bir eşleştirme, çoktan bire ilişki, ayrık ve örtüşen gruplar, kapasite ve aday kümesi farklı kavramlar olarak tanındığında karmaşık sözel durumlar da daha küçük ilişkilere ayrılabilir. Sonraki bölümde koşullu önermelerin mantıksal yapısı; daha sonraki tablolu çözüm bölümünde ise çok değişkenli koşulların sistematik kayıt biçimleri ayrıca geliştirilecektir. Buradaki temel ilke değişmez: Verilmeyen ilişki varsayılmaz, kesin yargı bütün geçerli durumlarda aynı kalmalıdır.

> **Kesinlik ve kapsam ayrımı** Bire bir ve tam eşleştirme, grup üyeliği ve çoktan bire atama aynı model değildir. «Her biri farklı», «her biri yalnız bir», «en az», «en fazla» ve «yalnızca» sözcükleri değiştiğinde çıkarımın gücü de değişir. Bir sonucun geçerli olması, tek geçerli sonuç olduğu anlamına gelmez.

KONU 7.3

KOŞULLU ÖNERMELER VE ÇIKARIM

Sözel muhakemenin önemli bir bölümü, olayların yalnız ne zaman gerçekleştiğini değil, hangi koşulun başka hangi sonucu gerektirdiğini belirlemeye dayanır. «Belge onaylanırsa bildirim gönderilir» ifadesi, iki ayrı olayı

birbirine yönlü biçimde bağlar. Bu ifade, onayın gerçekleştiği durumda bildirim yükümlülüğünü doğurur; fakat bildirimin gönderilmiş olması onayın mutlaka gerçekleştiğini, onayın bulunmamasının da bildirimin kesinlikle gönderilmeyeceğini tek başına kanıtlamaz. Verilen ilişkiyi doğru yönde okumak, koşullu önermelerle çıkarımın temelidir.

Bir önceki eşleştirme ve gruplandırma bölümünde koşullar adayları daraltmak için kullanılmıştı. Burada ise koşulun kendisi, geçerli ve geçersiz çıkarımların ayrılması bakımından incelenir. Amaç soyut sembollerle uzun işlemler yapmak değil, sözel bir kuralın hangi bilgiyi garanti ettiğini, hangi olasılıkları dışladığını ve neyi açık bıraktığını açıklamaktır. Önermeler, doğruluk değerleri ve kısa sembolik gösterimler bu nedenle gerçekçi, tüm koşulları belirtilmiş örneklerle birlikte kullanılacaktır.

1. Önerme, koşul ve sonuç kavramları

Bir önerme, belirli bir bağlamda doğru ya da yanlış olduğu değerlendirilebilen yargıdır. «Toplantı çevrim içi yapılacaktır» ifadesi, hangi toplantının kastedildiği belli olduğunda böyle bir yargı olarak ele alınabilir. «Toplantı çevrim içi yapılacak mı?» ise bilgi isteme amacı taşıyan bir sorudur; tek başına doğru veya yanlış bir yargı bildirmez. Günlük konuşmada belirsiz kalan kişi, zaman ya da yer belirlenmeden aynı cümlenin doğruluk değerini kararlaştırmak mümkün olmayabilir.

Koşullu önerme, bir durumun gerçekleşmesi hâlinde başka bir durumun da gerçekleşmesi gerektiğini ileri sürer. «Başvuru süresi dolmuşsa sistem yeni başvuru kabul etmez» cümlesinde ilk bölüm ön koşul, ikinci bölüm ise bu koşul altında verilen sonuçtur. Ön koşulun gerçekleştiğini ayrıca bilmeden sonuç hakkında kesin hüküm kurulamaz. Koşul ile sonuç iki ayrı önermeye ayrıldığında ilişkinin yönü görünür hâle gelir.

Bu bölümde p ve q harfleri, sırasıyla iki yargıyı temsil eder. p «başvuru süresi dolmuştur», q «sistem yeni başvuru kabul etmez» olsun. «p ise q» ilişkisi p ⇒ q olarak yazılır. Buradaki ok fiziksel bir hareketi değil, çıkarım yönünü gösterir. Kuralın hangi bağlamda geçerli olduğu baştan belirlenmelidir; örneğin kuruma ait belirli sistem ve belirli dönem kastedilmeden dünyadaki bütün sistemler hakkında hüküm verilmez.

Koşullu ifadeyi oluşturan parçalar

Sözel ifade	Mantıksal rol	Anlamı
Süre dolmuştur	p: ön koşul	Kuralın işlemesini başlatan durum
Yeni başvuru kabul edilmez	q: sonuç	Ön koşul doğruysa gerekli olan durum
Süre dolmuşsa yeni başvuru kabul edilmez	p ⇒ q	Tek yönlü koşullu ilişki
Süre dolmuştur ve sistem yeni başvuru kabul etmez	p ∧ q	İki durumun birlikte gerçekleştiği bilgisi

2. «İse» bağlacı ve tek yönlü gerektirme

«p ise q» önermesinde p'nin doğru olması, q'nun doğru olmasını zorunlu kılar. Bu gerektirme tek yönlüdür: p'den q'ya geçilebilir; q'dan p'ye geçebilmek için ayrıca q ⇒ p kuralı gerekir. «Sınav yeri değişirse adaylara duyuru yapılır» koşulunda yer değişikliğinden duyuru sonucuna ulaşılabilir. Duyuru yapılmış olması ise yalnız bu kurala dayanılarak yer değişikliğini doğrulamaz; duyuru farklı bir nedenle yapılmış olabilir.

Okun yönünü korumak, başlı başına bir mantıksal disiplindir. Sözel cümle kimi zaman önce sonucu, sonra koşulu söyleyebilir: «Adaylara duyuru yapılır, sınav yeri değişirse.» Bu sıra değişikliği gerektirme yönünü tersine çevirmez; söz edilen koşul yine yer değişikliğidir. Benzer biçimde «Sınav yeri değiştiğinde adaylara duyuru yapılır» ifadesi, belirtilen düzen içinde yer değişikliği gerçekleştiği her durumda duyurunun yapılacağı

anlamıyla modellenebilir. Ancak gündelik dilde «ise» bazen varsayım, dilek veya karşılaştırma görevinde de bulunur; her kullanımı otomatik olarak biçimsel bir mantık bağıntısı sayılmamalıdır.

$$p \Rightarrow q$$

Anlamı: p gerçekleşirse q da gerçekleşmelidir; p, q'yu gerektirir.

Koşullar: İlişki iki değeri belirli yargı için ve metinde tanımlanan bağlamda kullanılır. q ⇒ p bağıntısı kendiliğinden verilmiş değildir.

3. Gerekli ve yeterli koşulların farklı rolleri

Bir koşulun yeterli olması, o koşul sağlandığında hedef sonucun garanti edilmesidir. «Belge elektronik imzayla onaylanmışsa kayıt tamamlanmış sayılır» kuralında elektronik imzayla onay, kayıt tamamlama bakımından yeterli koşuldur. Kayıt başka bir yolla da tamamlanabiliyorsa elektronik imzalı onay zorunlu değildir. Yeterlilik, başka yolların bulunmadığını bildirmez.

Gerekli koşul ise hedef sonucun gerçekleşmesi için mutlaka bulunması gereken durumdur. «Sisteme giriş yapılabilmesi için kimlik doğrulaması zorunludur» cümlesinde giriş yapılması, kimlik doğrulamasının yapılmış olmasını gerektirir. Doğrulama bulunmadığında giriş mümkün değildir. Ancak doğrulamanın yapılmış olması tek başına girişi garanti etmez; örneğin hesap yetkisi de aranabilir. Burada yön «giriş ⇒ doğrulama» biçimindedir; «doğrulama ⇒ giriş» değildir.

Yeterli koşulun yeterliliği ile gerekli koşulun gerekliliği karşılıklı değil, ilgili hedefe göre tanımlanır. p ⇒ q doğruysa p, q için yeterli; q ise p için gerekli koşuldur. Başka bir ifadeyle q'nun gerçekleşmesi p'nin dışında birçok kaynaktan gelebilir, fakat p gerçekleşmişse q yok sayılamaz. Sözel metinlerde ters çıkarım yanılgılarının çoğu bu iki rolün karıştırılmasından kaynaklanır.

Gerekli ve yeterli koşulun sözel karşılığı

Sözel yapı	Sembolik yön	Doğru okuma
p olursa q olur	p ⇒ q	p, q için yeterlidir
q için p gereklidir	q ⇒ p	p, q için gereklidir
q yalnızca p olduğunda gerçekleşir	q ⇒ p	q, p bulunmadan gerçekleşemez
p, q için yeterlidir	p ⇒ q	p gerçekleştiğinde q zorunludur
p, q için gereklidir	q ⇒ p	q gerçekleştiğinde p zorunludur
p, q için hem gerekli hem yeterlidir	p ⇔ q	İki yönde gerektirme vardır

4. «Yalnızca», «ancak» ve «olmadıkça» ifadelerinin yönü

Koşullu cümleleri çözümlerken küçük görünen sözcükler mantıksal yönü değiştirebilir. «Yalnızca eğitimi tamamlayanlar sertifika alabilir» cümlesi, sertifika alan birinin eğitimi tamamlamış olmasını zorunlu kılar; sertifika ⇒ eğitim bağıntısını verir. Eğitimi tamamlayan herkesin sertifika aldığı sonucu ise bu cümlede yoktur. «Eğitimi tamamlayan herkes sertifika alır» ifadesi bunun ters yönünü, eğitim ⇒ sertifika bağıntısını bildirir. İki ifade birlikte verilirse çift yönlü ilişki doğar.

«Ancak» sözcüğünün bağlama göre iki kullanımı vardır. «Yalnızca» anlamındaki «Rapor ancak müdür onayıyla yayımlanır» sözü yayın ⇒ müdür onayı ilişkisini verir. Buna karşılık «Rapor hazırdı ancak yayımlanmadı»

cümlesinde «ancak» karşıtlık kurar; bir ön koşul belirlemez. Tek bir sözcüğe bakarak sembol atamak bu nedenle güvenilir değildir. «Onay olmadıkça rapor yayımlanmaz» ifadesi, yayımın olabilmesi için onayın gerekli olduğunu belirtir; mantıksal karşılığı yine yayın ⇒ onaydır.

«p olması, q için zorunludur» cümlesi p'yi q'nun koşulu yapar; q ⇒ p yazılır. «p olursa q mutlaka olur» ise p ⇒ q'dur. «p, q olmadığı sürece gerçekleşmez» cümlesi p ⇒ q yönündedir: q bulunmuyorsa p de yoktur. Bu sözel dönüşümlerde hangi olayın gerçekleşmesinin engellendiği ile hangi durumun engeli kaldıran zorunlu koşul olduğu ayrı ayrı belirlenmelidir.

5. Koşullu önermenin doğruluk düzeni

Biçimsel mantıkta p ⇒ q önermesi yalnız p doğru, q yanlış olduğunda yanlış kabul edilir. Çünkü önerme, p'nin gerçekleşip q'nun gerçekleşmemesi durumunu dışlamaktadır. p ile q ikisi de doğruysa kural ihlal edilmemiştir. p yanlışken q'nun doğru ya da yanlış olması da kuralın yasakladığı durumu oluşturmaz. Buna maddi koşulun doğruluk düzeni denir; gündelik neden-sonuç anlamıyla her zaman birebir örtüşmez.

Örneğin bir sistem kuralı «Yönetici onayı varsa rapor gönderilir» şeklinde olsun. Onay var ve rapor gönderilmemişse kural çiğnenmiştir. Onay yok ama rapor başka bir yasal süreçle gönderilmişse bu tek yönlü kural kendi başına çiğnenmiş olmaz. Onay da gönderim de yoksa yine koşulun yasakladığı «onay varken gönderimsizlik» durumu oluşmaz. Bu mantıksal değerlendirme, gerçek bir kurumda böyle bir gönderimin mutlaka izinli olduğu anlamına gelmez; yalnız verilen tek kural bakımından yapılan çıkarımı gösterir.

p ⇒ q önermesinin doğruluk durumları

p	q	p ⇒ q	Yorum
Doğru	Doğru	Doğru	Koşul gerçekleşmiş, sonucu da gerçekleşmiştir
Doğru	Yanlış	Yanlış	Koşul gerçekleşmiş, gerekli sonuç gerçekleşmemiştir
Yanlış	Doğru	Doğru	Sonuç başka nedenle de gerçekleşebilir
Yanlış	Yanlış	Doğru	Koşul işlemediği için tek yönlü kural ihlal edilmemiştir

6. Ön koşul gerçekleştiğinde sonuç çıkarma

Koşullu önermelerin en doğrudan geçerli kullanımında önce p ⇒ q kuralı, ardından p'nin gerçekleştiği bilgisi verilir. Bu iki bilgi birlikte q sonucunu zorunlu kılar. Mantıkta bu akıl yürütme biçimi «öncülü doğrulama» ya da modus ponens olarak adlandırılır. Kullanılacak olayların gerçekten aynı kişi, işlem ve zamanla ilgili olmasına dikkat edilmelidir.

Örneğin temsili bir işlem akışında «Dosya son kontrolden geçerse arşiv listesine eklenir» kuralı ve «K dosyası son kontrolden geçti» bilgisi varsa K dosyasının listeye eklendiği sonucu çıkar. Burada listeye ekleme gerçekte yerine getirilmemişse kuralın ihlal edildiği anlaşılır; fakat verilen kuralların eksiksiz uygulandığı varsayımı altında mantıksal sonuç değişmez. «L dosyası son kontrolden geçmedi» bilgisi ise onun listeye eklenip eklenmediğini belirlemez. Aynı modelde ön koşulu doğrulama ile ön koşulun gerçekleşmemesini gözlemleme farklı bilgi güçlerine sahiptir.

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

Anlamı: Bir koşullu kural ile ön koşulun gerçekleşmesi birlikte verildiğinde sonuç zorunludur (modus ponens).

Koşullar: Soldaki «ve» iki ayrı verilen bilginin birlikte kabul edildiğini anlatır. Her p ve q aynı bağlamın yargılarıdır.

7. Sonucun yokluğundan ön koşulun yokluğunu çıkarma

İkinci temel geçerli çıkarım, p ⇒ q kuralıyla q'nun gerçekleşmediği bilgisinden p'nin de gerçekleşmediği sonucuna ulaşmaktır. «Son kontrol varsa arşiv listesi güncellenir» kuralı kesin kabul edildiğinde «arşiv listesi güncellenmedi» bilgisi son kontrolün yapılamadığını gösterir. Çünkü son kontrol yapılmış olsaydı güncelleme zorunlu olacaktı. Bu akıl yürütmeye «sonucu değilleme» ya da modus tollens denir.

Bu yöntem, görünen sonucun eksikliğini bir neden kanıtı gibi kullanırken dikkatle uygulanmalıdır: Önermede sözü edilen sonucun tam olarak ne olduğu korunmalıdır. «Sisteme bildirim gönderildi» ile «bildirim alıcıya ulaştı» farklı yargılardır. Kural gönderim hakkındaysa alıcıya ulaşmama bilgisi tek başına gönderim yapılmadığını göstermez. Sonucu değilleme yalnızca aynı q önermesinin değili verildiğinde geçerlidir. Ayrıca kuralın «bazen», «genellikle» veya «uygun görülürse» gibi kesin olmayan bir ifade içermesi, doğrudan biçimsel gerektirme kurulmasına engel olabilir.

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$$

Anlamı: Sonuç yoksa onu zorunlu kılan ön koşul da gerçekleşmemiştir (modus tollens).

Koşullar: Kuralın kesin gerektirme olduğu ve ¬q bilgisinin aynı sonuca ilişkin olduğu kabul edilir.

8. Karşıt, ters ve karşıt ters önermelerin ayrılması

Bir koşullu önermenin yönü veya bileşenlerinin olumlu-olumsuz biçimi değiştirilerek farklı önermeler kurulabilir. p ⇒ q'nun karşıtı q ⇒ p, tersi ¬p ⇒ ¬q, karşıt tersi ise ¬q ⇒ ¬p biçimindedir. Günlük dilde «tersi» sözcüğü bu üç farklı dönüşümü anlatmak için gelişigüzel kullanılabildiğinden teknik ayrımlar açık tutulmalıdır. Karşıt ters, başlangıç önermesiyle eşdeğer olan dönüşümdür; karşıt ve ters ise başlangıç önermesinden tek başına çıkarılamaz.

«Eğitim tamamlanırsa erişim belgesi açılır» başlangıç önermesi için karşıt «Erişim belgesi açılırsa eğitim tamamlanmıştır»; ters «Eğitim tamamlanmazsa erişim belgesi açılmaz»; karşıt ters ise «Erişim belgesi açılmamışsa eğitim tamamlanmamıştır» biçimindedir. Kural eğitim dışındaki erişim yollarını yasaklamadığı için karşıt ile ters güvenli değildir. Karşıt ters ise başlangıç kuralının aynı dışlama bilgisini farklı yönde söyler.

Bir koşullu önermenin dört biçimi

Biçim	Sembolik gösterim	Başlangıç önermesiyle ilişkisi
Başlangıç	p ⇒ q	Verilen koşul
Karşıt	q ⇒ p	Ek bilgi yoksa zorunlu değil
Ters	¬p ⇒ ¬q	Ek bilgi yoksa zorunlu değil
Karşıt ters	¬q ⇒ ¬p	Başlangıçla mantıksal olarak eşdeğer

9. Karşıt tersin geçerliliği neden korunur?

«Dosya denetlendiğinde rapor oluşturulur» kuralının yasakladığı tek durum, denetim yapılmışken raporun oluşmamasıdır. Aynı yasak «Rapor oluşmamışsa dosya denetlenmemiştir» sözünde de korunur. Denetim yapılmış bir dosya için raporun yokluğu bu iki cümlenin ikisini de yanlışlar; öteki durumlarda ikisi de ihlal edilmez. Eşdeğerliğin nedeni yalnız söz dizimi benzerliği değil, aynı olasılıkların dışlanmasıdır.

Karşıt ve ters önermeler ise ayrı bir grupta eşdeğerdir; ikisi de p ile q arasındaki öbür gerektirme yönünü, farklı bir anlatımla ifade eder. Ancak karşıtın tersle eşdeğer olması, başlangıç koşuluyla da eşdeğer olduğu anlamına gelmez. Örneğin erişim belgesinin eğitim dışında yönetici istisnasıyla da açıldığı bir düzen, p ⇒ q'yu korur ama q ⇒ p'yi yanlışlayabilir. Bu tek karşı örnek hem karşıtın hem de tersin başlangıçtan zorunlu olarak çıkmadığını gösterir.

10. Sonucu doğrulama ve ön koşulu reddetme yanılgıları

«Eğitim tamamlanırsa sertifika düzenlenir» ve «Sertifika düzenlendi» bilgilerinden «Eğitim tamamlandı» sonucuna ulaşmak geçerli değildir. Sertifika için eğitim dışı bir istisna bulunabilir. Sonucu doğrulama yanılgısı, tek yönlü ilişkinin tersini kanıtsız kabul etmekten doğar. Eğitim tamamlandığı hâlde sertifika düzenlenmeyen bir durum kuralla çelişirken, eğitim tamamlanmadığı hâlde başka gerekçeyle sertifika düzenlenmiş bir durum bu tek yönlü kuralı ihlal etmez.

Diğer yaygın hata ön koşulu reddetmedir: «Eğitim tamamlanmadı, öyleyse sertifika düzenlenmedi» çıkarımı da ek bir yasak bulunmadıkça geçersizdir. Her iki hata, bir yargının yanlış olduğunu ispatlamakla o yargının verilmediğini göstermek arasındaki ayrımı gerektirir. Geçersiz çıkarımın sonucunun gerçek hayatta mutlaka yanlış olması gerekmez; sorun, mevcut öncüllerin bu sonucu zorunlu kılmamasıdır.

Yaygın çıkarım biçimlerinin karşılaştırılması

Kural ve ek bilgi	Ulaşılan sonuç	Mantıksal değerlendirme
p ⇒ q; p	q	Geçerli: ön koşul doğrulandı
p ⇒ q; ¬q	¬p	Geçerli: sonuç yokluğu kullanıldı
p ⇒ q; q	p	Geçersiz: sonuç başka nedenle oluşabilir
p ⇒ q; ¬p	¬q	Geçersiz: başka yoldan sonuç oluşabilir

11. İki yönlü koşul: «Ancak ve ancak»

İki yönlü koşul, p ⇒ q ve q ⇒ p ilişkilerinin birlikte verilmesidir. «Kayıt tamamlanmıştır ancak ve ancak ödeme onayı alınmıştır» biçimindeki özel bir sistem kuralı, ödeme onayı bulunan her kaydın tamamlandığını ve tamamlanan her kayıtta ödeme onayı bulunduğunu aynı anda bildirir. Böyle bir düzenin gerçek hayattaki bütün işlemler için geçerli olduğu söylenmez; yalnız bu iki yönlü şartın açıkça tanımlandığı model anlatılmaktadır.

p ⇔ q gösterimi, p ile q'nun aynı doğruluk değerini almasını gerektirir. İkisi birden doğru olduğunda da ikisi birden yanlış olduğunda da iki yönlü koşul sağlanır; biri doğru, diğeri yanlışsa sağlanmaz. Bu ilişki, gerekli ve yeterli koşulların aynı bağlamda birleşmesidir. Bir yönde yalnız yeterlilik, diğer yönde yalnız gereklilik olduğu unutulursa «ancak ve ancak» gereğinden zayıf veya güçlü yorumlanabilir.

Tek yönlü ve iki yönlü koşullardaki bilgi gücü

Verilen ilişki	p doğruysa	q doğruysa	p yanlışsa
p ⇒ q	q zorunlu	p belirsiz	q belirsiz
q ⇒ p	q belirsiz	p zorunlu	q yanlıştır
p ⇔ q	q zorunlu	p zorunlu	q yanlıştır

12. «Ve», «veya» ve «ya ... ya da» ile birleşen koşullar

Bileşik önermelerde birden fazla koşul aynı anda bulunabilir. «Kimlik doğrulaması yapıldıysa ve hesap yetkisi varsa giriş açılır» cümlesinin ön koşulu iki parçalıdır. Yalnız doğrulama yapılmış olması yetmez; yetki de bulunmalıdır. Böyle bir kural (p ∧ q) ⇒ r biçiminde gösterilir. p ile q'nun ikisi de doğruyken r zorunludur; bunlardan biri eksikse tek başına bu kural r'nin yanlış olacağını söylemez. Sistem başka bir giriş yoluna izin veriyorsa giriş yine mümkün olabilir.

«Dosya A veya B birimince incelenirse rapor hazırlanır» biçimindeki bir kuralda «veya» olağan kapsayıcı anlamındaysa A'nın, B'nin ya da her ikisinin inceleme yapması ön koşulu sağlar. Buna karşılık «ya A ya B, fakat ikisi birden değil» ifadesi dışlayıcı seçim bildirir. Kapsayıcı «veya» ile dışlayıcı «ya ... ya da» arasında yalnız üslup farkı yoktur; aynı anda iki durumun gerçekleşmesine izin verilip verilmediği değişir. Gündelik dilde «ya ... ya da» her zaman biçimsel dışlayıcı anlam taşımayabildiği için metnin açık sınırı esas alınmalıdır.

Bileşik koşul bağlaçlarının temel farkları

Yapı	Doğru olma koşulu	Dikkat edilmesi gereken
p ∧ q (ve)	p ve q ikisi de doğru	Tek bir doğru bileşen yetmez
p ∨ q (kapsayıcı veya)	En az biri doğru	İkisinin birlikte doğru olması mümkündür
p ya da q, ama ikisi birden değil	Tam olarak biri doğru	Aynı anda iki doğru durumu dışlanır
(p ∧ q) ⇒ r	p ve q birlikte doğruysa r gerekir	Bir koşul eksikken ¬r otomatik çıkmaz
(p ∨ q) ⇒ r	En az bir koşul doğruysa r gerekir	Tek tek p ve q, r için yeterlidir

13. Bir önermenin değili ile koşullu önermenin değili

Değilleme, bir önermenin doğruluk değerini tersine çevirmektir. p «Dosya onaylanmıştır» ise ¬p «Dosya onaylanmamıştır» anlamına gelir. Ancak p ⇒ q biçimindeki bütün bir koşullu önermeyi değillemek, «p olmazsa q olmaz» demek değildir. Koşullu ilişkinin yanlış olduğu tek durum p'nin doğru ve q'nun yanlış olmasıdır. Bu nedenle «p ise q» ifadesinin değili, «p gerçekleşir ve q gerçekleşmez» biçimindedir.

Örneğin «Denetim tamamlanırsa sonuç sisteme işlenir» kuralının geçersiz olduğunu göstermek için denetimin gerçekten tamamlandığı, fakat sonucun işlenmediği bir olay yeterlidir. Denetimin hiç yapılmaması kuralın yanlış olduğunu kanıtlamaz. Başlangıç önermesinin değilini bulmak ile karşıtını ya da tersini oluşturmak farklı işlemlerdir. Birincisi bütün önermenin yanlışlandığı durumu belirtir; diğerleri ise ayrı koşullu önermeler kurar.

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

Anlamı: «p ise q» kuralının yanlışlanması için p'nin gerçekleşip q'nun gerçekleşmemesi gerekir.

Koşullar: p ve q iki değerli önermelerdir; olumsuzluk bütün koşullu yapıya uygulanır.

14. Birden çok koşullu önermeyi zincirleme

Aynı olay hakkında birbirini izleyen koşullar verildiğinde sonuç zinciri kurulabilir. «Başvuru kabul edilirse dosya açılır» ve «Dosya açılırsa inceleme takvimine girer» kuralları birlikte, «Başvuru kabul edilirse inceleme takvimine girer» sonucunu gerektirir. p ⇒ q ve q ⇒ r önermelerinden p ⇒ r elde edilir. Aradaki q, iki kuralın ortak bağlantısıdır; q'nun ifade ettiği işlemin her iki cümlede de aynı olması gerekir.

Zincirde başlangıcın gerçekleştiği biliniyorsa ara olaylar sırayla zorunlu hâle gelir. Örneğin Arda'nın başvurusu kabul edilmişse, dosyası açılır ve inceleme takvimine alınır. Fakat yalnız Arda'nın inceleme takviminde bulunduğunu bilmek, kabulün mutlaka bu yöntemle gerçekleştiğini kanıtlamaz. Takvime başka yollardan girme olasılığı yasaklanmamışsa zinciri geriye doğru yürütmek geçersizdir. Buna karşılık son olayın gerçekleşmediği kesin biliniyorsa karşıt ters yöntemiyle q'nun ve ardından p'nin gerçekleşmediği çıkarılabilir.

$$[(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Anlamı: İki koşullu önermede ortak ara koşul varsa çıkarım yönü zincirlenir.

Koşullar: Her kullanımda q aynı yargıyı temsil etmeli; kurallar aynı bağlamda geçerli olmalıdır.

15. İki kollu koşullarda ortak sonuca ulaşma

Bazen farklı ön koşullar aynı sonucu doğurur. «Başvuru çevrim içi teslim edilirse kayıt numarası verilir» ve «Başvuru elden teslim edilirse kayıt numarası verilir» kuralları, iki teslim biçiminden hangisi gerçekleşirse gerçekleşsin kayıt numarası verilmesini zorunlu kılar. Bu durum «çevrim içi veya elden teslim ⇒ kayıt numarası» biçiminde birleştirilebilir. Ancak iki kural da tek yönlüdür; kayıt numarası bulunması tek başına teslimin bu iki yoldan biriyle yapıldığını kanıtlamaz. Diğer yollar açık bırakılmış olabilir.

Aynı sonucun birden fazla yeterli koşulu olması, hiçbirinin tek başına gerekli olmadığını gösteren açıklayıcı bir örnektir. Bir koşulun yeterli olduğunu belirtmek için diğer bütün ihtimalleri tüketmeye gerek yoktur. Buna karşılık «kayıt numarası ancak bu iki yoldan biriyle verilir» bilgisi ayrıca eklenirse sonucun başka bir yoldan oluşması dışlanır. Sözel muhakemede birden çok yeterli koşulla bütün olası nedenlerin eksiksiz sayıldığı iddiası birbirine karıştırılmamalıdır.

16. Kural ve gerçekleşme bilgisini ayrı tutma

Koşullu önermenin doğru olarak verilmesi, ön koşulun fiilen gerçekleştiğini söylemez. «Onaylanan her dosyaya erişim tanımlanır» ifadesi bir kuraldır; belirli bir dosyanın onaylandığı bilgisi verilmemiştir. «D dosyasının erişimi tanımlanmış» cümlesi ise gerçekleşme bilgisi verir, fakat onayın kesin yapıldığını bu tek kuraldan çıkaramaz. Kural ile somut olay aynı anda kullanıldığında, yalnız gerçekten verilmiş olaylara ilişkin kesin sonuç üretilebilir.

Bu ayrım, yapılması planlanan eylemlerle yapılmış eylemlerin de karıştırılmasını önler. «Yarın inceleme yapılırsa tutanak düzenlenecek» cümlesi henüz inceleme yapıldığını bildirmez. «İnceleme için görevlendirme yapıldı» bilgisi de incelemenin tamamlandığını garanti etmez. Dolayısıyla bir ifadenin gelecek zamanlı olması, koşulun doğruluğunu güçlendiren kanıt değildir. Her yargının hangi zaman dilimine ve gerçekleşme durumuna ait olduğu ayrıca gösterilmelidir.

17. Özgün birleşik örnek: Denetim sürecinde sonuçların izlenmesi

Temsili bir dijital süreçte dört olay tanımlansın: A «ön inceleme tamamlandı», B «sorumlu birim onay verdi», C «kayıt yayımlandı» ve D «ilgili kişiye bildirim gönderildi». Geçerli kurallar A ⇒ B, B ⇒ C ve D ⇒ C olsun. Bir başka deyişle ön inceleme tamamlanırsa onay verilir; onay verilirse kayıt yayımlanır; bildirim gönderilirse kayıt yayımlanmış olmalıdır. Burada C, hem B hem D için gerekli sonuçtur; fakat kayıt yayımlandığında B'nin veya D'nin kesin gerçekleştiği ayrı bir kural olmadan söylenemez.

İlk durumda «kayıt yayımlanmadı» (¬C) bilgisi verilsin. B ⇒ C kuralının karşıt tersinden ¬B; ardından A ⇒ B kuralından ¬A çıkar. D ⇒ C kuralının karşıt tersi de ¬D sonucunu verir. Böylece aynı olumsuz sonuç, iki ayrı neden zincirini kapatır: Kayıt yayımlanmadıysa onay yoktur, ön inceleme tamamlanmamıştır ve bildirim de gönderilmemiştir. Bu, belirtilen temsili kurallara bağlı mantıksal çıkarımdır; gerçek kurumların işlem süreçleri hakkında bir genel tespit değildir.

İkinci durumda yalnız C'nin gerçekleştiği bilgisi bulunsun. Bu kez A, B ve D hakkında kesin bir sonuç yoktur. Örneğin A, B ve D'nin tümünün gerçekleşmediği ama C'nin gerçekleştiği bir düzen tek yönlü kuralları bozmaz; C'nin yayımlanması başka bir yoldan gelmiş olabilir. A ve B gerçekleşip D gerçekleşmediğinde de kurallar sağlanır; A, B ve D'nin tümünün gerçekleştiği durumda da sağlanır. Üç farklı geçerli düzenin varlığı, «kayıt yayımlandı, öyleyse onay verildi» gibi yargıların zorunlu olmadığını açıkça gösterir.

Denetim sürecindeki iki olay bilgisinin mantıksal etkisi

Verilen olay	Zorunlu çıkarım	Açık kalan bilgi
¬C: Kayıt yayımlanmadı	¬A, ¬B, ¬D	Bu dört olay arasında belirlenmemiş olumlu durum kalmaz
C: Kayıt yayımlandı	Yalnız C'nin gerçekleştiği kesindir	A, B, D'nin her biri ayrıca belirlenmelidir
A: Ön inceleme tamamlandı	B ve C gerçekleşir	D'nin gerçekleşip gerçekleşmediği bilinmez
D: Bildirim gönderildi	C gerçekleşir	A ve B'nin gerçekleşmesi zorunlu değildir

18. Doğru olabilecek durum ile zorunlu sonucu ayırma

Bir bilgi kümesinden çıkan sonucun «mümkün» ya da «kesin» olması birbirinden farklıdır. Mümkünlük için kurallarla uyumlu en az bir gerçekleşme düzeni bulunması yeterlidir. Zorunluluk içinse kurallarla uyumlu bütün düzenlerde aynı sonucun bulunması gerekir. Önceki süreç örneğinde C doğruyken A'nın doğru olduğu bir model de yanlış olduğu bir model de mümkündür. Bu nedenle «A doğrudur» ne zorunludur ne de kurallara aykırıdır; yalnızca belirsizdir.

Bir karşı örnek zorunlu sonucu çürütmek için yeterlidir. «Kayıt yayımlandıysa ön inceleme tamamlanmıştır» iddiasına karşı, C doğru, A yanlış, B yanlış ve D yanlış olan düzen gösterilebilir. Bu düzen belirtilen A ⇒ B, B ⇒ C ve D ⇒ C kurallarını ihlal etmediği için iddianın zorunlu olmadığı kanıtlanır. Buna karşılık «C yanlışsa A yanlıştır» sonucu bütün kurallı modellerde geçerlidir. Tekil bir örnek ile bütün modeller hakkında hüküm verme arasındaki fark, koşullu muhakemenin güvenilirliğini belirler.

19. Çelişki, bilgi yetersizliği ve koşulun ihlali

Birbiriyle uyumlu olabilecek iki bilgi, birbirinin karşıtı gibi göründüğünde hemen çelişki sayılmamalıdır. «Belge onaylanırsa kayda girer» ve «Bu belge onaylanmadı» ifadeleri, kayda girip girmediği hakkında eksik bilgi bırakır. Kural ile gerçekleşme bilgisi birlikte doğrudur; herhangi bir tutarsızlık yoktur. Çelişki ancak onayın bulunduğu ve kayda girişin bulunmadığı bilgileri aynı bağlamda birlikte ileri sürülürse oluşur.

Koşulun ihlali ile koşulun başlangıçta verilmemiş olması da ayrı şeylerdir. Yalnız p ⇒ q kuralı bulunduğunda p'nin ve q'nun değerleri belirsizdir. Ek bir p bilgisi gelirse q zorunlu olur. Buna rağmen ¬q da verilirse bilgiler tutarsızlaşır. Bir metnin çelişkili olması, ondan güvenilir tekil bir fiilî olay dizisi çıkarılabileceği anlamına gelmez; önce aynı kişi, an ve işlem kastedilip kastedilmediği kontrol edilmelidir. Bağlamlar farklıysa görünürdeki çatışma gerçek çelişki olmayabilir.

Koşullu kuralın yanında gelen bilgilerin durumu

Verilenler	Mantıksal değerlendirme	Gerekçe
p ⇒ q; p; q	Tutarlı	Ön koşul ve zorunlu sonuç birlikte doğru
p ⇒ q; p; ¬q	Tutarsız	Kuralın yasakladığı tek gerçekleşme durumu var
p ⇒ q; ¬p; q	Tutarlı	q başka nedenle gerçekleşmiş olabilir
p ⇒ q; ¬p; ¬q	Tutarlı	Kuralın ön koşulu gerçekleşmedi
p ⇒ q; q	Eksik bilgi	p'nin doğru veya yanlış olması mümkün

20. «Her», «bazı», «hiçbir» ve «en az bir» ifadelerinin koşullarla ilişkisi

Koşullu önermeler bazen tek bir nesneye değil, belirli bir topluluğun bütün üyelerine uygulanır. «Her denetçi güvenlik eğitimini tamamlamıştır» cümlesi, denetçi olan herhangi bir kişinin eğitimini tamamlamış olduğunu bildirir; denetçi ⇒ eğitim ilişkisi bütün denetçiler için geçerlidir. Fakat «Eğitim tamamlayan herkes denetçidir» sonucunu vermez. «Bazı denetçiler eğitimini tamamlamıştır» ise yalnız en az bir denetçinin bulunduğunu ve belirtilen özelliği taşıdığını söyler; tüm denetçiler hakkında kural kurmaz.

«Hiçbir denetçi aynı anda iki ayrı komisyonun üyesi değildir» ifadesi, her denetçi için çift üyeliği yasaklar. Buna karşılık «Bazı denetçiler iki komisyonda birden görev almaz» çok daha zayıf bir bilgidir. Bir ifadenin «her» veya «hiçbir» ile sınırlandırılması, boş küme ve varlık bilgisiyle bağlantılıdır: «Her A, B'dir» sözü A grubunda mutlaka bir kişi bulunduğunu tek başına kanıtlamaz. «Bazı A'lar B'dir» ifadesiyse en az bir A'nın gerçekten var olduğunu belirtir. Bir çıkarımın varlık iddiası içerip içermediği ayrıca değerlendirilmelidir.

Niceleyici ifadelerde kapsamın korunması

İfade	Kesin içerik	Doğrudan çıkarılamayan
Her A, B'dir	A olan herkes B'dir	B olan herkes A'dır
Bazı A'lar B'dir	En az bir A aynı zamanda B'dir	Bütün A'lar B'dir
Hiçbir A, B değildir	A ile B kesişmez	A veya B kümesi mutlaka doludur
Bazı A'lar B değildir	En az bir A, B dışında kalır	Hiçbir A, B değildir
Yalnızca A olanlar B'dir	B olan herkes A'dır	Her A'nın B olduğu

21. «En az», «en fazla» ve «tam olarak» koşullarının değerlendirilmesi

Sözel koşullarda miktar belirten sınırlar çıkarımın kapsamını etkiler. «En az iki katılımcı eğitim almıştır» bilgisi, iki kişinin eğitim aldığını garanti eder; fakat katılımcı sayısının kesin iki olduğunu söylemez. «En fazla iki katılımcı eğitim almıştır» bilgisi, eğitim alanların sıfır, bir veya iki kişi olmasına izin verir. «Tam olarak iki katılımcı eğitim almıştır» ise hem alt hem üst sınırı iki yapar.

Örneğin dört kişilik bir kurulda «En fazla bir kişi toplantıya geç katılır» ve «Ali geç katılmıştır» bilgileri birlikte bulunursa Bora, Cem ve Deniz'in geç katılmadığı sonucu zorunludur. Çünkü birinci koşuldaki tek kişilik üst sınır Ali ile dolmuştur. Ancak yalnız «Ali geç katılmamıştır» bilgisi verildiğinde diğerlerinin durumları açık kalır. Bu çıkarım doğrudan koşullu önermelerin sayısal bir kısıtla birleşmesine dayanır; detaylı çok değişkenli tablo yöntemi sonraki konularda ayrıca ele alınacaktır.

22. Zaman, sıra ve neden bağını koşullu gerektirmeden ayırma

«Bildirim gönderildikten sonra kayıt kapatıldı» cümlesi iki olayın zaman sırasını belirtir; her bildirimden sonra her kaydın mutlaka kapanacağına ilişkin genel bir kural kurmaz. Benzer biçimde «Sistem güncellendiği için işlem hızlandı» sözü bir neden açıklaması ileri sürer; bu açıklama, sistemin her güncellendiği durumda aynı hız artışının zorunlu olacağını tek başına ispatlamaz. Zaman sırası, neden-sonuç iddiası ve koşullu zorunluluk farklı ilişkiler olarak okunmalıdır.

«Dosya onaylandığında bildirimi gönder» biçimindeki iş talimatı ise normatif bir kuraldır. Bildirimin gönderilmiş olması, onayın fiilen yapıldığını bu talimata dayanarak kanıtlamaz; başka bir talimat ya da hata olabilir. Ayrıca talimatın geçerliliği ile yerine getirilmesi ayrıdır. Ders anlatımında kullanılan biçimsel mantık, böyle bir kuralın eksiksiz uygulandığı kabul edildiğinde hangi sonuçların çıkarılacağını inceler. Gerçek dünyadaki uygulama hakkında kesin hüküm verebilmek için olay kayıtları gerekir.

23. Alternatif nedenler ve dışlanan istisnalar

Bir sonucun tek nedeni olduğu açıkça belirtilmemişse, verilen yeterli koşul dışında başka yeterli koşullar bulunabilir. «Eğitimi bitirenlerin erişim yetkisi açılır» ifadesi eğitim dışındaki yetki yollarını dışlamaz. «Erişim yetkisi yalnız eğitimi bitirenlere açılır» ifadesi ise eğitim olmadan erişime izin vermez; fakat eğitimi bitirenlerin hepsine yetki verileceğini yine garanti etmez. Aynı olay hakkında ilk iki kural birlikte belirtilirse erişim ile eğitimi tamamlama eşdeğer hâle gelir.

İstisna içeren kuralların anlamı baştan korunmalıdır. «Onay varsa kayıt yayımlanır; acil durumlarda yetkili kişi ayrıca yayımlayabilir» biçimindeki bir düzen, onay bulunmadığı hâlde yayın olasılığını açıkça tanır. Buna karşılık «Onay yoksa hiçbir durumda yayımlanamaz» denirse yayın için onayın gerekli olduğu bilgisi eklenmiş olur. Sözel muhakemede gerçek hayatta olabilecek istisnaları keyfî biçimde eklemek de metindeki açık istisnaları yok saymak da hatalıdır. İzin verilen alternatifler yalnız verilen koşulların sınırları içinde ele alınmalıdır.

24. Bir çıkarımın sağlamlığını karşı örnekle sınama

Bir çıkarımın geçerli olup olmadığını denetlemenin en açık yollarından biri, verilen bütün kuralları koruyup önerilen sonucu yanlış kılan en az bir durum aramaktır. Böyle bir durum bulunabiliyorsa sonuç zorunlu değildir. Örneğin «Dosya güncellenirse kullanıcılara bildirim yapılır» kuralı altında «Bildirim yapıldı, o hâlde dosya güncellendi» çıkarımını sınamak için «güncelleme yapılmadı ama bakım duyurusu gönderildi» durumu düşünülür. Bu düzen verilen tek yönlü kurala aykırı değildir; dolayısıyla zorunlu çıkarımın yanlışlığı görülür.

Geçerli çıkarım ise aynı denetimden geçer: «Dosya güncellendi ve bildirim yapılmadı» durumu, güncelleme ⇒ bildirim kuralını doğrudan çiğner. Bu nedenle «güncelleme var, bildirim de vardır» çıkarımını yanlışlayan kurallı bir düzen kurulamaz. Karşı örnek arama bir tahmin yöntemi değil, mantıksal zorunluluğun kapsamını yoklama yöntemidir. Tek bir geçerli durumun bulunması mümkünlüğü kanıtlar; tek bir kurala aykırı durumun bulunması ise o özel durumun geçersizliğini gösterir. Bütün çözümleri sistematik tabloyla listeleme konusu GY-07.04'te genişletilecektir.

25. Çoklu kural altında alternatifleri ve kesin sonuçları denetleme

Üç bağımsız başlangıç kuralı aynı sonuca bağlandığında, sonuç gerçekleşmediği anda bütün başlangıç yolları kapanabilir. «A tipi başvuru kabul edilirse kayıt açılır», «B tipi başvuru kabul edilirse kayıt açılır» ve «C tipi başvuru kabul edilirse kayıt açılır» kuralları birlikte düşünülsün. Kayıt açılmadığı kesin biliniyorsa üç tür kabulün de gerçekleşmediği çıkar. Kayıt açılmışsa ise hangi başvuru türünün kabul edildiği, hatta bunlardan herhangi birinin kabul edilip edilmediği bu üç tek yönlü kuraldan belirlenemez. Başka bir kayıt açma yolunun olmadığı da söylenmişse değerlendirme ayrıca değişir.

Sözel bir kurallar dizisi çözümlenirken her aşamada hangi bilgilerin kesin verildiği, hangi sonuçların gerçekten bunlardan çıktığı ve hangi bilgilerin hâlâ seçenek olarak kaldığı ayrılmalıdır. Birbiriyle ilişkili kuralların tümünü aynı anda karşılayan en az bir düzen bulunamıyorsa koşullar tutarsızdır. Birden fazla düzen kalıyorsa kesin sonuçlar bu düzenlerin ortak özelliğiyle sınırlıdır. Bir düzen bulundu diye diğerlerinin yokluğunu veya doğal görünen bir sonuç için mantıksal gerekliliği varsaymak doğru değildir.

26. Koşullu muhakemenin bütünsel değerlendirilmesi

Koşullu bir metni doğru anlamak önce ön koşul ile sonuç arasındaki yönü belirlemeyi, sonra sözcüklerin yüklediği gerekli-yeterli ayrımını korumayı gerektirir. «İse» çoğunlukla tek yönlü gerektirme, «ancak ve ancak» iki yönlü gerektirme, «yalnızca» ile «olmadıkça» ise bağlama göre gerekli koşul sınırı kurar. «Ve» birlikte bulunması gereken şartları, kapsayıcı «veya» ise alternatif yollardan en az birini gösterebilir. Bu parçalar birlikte kullanıldığında mantıksal sonucun gücü tek bir sözcükten değil, bütün kuralların ortak etkisinden doğar.

Son kontrolde şu ölçütler birlikte önem taşır: Önermelerin öznesi, zamanı ve bağlamı aynı mı; kural kesin mi yoksa olasılık mı bildiriyor; çıkarım ok yönünde mi kuruluyor; karşıt ters gerekçesi doğru mu; bir sonucun varlığından nedenin zorunluluğu çıkarılmış mı; bütün alternatiflere uygunluk sınanmış mı? Bu ölçütler, sözel mantığın sonraki tablo oluşturma ve çoklu koşul başlıklarında da kullanılacaktır. Koşullu önermelerin gücü, fazladan varsayım üretmeden verilen bilgiden zorunlu olanı ayırabilmesidir.

> **Koşullu çıkarımda temel güvenlik sınırı** p ⇒ q, p'yi q için yeterli; q'yu p için gerekli kılar. p ile ¬q'nun birlikte gerçekleşmesi bu kuralı ihlal eder. q'dan p'ye ya da ¬p'den ¬q'ya geçmek için ek bilgi gerekir. p ⇒ q ile yalnız ¬q ⇒ ¬p eşdeğerdir; «ancak ve ancak» ise iki yönün açıkça birlikte verilmesidir.

KONU 7.4

TABLO OLUŞTURARAK ÇÖZÜM

Sözel muhakemede verilen bilgiler çoğu zaman tek başına karmaşık değildir; güçlük, farklı kişiler, görevler, günler veya yerler arasında kurulan ilişkilerin aynı anda korunmasından doğar. Uzun bir metnin her koşulunu zihinde tutmaya çalışmak, özellikle bir bilgiden başka bir sonucun çıktığı durumlarda hata riskini artırır. Tablo oluşturma, metindeki ilişkileri görünür ve karşılaştırılabilir bir düzene dönüştürür. Amaç metni daha kısa yazmak değil, her kaydın anlamını belirli bir satır ve sütun kesişiminde izlenebilir kılmaktır.

Bir tablonun iyi kurulmuş olması, sonucun kendiliğinden doğru olduğu anlamına gelmez. Sütunların neyi temsil ettiği, bir hücrenin kesin bilgi mi yoksa henüz bilinmeyen durum mu gösterdiği ve her satıra kaç seçim yapılabileceği açıkça tanımlanmalıdır. Bundan sonra yapılan çıkarımlar, tablodaki boşlukların gelişigüzel doldurulması yerine bütün koşullara göre eleme ve kontrol yoluyla ilerler. Bu bölüm, GY-07.01'de işlenen sıralama kurallarını ve GY-07.02'de açıklanan eşleştirme ilişkilerini yeniden kurmak yerine, bu ilişkileri çözüm boyunca taşıyan tablo tekniğini ayrıntılandırır.

1. Tablo bir gösterimdir; çözümün kendisi değildir

Sözel bir koşul, karşılıklı ilişkiyi cümle olarak ifade eder. Tablo aynı ilişkinin hangi seçenekleri kabul ettiğini, hangilerini dışladığını veya henüz açık bıraktığını gösterir. Örneğin bir kişinin tek bir göreve atanacağı biliniyorsa kişinin satırı ile görevlerin sütunları arasındaki kesişimlerden yalnız biri kesin seçim olabilir. Aynı göreve başka bir kişinin atanıp atanamayacağı ise ayrıca verilen eşleştirme kuralına bağlıdır. Bir görevin tek kişiye ayrıldığı belirtilmemişse, tabloda aynı sütunda birden fazla seçimi otomatik olarak yasaklamak doğru olmaz.

Tablo, koşulların mantıksal sonucunu değiştirmez. Yazılı anlatımda kesin olmayan bir durum, tabloya geçirildiği için kesinleşmez. Bunun tersine, metnin zorunlu kıldığı bir ilişki tabloda boş bırakılmışsa çözüm eksik kalır. Bu nedenle iyi çözüm, sözel ifade ile tabloyu her aşamada birbirine karşı denetler. Tablodaki her işaretin ya başlangıç koşuluna ya da açıkça izah edilebilen bir çıkarıma dayanması gerekir.

2. Önce ilişki türünü tanımak

Tablo seçimi, kaç varlık bulunduğundan önce bunların nasıl ilişkilendiğine göre yapılır. Kişi–görev ilişkisi bire bir olabilir; kişi–grup ilişkisinde aynı grup birden fazla kişiyi alabilir. Gün–etkinlik ilişkisinde bazı günler boş kalabilir veya bir güne birden çok etkinlik sığabilir. Çok özellikli durumlarda ise kişi–şehir ve kişi–yöntem eşleştirmelerini ayrı tablolarda tutmak gerekebilir. Bütün bu durumlara tek bir standart kare tabloyu hiç değiştirmeden uygulamak bilgi kaybına yol açar.

İlişkinin yapısına göre tablo seçimi

Problemdeki ilişki	Uygun tablo	Kontrol edilmesi gereken kural
Her kişi farklı bir göreve atanır	Kişi satırı ve görev sütunu olan eşleştirme matrisi	Her satır ve sütunda bir kesin eşleşme
Kişiler iki ekibe dağıtılır	Kişi satırı ve ekip sütunu olan üyelik tablosu	Ekip kapasitesi ve her kişinin ekip sayısı
Etkinlikler belirli günlere yerleşir	Gün satırı ve etkinlik sütunu veya gün–etkinlik listesi	Günlerin tek ya da çok etkinlik alması
Her kişinin bir şehir ve bir yöntem bilgisi vardır	Ayrı kişi–şehir ve kişi–yöntem tabloları	Üçüncü tür ilişkilerin tablolar arası aktarılması
Birden çok olası düzen kalır	Her geçerli düzeni ayrı satırda gösteren alternatifler tablosu	Aynı koşulları karşılayan bütün seçeneklerin korunması

Bir tablo türünün seçimi çözüm stratejisinin yalnız ilk aşamasıdır. Önemli olan satır ve sütunların her birinin gerçek bir özelliği temsil etmesi ve tabloda bulunmayan bir yasağın eklenmemesidir. Özellikle kapasite, tekrar ve tekillik koşulları tablo çizilirken başta belirtilmelidir.

3. Başlıkları, kapsamı ve adayları doğru belirleme

Bir tabloda önce problemde sayılan varlıkların eksiksiz listesi çıkarılır. Dört kişinin dört görevden birer tanesini aldığı ve görevlerin de birbirinden farklı olduğu bir düzen için dört satır ve dört sütun yeterlidir. Buna karşılık dört kişiden ikisinin aynı görevi üstlenebileceği bir senaryoda sütun sayısı yine dört olabilir; fakat aynı sütunda iki kişinin işaretlenmesi artık başlı başına çelişki değildir. Böyle bir problemde aynı görev birden fazla kez kullanılabiliyor mu, en çok kaç kişi kullanabiliyor ve bütün görevler dolmak zorunda mı sorularının karşılığı açıkça verilmiş olmalıdır.

Kapsam bilgisinin eksikliği önemli bir belirsizliktir. «Üç görüşme üç ayrı günde yapılmıştır» ifadesi üç günün mutlaka art arda geldiğini söylemez. «Dört çalışan iki ekibe ayrılmıştır» ifadesi ekiplerin ikişer kişi olduğunu

kendiliğinden göstermez. Tablo, yalnız belirtilen koşulları taşıdığı sürece doğru temsil olur; okuyucunun olağan işleyiş hakkında yaptığı ek varsayımlar tabloya koşul olarak işlenemez.

4. Hücrelerin dili: kesin, imkânsız ve henüz bilinmiyor

Eşleştirme tablosunda üç durumun ayrı tutulması gerekir. «✓» ilgili eşleşmenin kesin olduğunu; «×» verilen kurallar altında imkânsız olduğunu; «·» ise eşleşmenin hâlâ mümkün olup kesinleşmediğini ifade eder. Boş veya noktalı bir hücre «yanlış» anlamına gelmez. Aynı şekilde, zihinde güçlü görünen bir tahmin, gerekçesi bulunmadıkça «✓» işaretine dönüştürülemez. Bazı çizimlerde eksi, artı veya soru işareti kullanılır; önemli olan sembolün anlamını başta belirleyip sonuna kadar değiştirmemektir.

Bir eşleştirme tablosunda kullanılan temel işaretler

İşaret	Anlamı	Ne zaman işlenir?	Yanlış yorum
✓	Kesin olarak gerçekleşen eşleşme	Doğrudan koşul veya zorunlu çıkarım bulunduğunda	Sadece olası olduğu için seçilmiş saymak
×	Gerçekleşmesi imkânsız eşleşme	Açık dışlama veya dolu tekil satır/sütun nedeniyle	Bilgi bulunmadığından yok saymak
·	Henüz belirlenemeyen seçenek	Ne kesinlik ne dışlama kanıtlandığında	Belirsizliği çelişki sanmak
Birden çok ✓	Çeşitli seçimler aynı satır veya sütunda	Ancak ilişkinin çoklu seçime izin verdiği özel modellerde	Bire bir düzende iki kesin eşleşme kabul etmek

5. Bire bir eşleştirmede satır ve sütun yükümlülüğü

Dört kişi dört ayrı görevi, herkes bir görev alacak ve her görev bir kişiye verilecek biçimde paylaşıyorsa her kişi satırında ve her görev sütununda tam olarak bir «✓» bulunmalıdır. Diğer üç hücre «×» olur. Bu düzen, olası durumların birer birer değerlendirilmesini kolaylaştırır: Bir kişinin görevi kesinleşince ilgili satırdaki diğer görevler ve ilgili sütundaki diğer kişiler elenir. Böylece tek bir doğrulama, iki yönde sonuç üretir.

Bu ilke yalnız bire bir eşleştirme altında geçerlidir. «Dört çalışan üç görev alanından birinde çalışır» koşulunda bazı çalışanların aynı alanda bulunması mümkündür. Satır–sütun yükümlülüğünü bağlamdan ayırıp her tabloda uygulamak, geçerli çözümleri yanlışlıkla elemek demektir.

6. Özgün örnek: dört görev için başlangıç matrisi

Aslı, Baran, Ceren ve Deniz adlı dört çalışanın arşiv, bütçe, eğitim ve planlama görevlerinden yalnız birini üstlendiği; her görevin de farklı bir kişiye verildiği varsayılsın. Verilen bilgiler şöyledir: Baran eğitim görevindedir. Deniz planlama görevindedir. Ceren arşiv görevinde değildir. Bu bilgileri ilk kez tabloya geçirirken doğrudan bilinen iki eşleşme işaretlenir ve tekillikten doğan dışlamalar işlenir. Ceren'in arşiv görevinde olmadığı koşulu da ayrıca yazılır.

Dört görevli örnekte doğrudan bilgiler ve ilk elemeler

Çalışan	Arşiv	Bütçe	Eğitim	Planlama
Aslı	·	·	×	×
Baran	×	×	✓	×
Ceren	×	·	×	×
Deniz	×	×	×	✓

Tablonun üçüncü satırında Ceren'in bütçe görevi dışındaki bütün seçenekleri dışlanmıştır. Dolayısıyla Ceren bütçededir. Bütçe sütunu kapatılınca Aslı'nın bütçe seçeneği de elenir; Aslı'nın geriye kalan tek görevi arşivdir. Metinde baştan «Aslı arşivde» denmemiştir. Bu eşleşme, bütün satır ve sütunlardaki kısıtların birlikte uygulanmasıyla ortaya çıkan zorunlu sonuçtur.

7. Yayılmalı eleme: tek bir kesinlik birden fazla hücreyi değiştirir

Bir hücrenin kesinleşmesi, yalnız o hücreyi doldurmakla sınırlı kalmaz. Her görevin tek kişide bulunduğu örnekte Ceren–Bütçe eşleşmesi kesinleşince bütçe sütunundaki diğer kişilerin bu görevi üstlenmesi yasak olur. Zaten Baran ve Deniz'in satırları başka görevlerle kapanmıştı. Böylece Aslı'nın satırında yalnız arşiv kalır. Son aşamada hem kişi bazında hem görev bazında bütün yükümlülükler karşılanır.

Dört görevli örneğin tamamlanmış çözüm matrisi

Çalışan	Arşiv	Bütçe	Eğitim	Planlama
Aslı	✓	×	×	×
Baran	×	×	✓	×
Ceren	×	✓	×	×
Deniz	×	×	×	✓

Çözümün kontrolü iki şekilde yapılabilir: Satır toplamları yönünden her kişi bir iş almıştır; sütun toplamları yönünden her iş tam bir kişiye verilmiştir. Ayrıca Baran'ın eğitim, Deniz'in planlama görevi doğrudan koşullarla; Ceren'in arşivde olmaması ise dışlama koşuluyla uyumludur. Bu kontrol yalnız işaret saymakla kalmaz, tablonun başlangıç metnine sadık kaldığını da doğrular.

8. Satır tamamlandığında sütunun, sütun tamamlandığında satırın okunması

Bazen bir satırda tek olasılık kalması kolayca fark edilirken bir sütunda yalnız bir aday kalması gözden kaçabilir. Örneğin üç kişinin üç görevi paylaştığı bir matriste iki kişinin eğitim görevini alamadığı kesinleşirse, diğer kişinin eğitim görevinde olduğu çıkar. Bu sonuç, o üçüncü kişinin satırında hâlâ başka olasılıklar bulunmasına rağmen doğrudur; çünkü eğitim sütununda tek aday kalmıştır. Sütun kesinleştikten sonra üçüncü kişinin satırındaki diğer adaylar elenir.

Dolayısıyla çözüm sırasında bir satırı baştan sona doldurup sonra yalnız o satırla ilgilenmek yeterli değildir. Her güncellemeden sonra sütunlara da bakılmalıdır. Satır ile sütunlar arasında dönüşümlü kontrol yapmak, tek bir bilginin zincirleme etkisini görünür kılar. Bu işlem, kural eklemek değil mevcut kuralların tamamını uygulamaktır.

9. Boş hücre ile boş görev arasındaki fark

Bir hücrenin «·» olarak kalması, o satır ve sütun kesişimindeki ilişkinin belirsiz olduğudur. Bir görevin kimseye verilmemiş olması ise ancak başlangıç koşulları görevlerin tümünün doldurulmasına izin vermiyorsa veya boş görev bırakılabileceğini açıkça söylüyorsa düşünülebilir. Dört kişi dört görevi bire bir paylaşırken son aşamada hiçbir sütun boş kalamaz. Oysa üç kişinin dört görevden birini seçtiği, bir görevin boş kalabileceği senaryoda tüm sütunları «✓» ile doldurmaya çalışmak hatadır.

Tabloyu yorumlarken «boşluk var, demek ki orası kullanılmayacak» çıkarımı yapılmamalıdır. Boşluk, devam eden araştırmanın bir parçası olabilir. Özellikle aşamalı çözümde eski bir tablo görüntüsü ile son tablo görüntüsü karıştırılmamalı; kullanılan semboller bütün aşamalarda aynı anlamı taşımalıdır.

10. Sıralamayı tabloya geçirmek: gün–etkinlik biçimi

Doğrusal yerleşim ilişkisi bazen kutucuk sırası yerine gün–etkinlik tablosuyla daha anlaşılır gösterilir. Bir kurumda hukuk, yazılım, arşiv ve mali işler oturumlarının pazartesi, salı, çarşamba ve perşembe günlerinde, günde bir oturum olacak biçimde düzenlendiğini varsayalım. Arşiv oturumu çarşamba günündedir; mali işler oturumu arşivden sonra yapılır; yazılım oturumu pazartesi değildir. Yalnız dört gün bulunduğundan arşivden sonraki tek gün perşembedir ve mali işler oraya yerleşir. Geriye pazartesi ve salı kalır; yazılım pazartesi olamayacağından salı, hukuk da pazartesi olur.

Gün–etkinlik tablosuyla kesinleşen oturum düzeni

Gün	Oturum	Verilen koşulla kontrol
Pazartesi	Hukuk	Arşiv çarşamba; mali işler perşembe; yazılım pazartesi değil
Salı	Yazılım	Pazartesi dışlama koşulu sağlanır
Çarşamba	Arşiv	Doğrudan verilen gün
Perşembe	Mali işler	Arşivden sonraki tek kullanılabilir gün

Bu tablo, her günün tek oturum aldığı düzende okunur. «Arşivden sonra» ifadesi kendi başına «hemen sonra» demek değildir. Mali işlerin perşembeye yerleşmesinin nedeni, arşivden sonra başka gün bulunmamasıdır. Takvim pazar gününü de kapsasaydı bu çıkarım aynı biçimde yapılamazdı; modelin kapsamı sonucu belirler.

11. Karşılıklı dışlamanın hangi durumda kullanılacağı

Bir kişinin belirli bir göreve atanması, aynı kişinin başka göreve atanamayacağı sonucunu ancak «her kişi yalnız bir görev alır» koşulundan çıkarır. Diğer kişilerin de aynı görevi alamaması için ayrıca «her görev yalnız bir kişiye verilir» şartı gerekir. Bu iki tekillik aynı şey değildir. Birincisi satır boyunca, ikincisi sütun boyunca eleme üretir. Yalnız bir tanesi geçerliyse tablonun ilgili yönü kapatılır; diğer yönünde otomatik dışlama yapılamaz.

Bir kişi birden fazla etkinliğe katılabiliyorsa kişinin satırındaki iki ayrı «✓» çelişki olmayabilir. Benzer biçimde bir ekipte birden fazla kişi yer alıyorsa ekip sütununda birden fazla «✓» bulunması normaldir. İşaretlerin birbirleriyle uyumu tablonun görünüşüne göre değil, tanımlanan ilişki türüne göre değerlendirilir.

12. Gruplandırma tablosunda kapasiteyi görünür tutma

Ekip yerleşiminde esas denetim çoğu zaman satır ve sütundaki «✓» sayısının bire bir olması değil, grubun kapasitesinin aşılmamasıdır. Beş çalışanın iki ekibe dağıtıldığı ve birinci ekibin iki, ikinci ekibin üç kişiden oluştuğu biliniyorsa kişi başına bir ekip ataması yapılır; ancak aynı ekip sütununda kapasitesi kadar çok kişinin bulunması gerekir. Çalışanların her iki ekipte birden görev alamayacağı belirtilmişse yalnız o zaman kişi satırları tek seçimle kapanır.

Aylin, Bora, Cansu, Doruk ve Esin'in X ve Y ekiplerine ayrıldığı örnekte X ekibinin iki, Y ekibinin üç kişilik olduğu; Cansu'nun X, Esin'in Y ekibinde olduğu; Aylin ile Bora'nın farklı ekiplerde ve Bora ile Doruk'un aynı ekipte bulunduğu varsayılsın. Bora X ekibinde olsaydı Doruk da X'te bulunur, Cansu ile birlikte X üç kişiye ulaşırdı. Oysa kapasite ikidir. Bu nedenle Bora ve Doruk'un Y'de olması zorunludur; Aylin de Bora'dan farklı ekipte bulunacağı için X'tedir.

Kapasite koşuluyla çözülen iki ekipli yerleşim

Çalışan	X ekibi (2 kişi)	Y ekibi (3 kişi)	Kesinleşme gerekçesi
Aylin	✓	×	Bora ile farklı ekipte
Bora	×	✓	Doruk ile X'te olması kapasiteyi aşar
Cansu	✓	×	Başlangıç koşulu
Doruk	×	✓	Bora ile aynı ekipte
Esin	×	✓	Başlangıç koşulu

X sütununda iki, Y sütununda üç kesin işaret bulunur ve herkes tam bir ekibe atanmıştır. Başlangıçtaki aynı–farklı ekip ilişkileri de sağlanır. Bu sonuç yalnız tablo doldurmakla değil, kapasiteyi geçici bir varsayımla sınayıp çelişkiyi göstererek elde edilmiştir. Kapasite sayıları bulunmasaydı Bora ve Doruk'un X'e yerleşmesi sırf aynı ekipte oldukları için yasak sayılamazdı.

13. Kesin kapasite, en az ve en çok ifadeleri

«X ekibinde tam iki kişi vardır» ifadesi hem en az iki hem de en çok iki kişiye izin verir. «X'te en az iki kişi bulunur» ise üçüncü kişinin katılmasını dışlamaz. «X'te en çok iki kişi bulunur» ise grubun sıfır, bir veya iki kişiden oluşabileceğini belirtir; başka koşullar sayı alt sınırını ayrıca belirleyebilir. Tablo üzerinde kapasite sayısı yazarken bu üç anlamı eşitlememek gerekir.

Kapasite ifadelerinin tabloya etkisi

Metindeki ifade	Kesin sayıya etkisi	Tabloya uygulanacak kontrol
Tam iki kişi	Sayı 2'dir	İki ✓ sonrası diğer adaylar × olur
En az iki kişi	Sayı 2 veya daha büyük	İki ✓ sonrası kalanlar otomatik elenmez
En çok iki kişi	Sayı 0, 1 veya 2 olabilir	İki ✓ sonrası kalanlar × olur; iki kişi bulunması zorunlu değildir
Her kişi yalnız bir ekibe girer	Her satırda bir ✓	Aynı kişi için öteki ekip × olur
Bütün kişiler iki ekibe dağıtılır	Hiçbir kişi grup dışında kalmaz	Satırların tamamı sonunda atanmış olmalıdır

14. Birlikte ve ayrı bulunma koşullarının tabloyla izlenmesi

«Bora ile Doruk aynı gruptadır» koşulu tek başına grubun hangisi olduğunu söylemez. Bu ilişki ancak ikisinden birinin yeri kesinleşince diğerinin grubunu kesinleştirir. «Aylin ile Bora farklı gruptadır» koşulu da iki grubun varlığı ve herkesin bunlardan yalnız birinde bulunması altında tamamlayıcı seçimi gösterir. Üç veya daha fazla grubun bulunduğu bir düzende «farklı gruptalar» ifadesi diğer kişinin hangi grupta olduğunu belirlemez.

Tabloda bu koşulların yanına kısa bir açıklama koymak önemlidir. Henüz kesinleşmeyen iki kişinin «aynı grup» bağı, boş iki hücrenin üstüne gelişigüzel birer «✓» işareti konularak gösterilemez. Böyle bir bağ ya tablo dışındaki kısa bir koşul notunda korunur ya da olasılıklar dal olarak açıldığında her dalda birlikte değerlendirilir. Bir ilişkinin biliniyor olması, ilişkiye konu olan yerin de bilindiği anlamına gelmez.

15. İki ayrı özellik için iki tablo kullanmak

Bir kişi hem bir şehre gitmiş hem bir iletişim yöntemi kullanmışsa iki farklı özellik söz konusudur. «Kişi–şehir» ve «kişi–yöntem» tabloları ayrı kurulabilir. Böylece şehir ve yöntem birer sütun gibi rastgele karıştırılmaz; hangi işaretin hangi ilişkiye ait olduğu açık kalır. Üç özellikli durumlarda ayrıca «şehir–yöntem» bağı bulunabilir. Bu bağ, doğru aktarıldığında iki tablo arasında bilgi taşır.

Ece, Fırat ve Gül'ün İzmir, Konya ve Samsun'a farklı şehirlere gittiğini ve her birinin telefon, e-posta ve yüz yüze yöntemlerinden farklı birini kullandığını varsayalım. Fırat Konya'ya gitmiş ve yüz yüze görüşmüştür. Gül e-posta kullanmamıştır. Telefonla görüşen kişi İzmir'e gitmiştir. Son koşul belirli bir kişi adı vermese de kişi–şehir ve kişi–yöntem tablolarını bağlayan bir eşleştirmedir.

Üç özellikli örneğin kişi–şehir matrisi

Kişi	İzmir	Konya	Samsun
Ece	×	×	✓
Fırat	×	✓	×
Gül	✓	×	×

Üç özellikli örneğin kişi–iletişim yöntemi matrisi

Kişi	Telefon	E-posta	Yüz yüze
Ece	×	✓	×
Fırat	×	×	✓
Gül	✓	×	×

Bu sonuca ulaşırken önce Fırat'ın iki özelliği de kesinleştirilir. Fırat yüz yüze görüştüğünden telefon ve e-posta Ece ile Gül arasında paylaşılacaktır. Gül e-posta kullanmadığı için telefon kullanmıştır. Telefonla görüşen kişi İzmir'e gittiğinden Gül İzmir'dedir. Fırat Konya'da olduğuna göre Ece Samsun'dadır ve ona kalan yöntem e-postadır. Bu mantık sırası, tablolardaki işaretlerin nereden geldiğini açıklamaktadır.

16. Tablolar arasında aktarılan bilginin yönü

«Telefonla görüşen kişi İzmir'e gitmiştir» koşulundan «telefon ⇒ İzmir» bağı okunur. Örnekte her yöntem farklı kişi tarafından kullanılmış ve şehirler de birer kişiye atanmıştır; bu nedenle telefonun hangi kişiyle eşleştiği kesinleşince onun şehri de kesinleşir. Buna karşılık aynı yöntem birden çok kişi tarafından kullanılabiliyor veya İzmir'e birden fazla kişi gidebiliyorsa aktarımın satır ve sütun etkisi değişebilir. İlişkinin iki yönlü kabul edilip edilmeyeceği bağlamın tekillik koşullarına bağlıdır.

Bu nedenle bir tablodaki «✓» diğer tabloda kendiliğinden aynı yere kopyalanmaz. Önce ortak kişi veya ortak özelliğin gerçekten tespit edildiği görülür. Ardından diğer tablonun seçenekleri buna göre yeniden değerlendirilir. İki ayrı bilgi türünü bağlayan kural unutulursa birden fazla alternatif gereksiz yere açık kalabilir; olmayan bir bağ varsayılırsa geçerli alternatifler haksız yere silinebilir.

17. Çapraz tabloyu gerektiğinde kurma

Şehir–yöntem ilişkisinin kendisi çok sayıda koşulda yer alıyorsa üçüncü bir tablo kullanılabilir. Bununla birlikte her örnek için üç ayrı tablo çizmek zorunlu değildir. Üç kişilik kısa bir düzende iki matris yeterli olabildiği hâlde, beş kişi ve üç özellik türünün bulunduğu daha yoğun bir yerleştirmede üçüncü matris bilgileri takip etmeyi kolaylaştırabilir. Hangi tablonun yararlı olduğu hücre sayısıyla değil, kısıtların hangi iki özellik arasında bağ kurduğuyla ilgilidir.

Üç özellikli örnekte şehir–yöntem eşleşmesinin kontrolü

Şehir	Telefon	E-posta	Yüz yüze
İzmir	✓	×	×
Konya	×	×	✓
Samsun	×	✓	×

Bu üçüncü tablo yeni veri üretmez; önceki iki tablonun aynı kişiye ilişkin sonuçlarını başka bir açıdan birleştirir. İzmir–telefon eşleşmesi koşuldan doğrudan gelmiştir. Konya–yüz yüze Fırat üzerinden, Samsun–e-posta ise Ece üzerinden doğrulanır. Üç tablonun birlikte tutarlı olması, çözümde kişi ve özelliklerin birbirine yanlış aktarılmadığını gösterir.

18. Bütün hücrelerin kesinleşmemesi çözümün başarısızlığı değildir

Bir problem verileri tek bir yerleşimi belirlemeye yetmiyorsa tabloda birden çok «·» kalması normaldir. Böyle bir durumda koşullarla uyumlu bütün düzenler yazılmadan «tek çözüm» denemez. Elde edilen tabloda bir seçenek mümkün, diğeri de mümkünse bunlardan biri yalnız daha doğal göründüğü için tercih edilemez. Bir tablodaki belirsiz hücrelerin sayısı ile gerçek alternatif sayısı aynı şey de değildir; aynı satır ve sütun kısıtları bazı hücrelerin birlikte seçilebilmesini engeller.

Üç çalışanın rapor, sunum ve eğitim görevlerini bire bir paylaşacağı bir düzen düşünülsün. Ada eğitim görevinde değildir, Bora rapor görevinde değildir. Bu iki koşul, tek bir atama belirlemez. Bütün geçerli atamalar tablo biçiminde yazıldığında birbirinden farklı üç düzen elde edilir. Bir görevin olası olup olmadığı, bu düzenlerden en az birinde görülmesiyle anlaşılır; zorunlu olup olmadığı ise tümünde bulunmasına bağlıdır.

İki dışlama kuralı altında üç geçerli alternatif

Düzen	Ada	Bora	Cem	Koşul kontrolü
1	Rapor	Sunum	Eğitim	Ada eğitimde değil; Bora raporda değil
2	Rapor	Eğitim	Sunum	Ada eğitimde değil; Bora raporda değil
3	Sunum	Eğitim	Rapor	Ada eğitimde değil; Bora raporda değil

Birinci ve ikinci düzenlerde Ada raporla ilgilenir, üçüncüde sunumla. Cem üç farklı görevden herhangi birini üstlenebilir. Bu nedenle iki dışlama kuralından hiç kimsenin kesin görevi tek başına çıkmaz. Ek olarak «Cem eğitim görevindedir» bilgisi verilirse yalnız birinci düzen kalır; Ada raporu, Bora sunumu, Cem eğitimi üstlenir. Yeni bilgi, eski iki koşulu değiştirmez; onların izin verdiği düzenler kümesini daraltır.

19. Alternatifler tablosunda bütün durumları sistematik sayma

Birden çok düzeni bulurken başlangıçta en az seçeneği olan kişi veya özellik üzerinden ilerlemek mümkündür. Ada'nın eğitim alamadığı için rapor veya sunum olasılıkları ele alınır. Ada raporu alırsa Bora, raporu alamadığından sunum veya eğitim alabilir; bu iki dal iki düzen verir. Ada sunumu alırsa Bora raporu alamaz ve sunum da doludur, dolayısıyla eğitim görevini alır; Cem'e rapor kalır. Böylece 2 + 1 = 3 geçerli düzen elde edilir. Bu sayma, denenen düzenlerin tekrarlanmadığını ve hiçbir seçeneğin atlanmadığını göstermektedir.

Bu yöntemde olasılık tablosunun her satırı tek bir tam yerleşimdir; matris tablosundaki her hücre ise yalnız tek bir aday eşleşmedir. İki tablo farklı görevler görür. Matris yerel çıkarımları, alternatifler tablosu ise

bütünsel çözüm sayısını görselleştirir. Özellikle birden çok geçerli sonucun bulunduğu problemler için bu iki temsilin birbirini tamamlaması faydalıdır.

20. Deneme dalı ile kesin tabloyu birbirinden ayırma

Geçici bir varsayım üzerine kurulan yerleşim, kesin verilmiş koşul gibi ana tabloya işlenmemelidir. Örneğin «Bora X'te olsun» varsayımı altında kapasite çelişkisi doğuyorsa bu dal elenir; fakat aynı varsayımı ana tabloya «✓» olarak yazıp sonra unutmak çözümü bozabilir. Dallara numara vermek, varsayımı ayrı satırda tutmak ve başarısız dalda hangi koşulun bozulduğunu belirtmek bu karışıklığı önler.

Dallı çıkarımın izlenebilir gösterimi

Denenen durum	Ortaya çıkan sonuç	Denetim	Karar
Bora X'te varsayılsın	Doruk da X'te; Cansu zaten X'te	X kapasitesi 2 iken 3 kişi olur	Dal elenir
Bora Y'de varsayılsın	Doruk Y'de, Aylin X'te, Cansu X'te, Esin Y'de	X=2; Y=3; aynı–farklı koşulları sağlanır	Dal korunur ve kesinleşir

Dallanma çözümü hızlandırabilir; ancak dalların eksiksiz olduğu gösterilmelidir. Bora'nın yalnız X veya Y ekibine girebileceği başlangıçta bilindiği için bu iki dal bütün olasılıkları kapsar. Bora'nın üçüncü bir ekipte bulunma ihtimali olsaydı iki dal yeterli olmazdı. Benzer biçimde bir dalın çelişkisiz bulunması, diğer dallar kontrol edilmeden tek çözüm kanıtı olmaz.

21. Çelişkiyi tablodaki çatışmanın kaynağıyla açıklama

Çelişki, bir hücrenin hem «✓» hem «×» olması, bir satırda izin verilen sayıdan fazla kesin seçim bulunması veya bütün seçeneklerin elenip yine de bir atama gerekmesi gibi çeşitli biçimlerde ortaya çıkabilir. Ancak yalnız iki belirsiz hücrenin bulunması çelişki değildir. Çelişki kaydı yapılırken hangi başlangıç koşulunun, hangi çıkarımla çatıştığı açıklanmalıdır. «Burada bir sorun var» demek, denetimin nereye dönmesi gerektiğini göstermez.

Örneğin tek kişilik arşiv görevine Aslı ve Ceren birlikte atanmış görünüyorsa uyuşmazlık görevin tek kişiye ait olması koşuludur. Eğer görev birden çok kişiye açık olsaydı iki işaret çatışma olmayabilirdi. Yine X ekibi iki kişilikken üç farklı çalışanın X sütununda «✓» olması, kapasite bakımından tutarsız bir durumdur. Tablo, bu tür yanlışlıkları metnin uzunluğundan bağımsız biçimde fark etmeyi kolaylaştırır.

22. Hücreye dayalı zorunlu ve mümkün sonuçların ayrılması

Bir eşleşmenin zorunlu olması, bütün geçerli yerleşimlerde bulunması demektir. Bir eşleşmenin mümkün olması için ise en az bir geçerli yerleşimde bulunması yeterlidir. Bu ayrımı tabloda göstermek için nihai alternatifler karşılaştırılır. Örneğin Ada'nın görevini belirleyen üç düzenin hiçbirinde Ada eğitim görevinde değildir; bu eşleşme imkânsızdır. Ada rapor görevinde iki düzende, sunum görevinde bir düzende bulunduğundan her iki görev de mümkündür. Fakat ne rapor ne sunum tek başına zorunludur.

Bütün seçenekleri listelemek her zaman gerekli olmayabilir. Bir hücre diğer bütün adayları dışlıyorsa, bu hücrenin zorunlu olduğunu satır veya sütun gerekçesiyle göstermek yeterlidir. Ancak «bu sonucun tek olduğu» iddiasını yalnız bir uygun düzen üzerinden kurmak doğru değildir. Alternatif bir düzenin varlığı veya yokluğu uygun bir genel denetimle değerlendirilmelidir.

23. Tabloyu metne geri çevirerek son kontrol yapma

Çözüm sonunda her «✓» işaretinin doğal bir cümle karşılığı yazılabilir. «Baran eğitim görevindedir», «Deniz planlama görevindedir», «Ceren bütçededir» gibi cümleler doğrudan başlangıç koşulları veya gerekçelendirilmiş çıkarımlarla karşılaştırılır. Ardından olumsuz hükümler tek tek gözden geçirilir. Dışlanan bir eşleşmenin neden elendiği hatırlanamıyorsa, özellikle erken aşamada varsayımın kesin bilgiye dönüştürülmüş olabileceği incelenmelidir.

Aynı kontrol kapasite ve tekrar bakımından yapılır. Kişi–görev örneğinde dört kişi ve dört görev birer kez kullanılmıştır. Ekip örneğinde X'te iki, Y'de üç kişi bulunur. Üç özellikli örnekte şehirler ve iletişim yöntemleri ayrı ayrı tekil eşleştirilmiş, şehir–yöntem bağı da doğru aktarılmıştır. Alternatifli örnekte ise tabloda üç düzen vardır ve hepsi verilen dışlama koşullarını sağlar. Her tablo kendi türüne özgü kontrol gerektirir.

24. Tablonun okunabilirliğini korumak ve gereksiz büyümesini önlemek

Tablo, bilginin görünür olmasını sağlarken aşırı büyük kurulduğunda çözümü zorlaştırabilir. Farklı özellik türlerinin hepsini tek sütun sırasına yığmak, «şehir» başlığının «iletişim yöntemi» başlığıyla yanlış karşılaştırılmasına neden olabilir. Gerektiğinde ayrı iki matris kurmak daha sağlıklıdır. Öte yandan aynı özelliği takip eden üç farklı tablo da gereksiz olabilir. Az sayıda değişken için açık bir liste, tek satırlık kesin bilgi tablosu kadar etkili olabilir.

Sütun sırası istikrarlı tutulmalıdır. Bir aşamada arşiv–bütçe–eğitim–planlama dizisi, sonraki aşamada açıklama yapılmadan başka sıraya taşınırsa işaretler yanlış sütuna aktarılabilir. Kısaltma kullanılıyorsa ilk geçtiği yerde açılmalı ve «X» gibi hem grup adı hem dışlama işareti olabilecek simgelerin ayrımı netleştirilmelidir. Baskıda veya dijital okumada erişilebilirlik için yalnız renk kullanmak yerine işaret ve metinsel açıklama bir arada bulunmalıdır.

> **Tablo yöntemi için temel sınır** «·» bilinmeyeni, «×» imkânsızı, «✓» kesin eşleşmeyi gösterir. Satırda ve sütunda yalnız bir ✓ kuralı sadece bire bir atamalarda geçerlidir. Grup kapasitesi, tekrar hakkı ve boş yer bırakılabilmesi açık koşullardan belirlenir. Bir doğru tablo bütün koşullarla uyumlu olmalı; tek çözüm iddiası varsa başka geçerli düzen kalmadığı da gösterilmelidir.

25. Tabloyla çözümün genel muhakeme sürecindeki yeri

Tablo kurma, verilen koşulları işlem boyunca korumanın ve olası sonuçlarla zorunlu sonuçları birbirinden ayırmanın sistematik yoludur. Başlangıçtaki ilişki türünün belirlenmesi, uygun başlıkların seçilmesi, kesin bilgilerin işlenmesi, dışlamaların yayılması, gerekirse dallara ayrılması ve bütün koşulların son kez denetlenmesi birbirini tamamlayan aşamalardır. Her aşamada tablodaki işaretlerin metinsel gerekçesi bulunmalıdır. Gerekçesi bulunmayan bir işaret, son tablo görünüş olarak düzenli olsa bile güvenilir değildir.

Daha yoğun sözel problemlerde birden fazla türde kısıt birbirini etkileyebilir. Bu tür durumların kapsamlı bir arada değerlendirilmesi sonraki GY-07.05 başlığında ele alınacaktır. Bu bölümün temel kazanımı ise belirli bir koşul dizisini, her işaretin anlamı ve kaynağı bilinen, kontrol edilebilir bir tablo düzenine dönüştürebilmektir.

KONU 7.5

ÇOKLU KOŞULLARA DAYALI SÖZEL PROBLEMLER

Gerçek bir sözel muhakeme durumunda bilgiler çoğu zaman yalnız bir sıralama ya da tek bir eşleştirmeden oluşmaz. Bir etkinlikte kişinin günü, ele aldığı konu ve görev aldığı grup aynı anda belirlenebilir; bir iş planında zaman sırası, birlikte çalışma zorunluluğu, kapasite ve koşullu onay birbirini etkileyebilir. Bu tür problemlerde

güçlük, tek tek koşulları anlamaktan çok, bütün koşulları aynı olası düzen içinde doğru tutabilmektir. Koşullardan birini geçici olarak göz ardı eden düzen ilk bakışta uygun görünse de çözüm değildir.

Çoklu koşullu sözel problem, sonlu sayıdaki kişi, görev, zaman, yer veya seçenekle ilgili birden fazla ilişkinin birlikte sağlanmasını gerektiren problemdir. Önceki başlıklarda sıralama, eşleştirme, koşullu önermeler ve tablo kurma ayrı ayrı incelendi. Bu bölümde bu araçlar birbirleriyle bağlantılı kullanılır. Temel amaç, kesin bilgiyi başlangıç koşulundan ayırmak, dolaylı sonuçları gerekçelendirmek ve bütün olası sonuçların gerçekten incelendiğini göstermektir.

1. Bir problemi çoklu koşullu yapan özellik

Yalnız “Ali, Bora'dan önce gelir” bilgisi iki kişi arasında bir yön ilişkisi kurar. Buna “Ali çarşamba görev yapmaz”, “Bora veri sunumunu üstlenmez” ve “veri sunumu planlamadan hemen sonra yapılır” koşulları eklendiğinde aynı nesnelere ait zaman, kişi ve konu bilgileri birlikte değerlendirilir. Zamanla ilgili bir yerleştirme konu seçimini, konu seçimi de kişinin gününü sınırlandırabilir. Bu etki, koşullar arasındaki bağlantı nedeniyle ortaya çıkar.

Her koşul bağımsız bir süs değil, geçerli çözüm kümesini daraltabilen bir kısıttır. Bazı bilgiler yeni olasılığı dışlar; bazıları başka bir kuralın zaten bildirdiğini tekrarlayabilir. Bir düzenin bir koşulu sağlaması, bütün koşulları sağladığı anlamına gelmediğinden çözüm, tek bir yargıyla değil koşulların bütünüyle doğrulanır.

2. Evreni, nesneleri ve boyutları baştan belirleme

Muhakemenin başlangıcında hangi ögelerin tek tek sayıldığı ve her birinin hangi özelliklerle ilişkilendirildiği saptanır. “Dört kişi dört ayrı günde birer farklı konu sunacak” cümlesi, kişi, gün ve konudan oluşan üç boyutlu bir ilişki kurar. Bir kişinin aynı anda iki farklı günü, bir günde iki farklı kişiyi veya bir konuyu iki kişiye atamak mümkün değildir; çünkü “birer farklı” ifadesi bunu sınırlar. Buna karşılık “altı kişi iki çalışma grubuna ayrılacak” cümlesi, bir grubun birden fazla kişiyi içermesine izin verir.

Sözel anlatımdaki her isim, bir kez kullanılan nesne mi, tekrar kullanılabilen bir etiket mi, yoksa bir grubun adı mı olduğu bakımından sınıflandırılmalıdır. “İki şehirden biri seçilecek” ifadesi şehirlerin her birinin mutlaka seçileceği anlamına gelmez. “Her şehir bir kişiyle eşleşir” gibi ek bir koşul varsa boş seçenek kalmaması istenebilir. Evreni yanlış seçmek, doğru mantık kurallarını yanlış problem üzerinde işletmeye neden olur.

Çoklu koşullu problemde temsil edilen temel boyutlar

Boyut	Olası değerler	Ayrı denetlenecek kapsam
Kişi	Ada, Bora, Ceren, Deniz	Her kişi bir defa mı, birden fazla mı görevlendiriliyor?
Zaman	Birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü gün	Gün başına kaç görev yapılabilir?
Konu	Arşiv, Veri, Tasarım, Etik	Her konu bir kez mi ele alınıyor?
Grup	Kuzey, Güney	Grupların kesin veya üst sınır kapasiteleri nedir?
Bağıntı	Önce, sonra, aynı, farklı, koşullu	Hangi boyutların değerini kısıtlıyor?

3. Açık kuralları çözümden önce sabitleme

Doğrudan verilen bilgiler, henüz çözüm tamamlanmadan doğru kabul edilen başlangıç koşullarıdır. Örneğin “Ceren ikinci gün sunum yapar” cümlesi belirli bir kişi–gün eşleşmesidir. “Veri konusu Tasarımdan hemen önce işlenir” bilgisi ise iki konunun ardışık konumlarını bağlar, ancak kimlerin sunum yaptığına ilişkin tek başına kesinlik vermez. “Deniz üçüncü günde değildir” bir dışlamadır. Farklı yapıdaki bu cümleler birbirinin yerine yazılmamalıdır.

Başlangıç bilgisiyle çıkarımın ayrı tutulması özellikle önemlidir. “Ada dördüncü gün olacak” ifadesi ancak koşullar bunu gerektiriyorsa türetilmiş sonuçtur; metinde doğrudan yer almıyorsa ilk veri gibi kaydedilmemelidir. Böylece bir sonuç yanlış çıktığında hangi basamakta fazladan varsayım yapıldığı izlenebilir.

4. Kısıtların birbirine bağlandığı noktalar

İki koşul aynı kişiyi, günü, konuyu veya grubu ortak öge olarak içeriyorsa bağlantı doğrudandır. “Ada Etik konusunu sunar” ile “Etik son gündür” birlikte, Ada'nın son gün sunum yapacağını verir. “Bora, Ceren'den sonra sunar” ve “Ceren ikinci gündür” birlikte, Bora'nın üçüncü ya da dördüncü günde bulunacağını belirler. Daha sonra dördüncü gün Ada'ya ayrılınca Bora üçüncü güne zorunlu olarak yerleşir.

Özellikle farklı boyutları bağlayan koşullar yüksek açıklama gücüne sahip olabilir. Konu sırasından gün, günden kişi, kişiden başka konu çıkarılabildiğinde tek bir sabit bilgi çeşitli yerleşimleri etkiler. Buna karşılık yalnız aynı bilgiyi başka cümleyle söyleyen koşul yeni eleme yapmayabilir. Çıkarım, her aşamada hangi iki veya daha çok bilginin birleştirildiği belirtilerek kurulmalıdır.

Koşulun türü ve diğer koşullarla birleşme biçimi

Koşul	İlk anlam	Başka bir koşulla birleşince
Ada Etik konusunu sunar	Kişi–konu eşleşmesi	Etik son gündeyse Ada da son gündedir
Veri, Tasarımdan hemen önce	Konular ardışık günlerdedir	Veri gününe göre Tasarımın günü belirlenir
Ceren ikinci gündedir	Kesin gün eşleşmesi	Bora Ceren'den sonraysa Bora ilk iki günde olamaz
Deniz üçüncü günde değildir	Dışlanan gün	Öteki üç kişi yerleşince Deniz için tek gün kalabilir
Her konu bir defa işlenir	Bire birlik	Kullanılan konu bir başka güne atanamaz

5. İşlem sırası: kesinler, dışlamalar, birleşik sonuçlar

Çözümde önce kesinkes verilen eşleşmeler yerleştirilir. Ardından doğrudan yasaklanan olasılıklar ayıklanır. Daha sonra birden çok koşuldan doğan sonuçlar değerlendirilir. Örneğin dördüncü günün Etik konusuna ait olduğu ve Etik'i Ada'nın sunduğu biliniyorsa kişi ve konu aynı anda dördüncü güne yazılır; Ada ile Etik diğer günlerin adayı olmaktan çıkar. Bu birinci dalga çıkarımdır.

İkinci dalgada, kalan günlerde hangi kişi veya konunun hâlâ mümkün olduğu incelenir. Bir günün bütün uygun seçenekleri elendiğinde yalnız bir seçenek kalıyorsa bu sonuç kesindir. Fakat iki seçenek kalıyorsa birini sırf daha doğal göründüğü için seçmek doğru değildir. Bu aşamada uygun koşul bulunamıyorsa olasılıklar ayrı dallarda ele alınır. Denenen yerleşim ile koşullardan zorunlu çıkan yerleşim farklı kayıtlardır.

6. Ayrıntılı bütünleşik örnek: dört gün, dört kişi, dört konu

Özgün bir eğitim planında Ada, Bora, Ceren ve Deniz dört ayrı günde birer sunum yapacaktır. Günler birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü gün olarak sıralıdır. Her kişi yalnız bir gün sunum yapar; Arşiv, Veri, Tasarım ve Etik konuları da birer kez işlenir. Verilen koşullar şunlardır: Ceren ikinci günde sunum yapar. Etik dördüncü gün işlenir ve Etik'i Ada sunar. Arşiv, Veri konusundan önce işlenir. Veri, Tasarım konusunun hemen öncesindedir. Deniz üçüncü gün sunum yapmaz. Bora, Ceren'den sonraki bir günde sunum yapar.

Bu örnekte kişi–gün ve konu–gün eşleştirmeleri ayrı başlar; fakat Ada'nın konusu, Etik'in günü ve veri ile tasarımın ardışıklığı iki eşleştirmeyi birbirine bağlar. Koşullarda “Arşiv, Veri'den hemen önce” denmemiştir; Arşiv yalnız daha önceki bir günde olmalıdır. Bu ayrım, çözümü gereksiz biçimde daraltmamak için korunur.

Dört günlük sunumun başlangıçta bilinen konumları

Gün	Kişi	Konu	Gerekçe
Birinci gün	Belirsiz	Belirsiz	Henüz kesin eşleşme yok
İkinci gün	Ceren	Belirsiz	Ceren ikinci günde
Üçüncü gün	Deniz olamaz	Belirsiz	Deniz üçüncü günde değil
Dördüncü gün	Ada	Etik	Ada Etik'i sunar; Etik dördüncü gün

7. Örneğin konu zinciriyle çözülmesi

Dördüncü gün Etik olduğundan Veri–Tasarım ikilisi bu günü kullanamaz; çünkü birbirini izleyen iki ayrı gün istemektedir ve son gün Etik'e ayrılmıştır. Bu ikili ya birinci–ikinci ya da ikinci–üçüncü günlerde olabilir. Birinci–ikinci günleri kullanırsa Arşiv'in Veri'den önce olması için birinci günden de eski bir gün gerekir. Böyle bir gün bulunmadığından bu seçenek elenir. Dolayısıyla Veri ikinci, Tasarım üçüncü gündedir. Geriye kalan birinci gün Arşiv konusuna ayrılır.

Konu düzeni böylece tek biçimde belirlenir: birinci gün Arşiv, ikinci gün Veri, üçüncü gün Tasarım, dördüncü gün Etik. Bu sonuç, Arşiv'in Veri'den önce oluşunu ve Veri–Tasarımın aralıksız izlenmesini ayrı ayrı sağlar. İkinci gün Ceren, dördüncü gün Ada olduğundan geriye kalan birinci ve üçüncü günlerin kişileri Bora ile Deniz'dir. Bora'nın Ceren'den sonra bulunması onu üçüncü güne yerleştirir; Deniz birinci güne kalır. Deniz'in üçüncü gün olmaması da aynı sonucu doğrular.

Dört günlük bütünleşik örneğin kesin çözümü

Gün	Kişi	Konu	Kontrol noktası
Birinci gün	Deniz	Arşiv	Arşiv, Veri'den önce
İkinci gün	Ceren	Veri	Veri, Tasarımın hemen öncesinde
Üçüncü gün	Bora	Tasarım	Bora, Ceren'den sonra; Deniz değil
Dördüncü gün	Ada	Etik	Ada Etik'i sunar; Etik son gün

8. Tek çözüm olduğunu göstermenin yolu

Bir geçerli düzen bulmak, başka düzen bulunmadığını kendiliğinden kanıtlamaz. Dört günlük örnekte ise Veri–Tasarım ikilisinin ilk üç güne sığabilecek yalnız iki ardışık yerleşimi vardır. Birinci–ikinci yerleşimi, Arşiv'e daha önceki gün bırakmadığı için geçersizdir; ikinci–üçüncü yerleşimi zorunludur. Konuların tümü birer kez kullanılacağı için birinci ve dördüncü günlerin konuları da kesinleşir. Kişiler açısından ikinci ve dördüncü gün önceden sabittir. Kalan iki kişi için Bora'nın Ceren'den sonra olması üçüncü günü, Deniz'e birinci günü bırakır. Başka bir kişinin ya da konunun yer değiştirmesi bu zincirlerden en az birini bozar.

Bu tür ispatta bütün olası birleşik yerleşimler tek tek yazılmak zorunda değildir. Başlangıçtaki alternatiflerin tamamını kapsayan kısa bir eleme, diğer tüm olasılıkların neden kapanmış olduğunu gösterebilir. Bununla birlikte kullanılan sınıflandırmanın eksiksiz olması gerekir; bir olasılık fark edilmeden atlanırsa tek çözüm iddiası geçersiz olur.

9. Koşulun çıkarılması: çözüm neden değişebilir?

Bir modelde bazı bilgiler zorunlu sonuçları güçlendirirken bazıları sonucun değişmesine neden olmayabilir. Dört günlük örnekte “Deniz üçüncü gün sunum yapmaz” koşulu, diğer veriler birlikte düşünüldüğünde zaten sonuçtan çıkar. Bu bilgi kaldırılsa bile Ceren ikinci ve Ada dördüncü günken Bora'nın Ceren'den sonra yer alması Bora'yı üçüncü, Deniz'i birinci güne taşır. Dolayısıyla Deniz'i üçüncü günden dışlama burada doğrulayıcı ama nihai sonucu değiştirmeyen bir koşuldur.

Buna karşılık “Bora, Ceren'den sonra sunar” koşulu kaldırıldığında kişi yerleşiminde yeni bir alternatif doğabilir: Deniz üçüncü gün olamayacağı için aslında bu koşulun kaldırıldığı durumda da Deniz birinci, Bora üçüncü gündedir. Bu örnek iki koşulun aynı sonucu bağımsız desteklediğini gösterir. “Deniz üçüncü günde değil” ve “Bora, Ceren'den sonra” koşulları birlikte kaldırıldığında ise ilk ve üçüncü günlerde Bora ile Deniz yer değiştirebilir. Böylece gereklilik, tek bir cümlenin görünüşüne göre değil bütün koşul sistemine göre değerlendirilir.

10. Çözümün gücü: sonucu zorlamak ile sonucu sınamak

Bir yerleştirme elde edilince geriye dönüp tüm koşullar ayrı ayrı okunmalıdır. Ceren'in ikinci günde oluşu, Bora'nın daha sonra bulunması, Etik'in son gün işlenmesi, Ada'nın Etik'i sunması, Arşiv'in Veri'den önce oluşu, Veri'nin Tasarıma bitişik ve önce olması, Deniz'in üçüncü günde olmaması birbirinden farklı kontrollerdir. Özellikle bir koşulu sonuca ulaşmak için kullanmış olmak, onun son tabloda yanlış kaydedilmesini imkânsız kılmaz; son denetim yine gereklidir.

Geçerli sonuç, bütün bu ifadeleri aynı anda doğru kılan düzenlemedir. Bir düzenin genel bağlama uygun görünmesi ya da pratikte gerçekleştirilebilir olması, sözel kısıtları sağlamıyorsa yeterli değildir. Muhakemenin ölçütü gerçek dünyada tercih edilme olasılığı değil, metinde verilen ilişkinin doğru korunmasıdır.

11. Gruplama ile sayısal kapasiteyi birlikte okumak

Sıralama yerine gruplama kullanıldığında bir grupta birden fazla kişi bulunabilir. Bu kez önemli bilgi, kişilerin hangi gruba ait olabildiği kadar grupların kaç kişiyi kabul ettiğidir. “Kuzey'de tam üç, Güney'de tam iki kişi bulunur” ifadesi, beş kişinin tamamının bu gruplara ayrıldığını ve her iki kapasitenin tam karşılanacağını bildirir. “Kuzey'de en çok üç kişi bulunur” aynı şeyi söylemez; iki kişi de yeterli olabilir. Grupların kapsamı ve kişi sayılarının toplamı korunmalıdır.

Birlikte bulunma koşulu iki kişi için aynı grup etiketini gerektirir. Ayrı bulunma koşulu ise bu etiketlerin farklı olmasını ister. Grup kapasitesi bir koşuldan bağımsız olarak değil onunla birlikte etkide bulunur: aynı grupta olması gereken iki kişi, kapasitesi tek kişilik yere birlikte yerleştirilemez.

$$n(\text{Kuzey}) + n(\text{Güney}) = 5;\ n(\text{Kuzey}) = 3;\ n(\text{Güney}) = 2$$

Anlamı: Beş kişinin hepsi tam bir gruba ayrılırsa toplam kişi sayısı grup büyüklüklerinin toplamıdır.

Koşullar: Gruplar ayrık ve bütün kişileri kapsar; aynı kişi iki kez sayılmaz. Bu koşullar yoksa eşitlik doğrudan kullanılamaz.

12. İkinci bütünleşik örnek: iki grupta birlikte ve ayrı bulunma

Özgün bir çalışma düzeninde Ayşe, Baran, Cansu, Deniz ve Erol, Kuzey ve Güney adlı iki gruba ayrılacaktır. Kuzey'de tam üç, Güney'de tam iki kişi olacaktır. Cansu ile Deniz aynı grupta, Ayşe ile Baran farklı gruplarda bulunacaktır. Erol, Güney grubundadır. Bütün kişiler yalnız bir grupta yer alır ve hiçbir kişi dışarıda kalmaz.

Cansu ile Deniz'in Güney grubunda yer alması olanaksızdır. Çünkü Güney'de yalnız iki kişilik kapasite vardır ve bu grupta Erol kesin olarak bulunur. Cansu ile Deniz'in birlikte Güney'de bulunması üç kişi gerektirir. O hâlde bu iki kişi Kuzey'de olmalıdır. Kuzey'in üçüncü yeri, Ayşe ile Baran'dan birine ait olmak zorundadır; diğer kişi, Erol ile Güney'de olur. Bu nedenle başlangıç koşulları iki ayrı geçerli düzen bırakır.

İki gruplu örnekte bütün geçerli dağılımlar

Olasılık	Kuzey (3 kişi)	Güney (2 kişi)	Ortak kesin sonuç
Birinci düzen	Cansu, Deniz, Ayşe	Erol, Baran	Cansu ve Deniz Kuzey; Erol Güney
İkinci düzen	Cansu, Deniz, Baran	Erol, Ayşe	Cansu ve Deniz Kuzey; Erol Güney

13. Birden fazla çözümden zorunlu sonuç çıkarmak

İki dağılımın ikisi de bütün başlangıç koşullarını sağlar. Bu nedenle “Ayşe Kuzey grubundadır” yargısı zorunlu değildir; yalnız birinci düzende doğrudur. “Ayşe ile Baran farklı gruplardadır” ve “Cansu ile Deniz Kuzey grubundadır” yargıları ise her geçerli düzende doğrudur. Bir sonuç bütün düzenlerde doğruysa zorunlu, en az bir düzende doğruysa mümkün kabul edilir. Mümkün olması, gerçekleşmesinin şart olduğu anlamına gelmez.

Bu örneğe “Baran Kuzey'dedir” bilgisi eklenirse yalnız ikinci düzen kalır: Kuzey'de Cansu, Deniz, Baran; Güney'de Erol, Ayşe bulunur. Yeni koşulun etkisi, iki alternatiften birini elemesidir. “Ayşe de Kuzey'dedir” koşulu ayrıca eklense Ayşe ile Baran farklı gruplarda olmalıdır kuralıyla çelişir; hiç geçerli çözüm kalmaz. Çelişki çözüm yöntemiyle ortadan kaldırılamaz, koşulların bir arada karşılanamamasından doğar.

Yeni bilgiyle çözüm kümesinin değişmesi

Ek koşul	Geçerli düzen sayısı	Mantıksal gerekçe
Ek koşul yok	2	Ayşe veya Baran Kuzey'in üçüncü kişisi olabilir
Baran Kuzey'de	1	Yalnız ikinci düzen kalır
Ayşe Kuzey'de	1	Yalnız birinci düzen kalır
Ayşe ve Baran Kuzey'de	0	Ayrı grup koşulu bozulur; Kuzey'in üç kişilik kapasitesi de aşılır

14. Koşullu kural ile kapasitenin kesişmesi

Bir gruplama probleminde “Baran Kuzey'deyse Ayşe Güney'dedir” kuralı bulunabilir. Bu, Baran'ın Kuzey'de olduğu her geçerli düzenin Ayşe'yi Güney'e götürmesini gerektirir. Fakat Ayşe'nin Güney'de bulunması, tek başına Baran'ın Kuzey'de bulunduğunu ispatlamaz; bu özel iki gruplu örnekte başka koşullar yüzünden böyle bir sonuç çıkıyorsa, gerekçe yalnız koşullu cümle değil bütün sistemdir. Koşulun kendi mantıksal yönü ile çözümün birlikte verdiği daha güçlü sonuç ayrılmalıdır.

Koşulun ön kısmı gerçekleşmiyorsa, bu tür bir gerektirme ilişkisi tek başına diğer kişi için yer belirlemez. Örneğin “Baran Kuzey'deyse Ayşe Güney'dedir” bilgisi, Baran Güney'deyken Ayşe'yi kesin olarak Kuzey'e yerleştirmez; onu Kuzey'e götüren burada ayrıca “Ayşe ve Baran farklı gruplardadır” kuralıdır. Kaynakları ayrı göstermek, koşul yönüyle ilgili hataları önler.

15. Gerekli koşul, yeterli koşul ve kapsam ayrımı

“Rapor ancak kontrol yapılırsa yayımlanır” ifadesinde kontrol, raporun yayımlanması için gerekli koşuldur: yayın varsa kontrol de vardır. Bu cümle, kontrol yapıldıktan sonra yayının mutlaka olacağını garanti etmez. “Kontrol tamamlanırsa rapor yayımlanır” ifadesi ise kontrolün tamamlanmasını yayın için yeterli koşul olarak verir. İki cümle, ancak iki yön birden açıkça belirtilmiş veya diğer bilgilerle kanıtlanmışsa eşdeğer kabul edilebilir.

Çoklu koşullu problemlerde bir kural, başka bir kuralla birleşince iki yönlü bir sonuca dönüşebilir. Fakat bu sonuç, koşullardan hangilerinin kullanıldığını saklamamalıdır. Bir bölümde gerekli koşul diye öğretilen ifade, çözüm sırasında kendiliğinden yeterli koşul diye okunursa geçerli sonuçların bir kısmı hatalı biçimde elenir.

Koşullu kuralın çoklu sistem içindeki yorum sınırı

Verilen ifade	Güvenilir çıkarım	Tek başına çıkmayan sonuç
A gerçekleşirse B gerekir	A doğruysa B doğrudur	B doğruysa A zorunludur
A ancak B ile gerçekleşir	A doğruysa B doğrudur	B doğruysa A zorunludur
A veya B'den en az biri gerekir	İkisi birden yanlış olamaz	İkisinin aynı anda doğru olması yasaktır
A ile B'den yalnız biri gerekir	Tam biri doğrudur	İkisi birden doğru olabilir
A ve B birlikte gerekir	İki koşul da karşılanmalıdır	Birini karşılamak yeterlidir

16. Üçüncü bütünleşik örnek: zincir, dışlama ve uç konum

Bir iş planında A, B, C, D ve E adlı beş işlem, birinci sıradan beşinci sıraya kadar farklı konumlara yerleşecektir. A, C'den önce; D, B'nin hemen ardından ve C'den önce yapılacaktır. C beşinci sırada, A ise birinci sırada olmayacaktır. E, yalnız birinci ya da beşinci sırada bulunabilir. Her işlem tam bir kez yapılır. Bu kurallar hem iki işlemin bitişikliğini hem üç işlemin göreli sırasını hem de uç konum seçimini bir araya getirir.

Burada B–D, araya başka işlem giremeyen sabit yönlü bir ikilidir. A ile C arasındaki öncelik ise bitişiklik şartı taşımaz. “D, C'den önce” cümlesi C'nin D'yi izlemesini ister; fakat D ile C'nin yan yana olmasını istemez. E'nin birinci veya beşinci sırada bulunması ise başka tüm konumlardan dışlandığını gösterir. Bu ayrımlar korunarak çözüm dallara ayrılabilir.

17. Uç konumun dallara ayrılmasıyla kesin sıralama

Önce E'nin birinci sırada olduğu varsayılsın. A birinci sırada bulunamaz ve C, hem A'dan hem D'den sonra gelmelidir. C beşinci olamayacağına göre dördüncü sırada bulunması gerekir; çünkü önceki üç ayrı işlemi, A, B ve D'yi, kendisinden önce konumlandırmak gerekir. Ancak ilk sıra E'ye ayrılmıştır ve C'nin önündeki ikinci ve üçüncü sıralar yalnız iki işlemi taşıyabilir. Bu dal çelişkilidir.

O hâlde E beşinci sıradadır. C de beşinci olamadığı, A, B ve D adlı üç işlem kendisinden önce bulunması gerektiği için dördüncü sıradadır. A birinci sırada olamaz, C'den önceki üç sıradan birini kullanmalıdır. İlk üç sıra A ile bitişik B–D ikilisine ayrılmıştır. İkilinin birinci–ikinci sırada, A'nın üçüncü sırada olması tek geçerli düzendir. Sonuç B–D–A–C–E'dir. B–D ikilisi ikinci–üçüncü sıraya kaydırılırsa A birinci sıraya düşer ve koşul bozulur.

Beş işlemin çoklu koşullarla belirlenen kesin sırası

Sıra	İşlem	Doğrulanan ilişki
1	B	D, B'nin hemen ardından gelir
2	D	D, C'den önce yer alır
3	A	A ilk sırada değildir ve C'den öncedir
4	C	C son sırada değildir; A ile D'den sonradır
5	E	E yalnız birinci veya beşinci sırada olabilir

18. Dallanmayı eksiksiz ve ekonomik yürütmek

Birden fazla olasılık varsa ayrım, tüm olasılıkları kapsayan bir özelliğe göre yapılmalıdır. Beş işlemli örnekte E'nin yalnız iki olası konumu bulunduğundan E birinci/E beşinci ayrımı eksiksizdir. İlk dalın çelişkiyle kapanması ikinci dalın mutlaka geçerli olduğunu hemen kanıtlamaz; ikinci dalın ayrıca bütün koşulları sağladığı gösterilmiştir. Bu nedenle “bir dal elendi, öteki doğrudur” çıkarımı yalnız kalan dalın kendi içinde de tutarlı olduğu doğrulanınca geçerlidir.

Dallanma, koşulların henüz kesinleştirmediği konumlarda uygulanır. Başlangıçta kesin olan kısımların her dalda yeniden hesaplanmasına gerek yoktur. Ayrıca dalın başındaki varsayım açıkça işaretlenmeli; dal içinde çıkan sonuçlar ana çözümde kesin diye gösterilmemelidir. İki dalın tümünde doğru olan bilgi ise dal varsayımından bağımsız zorunlu çıkarıma dönüşebilir.

19. En az, en çok ve tam olarak ifadeleri aynı şey değildir

“Sayıca en az iki kişi” ifadesi, iki veya daha çok kişinin bulunmasına izin verir; üst sınır koymaz. “En çok iki kişi” ifadesi sıfır, bir veya iki kişiye izin verir. “Tam iki kişi” ise hem alt hem üst sınırı iki yapar. Çoğu çoklu koşullu problemde grup üyelerinin birbirinden farklı oluşu ve tüm katılımcıların bir gruba yerleşmesi birlikte kullanılır. Bir grupta tam üç kişi bulunması, o gruptaki adları üçe indirmek için kullanılır; başka bir grup için toplamın kaç olduğu da ancak tüm kişilerin kapsamı belirtildiğinde kesinleşir.

Örneğin yedi kişi, üç çalışma odasına dağılacak ve odalarda en çok üçer kişi bulunacak olsun. Bu bilgi tek başına her odanın dolu olacağını kanıtlamaz. Buna karşılık iki odanın üçer kişi aldığı kesinleşmişse yedinci kişinin üçüncü odaya yerleşmesi gerekir. “Her oda en az bir kişi içerecek” koşulu ayrıca verildiğinde boş oda ihtimali doğrudan dışlanır. Sözel ifadelerdeki nicelik belirleyiciler, mantıksal düzenin bir parçasıdır.

$$0 \leq n(\text{Oda i}) \leq 3;\ n(\text{Oda 1}) + n(\text{Oda 2}) + n(\text{Oda 3}) = 7$$

Anlamı: Her odanın kapasitesi en çok üç kişidir; yedi kişinin her biri tam bir odaya yerleşir.

Koşullar: Odalar arasında kişi tekrarı yoktur ve hiçbir kişi oda dışında bırakılmaz; n kişi sayısını gösteren negatif olmayan tam sayıdır.

20. Bağlantılı ve bağlantısız kısıtlar nasıl ayırt edilir?

Bir kural, doğrudan aynı ögeye dokunmasa bile aracı bir ilişki üzerinden başka kuralı etkileyebilir. “Ada Etik sunumunu yapar” kişi–konu, “Etik son gündedir” konu–gün kuralıdır; bunlar Ada'nın gününü ortak konu üzerinden belirler. Buna karşılık yalnız “Güney grubu iki kişiliktir” bilgisi, günlerle grup üyeleri arasında hiçbir bağ kurulmamışsa bir sunumun hangi gün yapıldığını belirlemez. Kısıtların farklı boyutlarda bulunması onları kendiliğinden bağlantılı hâle getirmez.

Koşullar arası bağlantıyı yorumlarken “aynı gün” ile “aynı kişi”, “aynı grupta” ile “aynı konuda” kavramları da farklıdır. Aynı günde görev yapan iki kişinin aynı grupta olduğu ancak metinde buna ilişkin bir kural bulunuyorsa söylenebilir. Metnin vermediği bir bağlantıyı doğal kabul etmek, doğru gibi görünen fakat gerekçesiz yeni bir koşul üretir.

Farklı boyutlar arasında aktarım için gereken bilgi

Verilen iki ilişki	Aktarılabilecek sonuç	Aktarılamayacak sonuç
Ada = Etik; Etik = dördüncü gün	Ada = dördüncü gün	Ada = Güney grubu
Ceren = ikinci gün; Bora, Ceren'den sonra	Bora üçüncü veya dördüncü gün olabilir	Bora kesin üçüncü gün
Kuzey = üç kişi; Güney = iki kişi; herkes tam bir grupta	Toplam beş kişi yerleştirilir	Herkesin görev günü bellidir
B, D'den hemen önce; D, C'den önce	B, C'den öncedir	B, C'nin hemen öncesindedir

21. Olumsuz koşulların kapsamını doğru belirlemek

“Derya pazartesi çalışmaz” yalnız pazartesi konumunu dışlar; diğer günlerden hangisinin seçileceğini söylemez. “Deniz, Ceren ile aynı grupta değildir” iki kişinin kesin olarak farklı grupta olduğunu belirtir; fakat üç veya daha çok grup bulunuyorsa birinin hangi grupta olduğundan diğerinin tam grubu belirlenemez. “A ve B birlikte sunum yapamaz” ifadesi ise özellikle aynı sunum için geçerli bir dışlama olabilir; aynı hafta çalışmayı yasaklamayabilir.

Olumsuz cümlelerde yasaklanan en küçük ilişkiyi saptamak yararlıdır. “İki görevden hiçbiri perşembe yapılmaz” iki ayrı dışlama bildirir. “İki görev birden perşembe yapılmaz” ise bağlama göre yalnız birlikte yapılmalarını yasaklayabilir. Çoklu koşullu problemlerde iki farklı okumaya yol açan ifadeler açıkça yorumlanmalı, gerekli olduğunda “ikisinin de perşembede olmaması” ile “en az birinin perşembede olmaması” gibi ayrımlar belirtilmelidir.

22. «Veya» ifadesi ve birden çok koşulun kesişimi

Gündelik dilde “veya” bazen iki seçeneğin birini, bazen de ikisinden en az birini ifade eder. Mantıksal kapsayıcı “A veya B” önermesi A ve B'nin birlikte doğru olmasına izin verir. “A ile B'den yalnız biri” ise birlikte doğru olmalarını yasaklar. Bir problem “E ilk ya da son sıradadır” ve her işlem tek sıra alır diyorsa E'nin aynı anda iki sırada bulunması zaten mümkün değildir; seçenekler fiilen ayrışıktır. Ancak iki ayrı faaliyetin yapılma durumunu bildiren “A veya B yapılır” cümlesinde bu ayrım açıkça netleştirilmelidir.

Bir koşul sistemi, “A veya B” ile “A değil” bilgilerini birlikte içeriyorsa B kesinleşir; bu çıkarım, yalnız iki şıkkın önceden belirlenmiş olmasına değil verilen ayrık/kapsayıcı anlamın korunmasına dayanır. Buna karşılık A'nın doğru olması, kapsayıcı veya koşulundan B'nin yanlış olduğunu vermez. Fazla eleme yapmak geçerli çözümleri gereksiz yere dışlayabilir.

23. Çelişkili koşulları tespit etme ve ifade etme

Çelişki, aynı koşullar altında hiçbir geçerli düzenin bulunmamasıdır. Bir kişinin aynı anda iki farklı tekil göreve zorlanması, bir grubun kesin kapasitesinin aşılması veya bir görevin kendisinden önce yapılmasının gerekmesi doğrudan çelişki örnekleridir. Daha dolaylı çelişki ise bir dalda ortaya çıkar: seçilen varsayım, mevcut koşulların tamamına göre imkânsızsa yalnız o dal elenir, bütün problem değil.

Örneğin E'nin ilk konumda olduğu dalın geçersizliği, beş işlemli örnekte tüm sistemin tutarsız olduğunu göstermez; E'nin son konumda bulunduğu geçerli düzen vardır. Buna karşılık Ayşe ve Baran'ın farklı grupta olması gerekirken ikisinin birden Kuzey'e yerleştirilmesi ve başka grup alternatifinin de kalmaması, o yeni koşul kümesini çözümsüz yapar. “Çelişki var” sonucunun hangi koşulların birleşmesinden doğduğu belirtilmelidir.

24. Zorunluluk, olasılık ve imkânsızlığın çözüm kümesine göre tanımı

Bir sözel problemde geçerli düzenler kümesi, bütün koşulları sağlayan düzenlerin toplamıdır. Bir önerme bu düzenlerin hepsinde doğruysa zorunludur. En az bir geçerli düzende doğruysa mümkündür. Hiçbir geçerli düzende doğru değilse imkânsızdır. Ancak geçerli düzen bulunmayan tutarsız bir sistemde “bütün çözümlerde doğrudur” biçimindeki teknik boş-küme mantığı, sınav okumasında yanıltıcı olabilir; önce problemin tutarlılığı sınanmalı, mümkün veya zorunlu gibi sözcükler ancak uygun çözüm evreni belirlendikten sonra kullanılmalıdır.

Gruplama örneğinde “Erol Güney'dedir” zorunlu, “Ayşe Kuzey'dedir” mümkün fakat zorunlu değildir, “Cansu Güney'dedir” başlangıç koşullarına göre imkânsızdır. Beş işlemli örnekte tek geçerli sıra bulunduğundan konumlara dair onunla uyumlu bütün kesin ilişkiler zorunludur. Bu sınıflandırma öznel güven derecesi değil, koşullara göre mantıksal kapsam bildirir.

Çözüm kümesine dayalı sonuçların ayırt edilmesi

Tür	Ölçüt	İki gruplu örnekten ifade
Zorunlu	Bütün geçerli dağılımlarda doğru	Cansu ve Deniz Kuzey'de
Mümkün	En az bir geçerli dağılımda doğru	Ayşe Kuzey'de
Mümkün değil	Hiçbir geçerli dağılımda doğru değil	Cansu Güney'de
Tek çözüm	Geçerli dağılım sayısı tam 1	Ek koşul Baran Kuzey'de olduğunda
Çözümsüzlük	Geçerli dağılım sayısı 0	Ayşe ve Baran aynı grupta olmaya zorlandığında

Tutarlılık ve çıkarım Bir geçerli düzen bulmak koşulların tutarlı olduğunu gösterir; bütün geçerli düzenleri belirlemeden "tek çözüm" veya "kesinlikle" denemez. Bir deneme dalının çelişkiye düşmesi ise bütün problemin çözümsüz olduğunu göstermez. Geçerli çözüm bulunamadığında zorunlu–mümkün ayrımı önce modelin tutarlılığı açısından yeniden incelenir.

25. Gizli varsayımlardan kaçınma: bağlama uygun ama verilmemiş bilgiler

Sözel muhakemede günlük yaşam deneyimi yardımcı bir arka plan olabilir, fakat açık kuralın yerine geçmez. "Etik sunumu veri sunumundan sonra yapılır" bilgisi, veri sunumunun mutlaka bir gün önce yapılacağı anlamına gelmez. "Rapor kontrolün ardından gönderilir" ifadesi, süre verilmediyse gönderimin kontrol tamamlandığı anda yapılmasını gerektirmez. "A, B'den önce" ilişkisi A ile B arasına başka bir olay girip giremeyeceğini belirlemez; bitişiklik ancak "hemen önce/ardından" gibi açık ifadelerle elde edilir.

Aynı şekilde mesleki teamül, kurumların olağan işleyişi veya kişilerin tercihleri konu dışı ek kural hâline getirilmemelidir. Örneğin "sorumlu kişi son sunumu yapar" varsayımı, metin bu ilişkiyi bildirmediği sürece doğru çözümün parçası değildir. Özgün problem örneklerinde gerçek kurumların usul ve yetkileri iddia edilmeden yalnız verilen kurgusal koşullar kullanılır.

26. Değişen tek koşulla sonuç kümesinin yeniden kurulması

Bir koşul değiştirildiğinde önceki kesin sonuçların hepsi aynı derecede korunmaz. Örneğin iki gruplu örneğe "Baran Kuzey'dedir" eklenince ikinci düzen kesinleşir. Bu koşul kaldırılırsa Ayşe ile Baran'ın Kuzey ve Güney grupları arasında yer değiştirebilmesi yeniden mümkün hâle gelir. Buna rağmen Cansu ile Deniz'in Kuzey'de ve Erol'un Güney'de bulunması değişmez; çünkü bunlar başka başlangıç koşullarının doğrudan sonucudur.

Bir bilgi değişikliğinin etkisini anlamak için yalnız son tablonun bir hücresini değiştirmek yeterli değildir. Değişikliğin dokunduğu ilişkilerden başlayarak diğer koşullar yeniden uygulanmalıdır. Yeni koşul eskisinin yerine geçiyorsa kaldırılan ve eklenen sınırlar açıkça ayrılır. Aksi takdirde önceki çözümün artık geçerli olmayan bir kuralı, fark edilmeden yeni çözüme taşınabilir.

27. Uzun metinlerde birden çok çözüm yolunu karşılaştırma

Aynı çoklu koşullu problem, kesin konumları doldurarak, en sınırlı iki seçenekli ilişkiden başlayarak veya tüm seçeneklerin ortak sonuçlarını arayarak çözülebilir. Dört günlük sunum örneğinde konuları önce çözmek verimlidir; çünkü Arşiv'in önce gelmesiyle bitişik Veri–Tasarım ikilisi günlerin yapısını belirler. Beş işlemli örnekte uç konumdaki E üzerinden iki dal açmak daha etkilidir. Gruplama örneğinde ise kapasite koşulu Cansu ile Deniz'i Kuzey'e yerleştirir.

Yöntemler farklı olsa da geçerli çözüm kümesi aynı olmalıdır. Bir yöntem iki çözüm, diğeri tek çözüm veriyorsa kısıtlardan biri yanlış yorumlanmış veya bir dal gözden kaçırılmış olabilir. Bu nedenle alternatif çözüm yalnız hız amacıyla değil, sonucu bağımsız denetleme amacıyla da değerlidir. Gerekirse kısa bir tablo, uzun açıklamaya destek verir; ancak tek başına hücre işaretleri, hangi koşulun neden sonuç doğurduğunu açıklamaz.

28. Çoklu koşullu sözel muhakemenin bütüncül değerlendirilmesi

Bu problem türünde sağlıklı çözüm, nesnelerin ve boyutların belirlenmesiyle başlar. Kesin eşleşmeler, sıralama, bitişiklik, kapasite, birlikte/ayrı bulunma, koşullu gerektirme ve dışlama gibi farklı türde bilgiler kendi anlamlarıyla kaydedilir. Ardından bunlar ortak ögeler üzerinden birleştirilir. Çıkarımların kaynağı açık bırakılır; seçenek kalırsa tam kapsamlı dallanma yapılır. Sonuçlar, yalnız ulaşılan düzen olarak değil bu düzenin bütün koşulları nasıl sağladığı ve başka düzenlerin neden kalıp kalmadığı bakımından açıklanır.

Böylece çoklu koşullu problem çözmek, zihinden rastgele sıralama denemeye değil, koşulların oluşturduğu sınırları sistematik olarak izlemeye dayanır. Bu bölümde kişiler, konular ve günlerin üç boyutlu birleşimi; kapasite ve grup ayrımıyla iki farklı çözüm; uç konum ve zincir ilişkileriyle tek çözüme ulaşma gösterildi. Sonraki GY-07.06 başlığında ise oluşturulmuş düzenlerden çok, metinde anlatılan olguların mantıksal sonuçlarını ayırt etmeye odaklanılacaktır.

KONU 7.6

METİNDEN HAREKETLE MANTIKSAL SONUÇ ÇIKARMA

Sözel muhakemenin son aşaması, bir metinde anlatılan olguların hangilerini zorunlu kıldığını belirlemektir. Burada amaç metni yalnız özetlemek, yazarın ana düşüncesini bulmak ya da kişiler için sıralama çizelgesi kurmak değildir. Okuyucu, metindeki açık bilgileri başlangıç kabulü sayarak bunlardan hangi yeni yargıların geçerli biçimde türetilebileceğini araştırır. İyi kurulmuş bir çıkarım, sonucun hangi ifadelerden doğduğunu gösterebilir ve metinle bağdaşan hiçbir durumda yanlış çıkmaz.

Bu nedenle bir yargının gündelik yaşamda çok makul olması, anlatılan olayın olağan akışına uyması veya okuyucunun deneyimleriyle örtüşmesi tek başına yeterli değildir. Bir başvurunun incelenmek üzere alınması onun kabul edildiği anlamına gelmez; bir uygulamanın ardından olumlu sonuç görülmesi, bu sonucu kesin olarak uygulamanın doğurduğunu kanıtlamaz. Mantıksal sonuç metnin verdiği sınırlar içinde kalır. Önceki GY-06 konularında metnin anlamını, GY-07'nin ilk beş konusunda koşullu ilişkileri ve yerleştirmeleri öğrendik. Bu konuda ise söz konusu beceriler, farklı türde kısa ve çok paragraflı açıklamalardan güvenilir sonuç çıkarmak için birleştirilir.

1. Metindeki bilgi ile çıkarımın farklı görevleri

Metindeki bilgi, doğrudan bildirilen veya açıkça tanımlanmış bir kuralın parçası olan öncüldür. Çıkarım ise bu bilgiler arasındaki ilişkiden ulaşılan, metinde aynı sözlerle yazılması gerekmeyen yeni yargıdır. Öncül ile sonuç arasında bir gerekçe zinciri kurulabiliyorsa çıkarım denetlenebilir. “Bir raporun özeti cuma günü gönderildi” ifadesi, raporun tamamının aynı gün gönderildiğini söylemez. Ancak aynı metinde “Her özeti gönderilen rapor ön kontrolden geçmiştir” kuralı da varsa cuma günü özeti gönderilen raporun ön kontrolden geçtiği sonucuna ulaşılır.

Açık bilgi ile çıkarımı ayırmak bir üstünlük sıralaması oluşturmaz. Kimi zaman en güvenli sonuç zaten metindeki açık cümlenin başka sözcüklerle ifade edilmesidir. Kimi zaman da iki ayrı cümlenin birlikte okunması gerekir. Asıl ölçüt, gerekçenin başlangıç metniyle izlenebilir ilişkisidir. Sonuç, metindeki verilerin etkili bir yeniden düzenlenmesi olabilir; buna karşılık yeni bir olay, yeni bir tarih veya kesin olmayan bir niyet eklenemez.

Metinsel yargının dayanak düzeyleri

Düzey	Özellik	Örnek ve değerlendirme
Açık bilgi	Metinde doğrudan bildirilir	“Dosya pazartesi kaydedildi” doğrudan bilgidir
Zorunlu çıkarım	Verilen bütün bilgilere uygun her durumda doğrudur	Bütün kayıtlı dosyalar numaralanmışsa kayıtlı dosya numaralıdır
Olası çıkarım	Metinle bağdaşır ama başka durumlar da mümkündür	Numara verilmiş bir dosyanın kayıtlı olması, yalnız verilen tek yönlü kuralla kesinleşmez
Dayanaksız ekleme	Metnin vermediği yeni iddiayı içerir	Numara verilen her dosyanın aynı gün sonuçlandığını varsaymak

2. Sonucun kesinliğini belirleyen temel ölçüt

Bir öncül kümesinden zorunlu çıkan sonuç, öncüllerin doğru kabul edildiği bütün olası durumlarda doğrudur. Önermelerden en az biri değişmediği hâlde sonucun yanlış kaldığı bir durum kurulabiliyorsa o sonuç zorunlu değildir. Bu karşı durum gerçek hayatta yaşanmış olmak zorunda değildir; verilen bilgilere aykırı olmaması yeterlidir. Bu yaklaşım, sezgisel tahmin yerine mantıksal gerektirmeyi esas alır.

Özgün bir örnekte “Kontrol edilen her belgeye işlem numarası verilir” ve “K belgesi kontrol edilmiştir” denilsin. K'nın işlem numarasının bulunduğu zorunludur. Bunun tersine “L belgesinin işlem numarası vardır” bilgisinden L'nin kontrol edildiği zorunlu biçimde çıkmaz; kurum kontrol dışındaki başka işlemler için de numara verebilir. Metin böyle bir olasılığı yasaklamamıştır. L'nin kontrol edildiği ve edilmediği iki ayrı durum, verilen cümlelerle bağdaşabilir. Bu iki durumun kurulabilmesi, kesin yargıya ulaşmayı engeller.

> Öncüller P1, P2, ..., Pn ⊨ Sonuç S
>
> **Anlamı:** Önermelerin tümünün doğru olduğu her durumda S de doğrudur; bu işaret mantıksal gerektirmeyi anlatır.
>
> **Koşullar:** Yalnız metinde verilen öncüller, açık tanımlar ve mantıksal ilişkiler kullanılır; olasılık yüksekliği kesinlik yerine geçmez.

3. Metnin kapsamını ve evrenini belirlemek

Bir çıkarımın hangi kişiler, belgeler, tarihler veya olaylar için geçerli olduğu, metnin başında belirtilen evrene bağlıdır. “Arşivdeki beş dosyanın tamamı tarandı” denildiğinde yalnız söz konusu beş dosya hakkında bilgi vardır. Bundan kurumun diğer arşivlerindeki bütün belgelerin tarandığı sonucu çıkmaz. Evren genişletilirse nicelik bildiren doğru bir cümle, yanlış bir genellemeye dönüşebilir. Öte yandan “Bu beş dosyadan üçü yayıma hazırdır” bilgisinin sayısal anlamı, yalnız bu beş dosya içinde değerlendirilir.

Kapsam ayrıca zaman, yer ve koşullarla sınırlanabilir. “Haziran döneminde teslim alınan başvuruların tamamı incelendi” ifadesi, mayıs dönemindeki başvuruların incelenip incelenmediğini açıklamaz. “Bölge A'da çalışan görevlilerin tümü eğitime katıldı” cümlesi, başka bölgelerdeki görevlilerin durumunu belirlemez. Sonuca ulaşıldığında hem nitelenen topluluk hem zaman ve işlem aşaması korunmalıdır. Metnin küçük bir alan için kurduğu kesinlik, geniş alan için de geçerli sayılmaz.

Kapsam taşmasının sonucu nasıl bozduğu

Metindeki sınır	Güvenli sonuç	Geçersiz genişletme
Eylül ayında alınan başvurular	Yalnız eylül başvurularına ilişkin durum	Yıl içindeki tüm başvurular
Kontrolden geçen dört belge	Bu dört belgeye bağlı özellik	Kurumdaki bütün belgeler
Birinci aşamayı bitirenler	Bu aşamayı bitirmiş alt grup	Başvuranların tamamı
En az iki toplantı	Alt sınır iki	Toplam toplantı sayısı kesinlikle iki

4. Bütün, bazı, hiçbiri ve sayısal sınırlar

“Bütün” ve “her”, belirtilen kümenin bütün elemanları üzerinde ortak bir özellik bulunduğunu belirtir. “Bazı” ise en az bir örneğin var olduğunu söyler; tek başına diğerlerinin bu özelliği taşımadığını göstermez. “Hiçbiri” ilgili özelliğe sahip eleman bulunmadığını, “yalnız biri” tam olarak birinin özelliği taşıdığını bildirir. “En az iki” iki veya daha çok, “en fazla iki” sıfır, bir veya iki olasılığına izin verir. Böyle nicelikleri metne ait ek koşullar olmadan daraltmak doğru değildir.

“Bir birimdeki bütün makineler bakımdan geçti” ifadesi, birimde kaç makine bulunduğunu tek başına bildirmez; kullanılan matematiksel anlamda boş birim olasılığını ayrıca dışlamaz. Dolayısıyla yalnız “bütün A'lar B'dir” öncülünden en az bir A bulunduğu çıkarılamaz. Buna karşılık “Birimde en az bir makine vardır ve bütün makineler bakımdan geçmiştir” denildiğinde en az bir bakımdan geçmiş makinenin varlığı kesinleşir. Doğal dilde çoğu zaman varlık ima edilse de mantıksal kesinlik arandığında bu ima ile açık varlık bilgisi ayrılmalıdır.

Nicelik ifadelerinin güvenli yorumları

İfade	Kesin anlamı	Tek başına söylemediği
Bütün X'ler Y'dir	Her X elemanı Y özelliğini taşır	Mutlaka bir X vardır
Bazı X'ler Y'dir	En az bir X, Y özelliğini taşır	Bazı X'ler kesinlikle Y değildir
Hiçbir X, Y değildir	X ile Y ortak eleman taşımaz	X kümesinin boş olmadığı
Yalnız bir X, Y'dir	Tam bir X, Y özelliğini taşır	Bu kişinin kim olduğu
En az üç	Sayı üç veya daha büyüktür	Sayı tam olarak üçtür
En fazla üç	Sayı sıfır ile üç arasındadır	Sayı kesinlikle üçtür

5. Olumsuz ifadelerde nicelik ve kapsam

“Hiçbir başvuru reddedilmedi” cümlesi, reddedilen başvuru sayısının sıfır olduğunu söyler; bütün başvuruların kabul edildiğini tek başına göstermez, çünkü başvurular inceleme aşamasında olabilir. “Başvuruların tamamı kabul edilmedi” cümlesi de günlük kullanımda iki ayrı anlamı çağrıştırabilir: Hiçbiri kabul edilmedi veya hepsi kabul edilmedi. Kesin mantıksal çözümde böyle belirsizlikler, metnin bağlamıyla giderilir; mümkün değilse belirsiz ifadeden güçlü sonuç çıkarılmaz.

Belirsizliği ortadan kaldıran ifadeler tercih edilmelidir: “En az bir başvuru kabul edilmedi”, “Hiçbir başvuru kabul edilmedi” veya “Bütün başvurular kabul edildi” cümlelerinin her birinin kapsamı farklıdır. Bir kümenin tüm elemanlarının belirli özelliği taşımadığını söylemek ile en az bir elemanın bu özelliği taşımadığını söylemek aynı değildir. Özellikle olumsuzluk ekinin “bütün” sözcüğünün önüne mi sonuna mı etki ettiğini anlamak, yanlış çıkarımları önler.

6. Koşullu bilginin metindeki işlevi

Koşullu cümleler metin içinde sonuç zincirleri kurar. “Kontrol tamamlanırsa belge yayımlanabilir” cümlesindeki “yayımlanabilir”, yayımlamanın mutlaka gerçekleştiğini değil bunun bir olasılık veya izin hâline geldiğini anlatır. Aynı cümle “Kontrol tamamlanırsa belge yayımlanır” olsaydı öncül gerçekleştiğinde yayımlanma sonucu zorunlu olurdu. Sözcük değişimi mantıksal gücü değiştirir. Bu yönüyle koşullu önermelerdeki “ise” ilişkisi, metindeki kiplerle birlikte değerlendirilmelidir.

“Yalnızca kimlik doğrulamasını bitiren kişiler sisteme giriş yapabilir” ifadesi, giriş yapanların kimlik doğrulamasını bitirmiş olmasını gerektirir. Kimlik doğrulamasını bitiren herkesin giriş yaptığı veya mutlaka yapacağı sonucu ise çıkmaz. Önceki GY-07.03'te koşullu önermelerin sembolik yönü ayrıntılı işlendi. Burada yeni olan, bu yönün olay anlatısına, belgenin işlem aşamasına ve ihtimal bildiren fiillere doğru uygulanmasıdır.

Kayıt işlemi örneğinde kipin sonuç üzerindeki etkisi

Metindeki ifade	Zorunlu sonuç	Yasak güçlü yorum
Denetim biterse kayıt kapanır	Denetim bitmişse kayıt kapanır	Kayıt kapandıysa denetim kesin bitmiştir
Denetim bitince kayıt kapanabilir	Kapanma imkânı doğabilir	Kayıt kesin kapandı
Yalnız denetlenen kayıtlar kapanır	Kapanmış bir kayıt denetlenmiştir	Her denetlenen kayıt kapanmıştır
Kayıt kapanmış olabilir	Kapanmış olması metinle bağdaşır	Kayıt kesin kapandı

7. Zaman sırası, eş zamanlılık ve olayın tamamlanması

Zaman bildiren ifadelerden sonuç çıkarırken önce olayların birbirine göre sırası belirlenir. “Toplantıdan sonra tutanak hazırlandı” cümlesi, tutanağın toplantıdan önce hazırlanmadığını ve iki olayın bu sırayla gerçekleştiğini anlatır; toplantının tam saatini veya tutanağın kaç dakika sonra hazırlandığını bildirmez. “Toplantı sırasında not alındı” ifadesinde ise not alma eyleminin toplantıyla zaman bakımından örtüştüğü anlaşılır, bütün notların toplantı süresi içinde tamamlandığı kesinleşmeyebilir.

“Taslak hazırlandıktan sonra ön inceleme yapıldı; ön incelemeden sonra duyuru yayımlandı” biçimindeki özgün metinde taslak, ön inceleme ve duyuru sırası kesindir. Taslağın duyurudan önce hazırlandığı iki cümlenin birleşiminden çıkar. Ancak duyurunun aynı gün yapıldığı ya da ön incelemenin hatasız sonuçlandığı söylenemez. Olayların sırasını bilmek, her birinin niteliğini veya süresini bilmek anlamına gelmez.

Zaman cümlelerinden çıkan ve çıkmayan bilgiler

Metin bilgisi	Çıkan sonuç	Çıkmayan sonuç
A, B'den önce tamamlandı	A önce, B sonra	İki olay aynı gün gerçekleşti
C, B tamamlandıktan sonra başladı	B bitmeden C başlamadı	C hemen ardından başladı
D, E sırasında başladı	Başlangıç zamanları bakımından örtüşme vardır	D ve E aynı anda bitti
F için gelecek hafta plan yapıldı	F henüz plan aşamasında anılıyor	F kesin gerçekleştirildi

8. Neden, gerekçe, amaç ve eşlik eden gelişme

Bir metinde sonuçtan önce gerçekleşen olay, sırf önce geldiği için sonucun nedeni sayılmaz. “Yeni kayıt ekranı açıldıktan sonra başvuru sayısı arttı” ifadesi iki olayı ve bunların zamanını verir; artışın yalnız kayıt ekranından kaynaklandığını kanıtlamaz. Metin ayrıca artışın nedeni olarak tanıtım kampanyası, mevzuat değişimi veya başka bir etken göstermiş olabilir. Yalnız birlikte değişme görülmesi ise nedensellik için yeterli değildir. “Yoğunluk nedeniyle işlem süresi uzadı” cümlesi ise metnin açıkça bildirdiği nedensel açıklamayı içerir; okuyucu bunu metindeki bir iddia olarak aktarabilir, ama bağımsız olarak doğrulanmış bilimsel olgu olarak sunmamalıdır.

Amaç ile sonuç da ayrıdır. “Bekleme süresini azaltmak amacıyla ek gişe açıldı” cümlesi, gişenin niyetini bildirir; bekleme süresinin gerçekten azaldığını söylemez. Benzer biçimde “Sorunu gidermek için yazılım güncellendi” ifadesinde güncelleme işleminin yapıldığı söylenebilir, sorunun kesin giderildiği çıkarılamaz. Sonuç cümlesindeki kesinlik, eylemin amacıyla değil metnin verdiği gerçekleşme bilgisiyle sınırlıdır.

9. Olgu, değerlendirme ve aktarılan görüşü ayırmak

Metinde iki kişinin farklı görüşleri aktarılıyorsa bu görüşler anlatıcının veya kurumun ortak kararı hâline getirilemez. “Birim yöneticisi çevrim içi uygulamanın daha hızlı olduğunu savundu; raporu hazırlayan uzman ise hızın yalnız bazı işlemlerde arttığını belirtti” cümlesinde iki görüşün farklı kapsamda olduğu açıktır. Metin, her işlemde hız kazanıldığını değil, bir kişinin böyle bir sav ileri sürdüğünü gösterir. Bu tür cümlelerde konuşanın kimliği ile yargının doğrulanmış durumu ayrı tutulur.

Bir gözlem, ölçümle desteklenmiş olgu veya görüş cümlesi aynı derecede kanıt sunmaz. “Çalışanların çoğu memnun görünüyor” ifadesi gözlemsel bir izlenim olabilir; ölçüm yöntemi belirtilmeden kurumun bütün çalışanlarının memnun olduğu sonucuna varılamaz. “Yapılan ölçümde katılımcıların yüzde altmışı olumlu yanıt verdi” ifadesi ise yalnız belirtilen katılımcılar ve ölçüm koşulları için nicel sonuç verir. Ölçümün doğruluğu tartışılabilir, fakat metin dışı yeni bir evren varsayımı eklenemez.

Metinsel kanıt türlerinin değerlendirilmesi

İfade türü	Söylenebilen	Söylenemeyen
Bir kişinin görüşü	Kişi böyle bir görüş bildirmiştir	Görüş herkesçe kabul edilmiştir
Ölçüm sonucu	Belirtilen örneklemde sonuç görülmüştür	Tüm nüfusta aynı oran vardır
Amaç açıklaması	Bir hedef gözetilmiştir	Hedef gerçekleşmiştir
Plan duyurusu	Uygulama planlanmıştır	Uygulama tamamlanmıştır

10. Metnin kesin sonuçlarına ulaşırken bilgi zinciri kurmak

Bir metinde birbirinden uzak cümleler aynı varlık üzerinde birleşebilir. Örneğin şu özgün açıklama ele alınsın: “Merkezdeki bütün dijital dosyalar yedeklenir. X dosyası dijital olarak saklanmaktadır. Yedeklenen dosyaların bir bölümüne ayrıca erişim kısıtı uygulanır.” İlk iki cümle, X'in yedeklendiğini zorunlu kılar. Üçüncü cümle ise X'e erişim kısıtı uygulandığını kanıtlamaz; çünkü yalnız yedeklenenlerin bir bölümü kısıtlanmıştır ve X'in bu bölümde bulunup bulunmadığı açıklanmamıştır.

Bu çözümde önce “dijital dosya → yedekli” genel kuralı belirlenir, ardından X'in dijital dosya olduğu öncülü kullanılır. Üçüncü cümledeki “bir bölüm” ifadesinin kapsamına yeni bir ad eklenmez. Metin uzadıkça en güvenli yöntem, çıkarılan her yargının hangi iki veya daha fazla öncüle dayandığını kısa biçimde gösterebilmektir. Zincirin herhangi bir halkası yalnız varsayım ise ulaşılan sonuç kesin olamaz.

11. Açıkça söylenmeyen sonucu bulmak ile boşluğu tahminle doldurmak

Bazı çıkarımlar doğrudan yazılmamıştır ama metnin yapısında zorunlu olarak bulunur. “Araştırma raporunun son düzenlemesini Elif yaptı; raporu Elif'ten sonra hiç kimse değiştirmedi” bilgileri, metindeki zaman dilimi içinde son düzenleme yapan kişinin Elif olduğu sonucuna götürür. Buna karşılık Elif'in raporu onayladığı, bütün verileri kendisinin topladığı ya da raporun hatasız olduğu çıkarılamaz. Son düzenlemeyi yapmak, raporun her aşamasından sorumlu olmakla aynı şey değildir.

Boşluğu tahminle doldurma genellikle gerçekçi bir hikâye kurmaktan kaynaklanır. “Mehmet, toplantı davetini açmadı” cümlesinden Mehmet'in toplantıdan habersiz olduğu çıkarılmayabilir; daveti başka yoldan öğrenmiş olabilir. “Bir dosya geri gönderildi” cümlesi de dosyanın mutlaka yanlış olduğu anlamına gelmez; eksik ek, yetki konusu, biçim denetimi veya başka bir neden söz konusu olabilir. Metinde açıklanmayan neden, kesin çıkarımın parçası yapılmamalıdır.

12. Karşı örnekle zorunluluğu sınamak

Bir sonuç doğru göründüğünde onu doğrulayan tek bir düzen kurmak yeterli değildir. Zorunluluk denetimi için sonucun tersini gerçek kılabilecek ve metindeki bütün bilgileri koruyabilecek bir durum aranır. “Üç bölümden en az biri denetim raporu hazırladı” metnine dayanarak A bölümünün rapor hazırladığı sonucuna ulaşılamaz: A hazırlamamış, B hazırlamış olabilir. Metnin koşulu yine sağlanır. Aynı şekilde “en az biri” bilgisi, tam olarak bir rapor hazırlandığını da göstermez; iki veya üç bölüm rapor hazırlamış olabilir.

Bunun tersine “Üç bölümden yalnız B rapor hazırladı” denildiğinde hem B'nin hazırladığı hem A ve C'nin hazırlamadığı kesindir; burada kapsanan üç bölümün tamamı açıkça sayılmalıdır. Karşı örneği kurarken metindeki bir kuralı ihlal etmek, zorunlu sonucu çürütmez. Geçerli karşı örnek, başlangıçtaki her bilgiye uyar fakat hedeflenen sonucu yanlış kılar. Böyle bir örnek bulunamaması, küçük ve tamamen taranabilen sonlu durumlarda zorunluluğun kontrol edilmesine yardımcı olur.

> **Mantıksal zorunluluk denetimi** Bir yargının metinle uyumlu olması, metinden zorunlu çıktığını göstermez. Zorunlu sonuç için başlangıçtaki bütün bilgiler doğruyken sonucun yanlış olduğu hiçbir geçerli durum kalmamalıdır. Karşı örnek mutlaka metindeki bütün koşulları sağlamalıdır.

13. Somut bir metinde kesin ve olası sonuçları ayırma

Bir örnek metinde bir araştırma biriminin dört ayrı dosyası bulunduğu bildirilsin: K, L, M ve N. K ile M ön incelemeden geçmiş, L henüz ön incelemeye alınmamış, N'nin durumu ise açıklanmamıştır. “Yayımlanan bütün dosyalar ön incelemeden geçmiştir” kuralı ayrıca verilir. Son olarak K'nın yayımlandığı, M'nin yayım kararının beklediği belirtilir. Bu bilgilerin toplamından K'nın ön incelemeden geçtiği zaten açık bilgidir; yayımlananların ön incelemeli olmasıyla uyumludur. M'nin ön incelemeden geçmesine rağmen henüz yayım kararı beklemesi, ön inceleme ile yayımlanmanın iki ayrı aşama olduğunu somutlaştırır.

L'nin yayımlanmadığı sonucu ise ancak “L henüz ön incelemeye alınmamıştır” ile “yayımlananların hepsi ön incelemeden geçmiştir” cümleleri birlikte değerlendirildiğinde kesinleşir. Yayım gerçekleşmiş olsaydı ön inceleme tamamlanmış olurdu; bu, L hakkındaki bilgiyle çelişirdi. N'nin yayımlanıp yayımlanmadığı ise belirlenemez. N'nin durumu bilinmediği için N'nin hem ön incelemeden geçmiş hem yayımlanmış olduğu bir düzen de, henüz incelenmediği bir düzen de metinle bağdaşabilir. Bir kişinin ya da belgenin durumunun bilinmemesi, onun kesin olarak hiçbir işlem görmediği anlamına gelmez.

Dört dosyalı özgün metnin çıkarım denetimi

Dosya	Verilen ön inceleme bilgisi	Verilen yayım bilgisi	Mantıksal sonuç
K	Geçti	Yayımlandı	İki aşama da gerçekleşmiş
L	Henüz başlamadı	Açıklanmadı	Yayımlanmış olamaz
M	Geçti	Karar bekleniyor	İncelemeden geçmek yayımlanmak demek değil
N	Açıklanmadı	Açıklanmadı	Durumu kesinleştirilemez

Bu tabloda K ve M'nin farklı işlemlere gelmiş olması, metnin kapsamını değiştirmez. Yayımlanmayan her dosyanın ön incelemeden geçmediği söylenemez; M bunun karşı örneğidir. L'nin yayımlanmamış olduğu sonucunun gerekçesi ise kişisel beklenti değil genel kuralın karşıt tersinin uygulanmasıdır. İlgili kuralın tam yönü önceki konuda öğrenilmiş olsa da burada metindeki tüm ifadelerle birlikte anlam kazanmıştır.

14. Sınıflandırmadan çıkan örtük ilişkileri belirlemek

İki veya daha fazla sınıf bulunduğunda bir elemanın hangi sınıfa girdiğini bilmek başka hangi sınıfa girmediğini her zaman göstermez. “Her elektronik dosya sayısal arşivde tutulur” cümlesi elektronik dosyaları sayısal arşivin bir alt grubuna yerleştirir; sayısal arşivde elektronik olmayan kayıt bulunup bulunmadığını bildirmez. Ancak metinde “Dosyalar yalnız kâğıt ya da elektronik biçimde, birbirini dışlayan iki türde saklanır” denilmişse bir dosyanın elektronik oluşu onun aynı sınıflandırma içinde kâğıt türünde olmadığını gerektirir.

Bir sınıflandırmanın birbirini dışlayıp dışlamadığı ayrıca önem taşır. Çalışanlar hem eğitim almış hem sertifikalı olabilir; bu özellikler ayrı seçenekler değildir. Buna karşılık “Dört rapordan ikisi teknik, diğer ikisi idari olmak üzere her rapor yalnız bir gruptadır” denildiğinde teknik olanların idari olmadığı kesindir. Kümeler arasındaki ilişkinin cümlelerde açık bulunmadığı durumlarda okuyucu grupları kendiliğinden ayrık kabul etmemelidir.

15. Bilginin olmadığı durum ile olumsuz bilginin ayrımı

Bir metinde bir kişinin görevi belirtilmemişse kişinin görevsiz olduğu çıkarılamaz. “Ayşe'nin görevlendirme bilgisi paylaşılmadı” ifadesi bilgiye erişim durumunu açıklar; “Ayşe görevlendirilmedi” ise gerçek işlemin gerçekleşmediğini bildirir. Bu iki cümle farklı olaylardır. Aynı ayrım “yayımlanmadı” ve “yayımlanıp yayımlanmadığı açıklanmadı”, “onaylanmadı” ve “onayı hakkında bilgi bulunmuyor” ifadeleri arasında da vardır.

Özgün bir açıklamada üç raporun incelendiği, bir raporda bulgu bulunduğu ve diğer iki raporun içeriğine dair bilgi verilmediği düşünülürse, yalnız bir raporda bulgu olduğu sonucu çıkmaz. Belirtilen bir rapor bulgulu olduğu için en az bir raporda bulgu vardır; diğer ikisinde de bulgu bulunması mümkündür. Metin ayrıca “Öteki iki raporda bulgu yoktur” deseydi en az bir sonucundan tam olarak bir sonucuna geçilebilirdi. Bilgi eksikliği, bir yargının olumsuzu değildir.

Olumsuz olay ile bilgi eksikliği ayrımı

İfade	Kesinleşen	Kesinleşmeyen
Başvuru kabul edilmedi	Kabul gerçekleşmedi	Başvuru mutlaka reddedildi
Kabul sonucu açıklanmadı	Sonuç bilgisi verilmedi	Başvuru kesin reddedildi
Rapor yayımlanmadı	Yayım gerçekleşmedi	Rapor hiç hazırlanmadı
Yayım bilgisi paylaşılmadı	Okuyucunun yayım bilgisi yok	Rapor kesin yayımlanmadı

16. Metindeki karşılaştırma yargılarının sınırları

“Birinci yöntem ikinci yöntemden daha az süre gerektirdi” ifadesi, yalnız süre ölçütü bakımından bir karşılaştırmadır. Birinci yöntemin daha ucuz, daha güvenilir veya genel olarak daha iyi olduğu çıkarılamaz. Ayrıca süre farkının miktarı belirtilmemişse kesin bir zaman tasarrufu sayısı bulunamaz. “İki yöntemden biri daha başarılıdır” gibi öznesi belirsiz bir ifade, başarının hangi ölçüte göre hesaplandığını açıklamadıkça farklı yorumlara açıktır.

Örnek bir metinde A raporunun 12 sayfa, B raporunun 9 sayfa olduğu ve ikisinin de aynı kapsamı işlediği belirtilsin. A'nın B'den üç sayfa uzun olduğu aritmetik sonuçtur. A'nın daha ayrıntılı veya daha doğru olduğu ise yalnız sayfa sayısından kesinleşmez. Sayfa uzunluğu ile bilgi kalitesi farklı özelliklerdir. Bu ayrım, sayısal bir verinin metinde bulunması hâlinde de başka özelliklere keyfî aktarılmaması gerektiğini gösterir.

17. İki metin arasında ortak sonuç ve çelişki

Birden fazla kısa açıklama verildiğinde her metnin doğruladığı yargılar ayrı belirlenir; ardından ortak alan bulunur. Birinci açıklama “Yeni yöntem belgelerin sayısallaştırılmasını kolaylaştırdı” derken ikinci açıklama “Sayısallaştırma, özgün belgenin korunması ihtiyacını ortadan kaldırmadı” diyebilir. Bu cümleler çelişmez: İlki erişim veya işlem kolaylığından, ikincisi asıl belgeyi saklama gereğinden söz etmektedir. Birlikte ele alındıklarında sayısallaştırmanın yararlı olmasıyla fiziksel korumanın sürmesi gerektiğinin bağdaşabildiği sonucu çıkar.

Gerçek bir çelişki kurulabilmesi için aynı özne, aynı zaman, aynı kapsam ve aynı yüklem hakkında birbirini dışlayan hükümler bulunmalıdır. “Bu ay A kayıtlarının hepsi kapatıldı” ile “Bu ay A kayıtlarından en az biri açık kaldı” cümleleri, aynı kayıt kümesi ve aynı zaman dilimini anlatıyorsa çelişkilidir. Buna karşılık biri geçen ayı, öteki bu ayı bildiriyorsa çelişki zorunlu değildir. Metnin birinde ek bilgi bulunması, ötekinin yanlış olduğunu göstermez.

İki açıklama arasındaki ilişkiyi ayırt etme

İki ifade	İlişki	Gerekçe
İşlem süresi azaldı / Kontrol gerekliliği sürdü	Uyumlu	Süre ve kontrol ayrı özelliklerdir
A dosyalarının tümü bugün kapandı / A dosyalarından biri bugün açık kaldı	Çelişkili	Aynı küme ve zaman için karşıt bilgi
Bir rapor onaylandı / İki rapor daha incelemede	Uyumlu	Raporlar farklı olabilir
Geçen hafta geç teslim oldu / Bu hafta zamanında teslim edildi	Uyumlu	Zaman dilimi farklıdır

18. Metinde belirtilen istisnaların sonuç üzerindeki etkisi

Bir genel kural istisna içeriyorsa sonuç ancak istisnanın sınırları gözetilerek çıkarılabilir. “Bütün belgeler saat 17.00'ye kadar teslim edilir; acil işlemler bu sürenin dışındadır” cümlesinde acil işlem niteliğindeki belgelerin 17.00'den sonra mutlaka teslim edildiği söylenmez. Yalnız genel teslim kuralının bu gruba uygulanmadığı belirtilmiştir. İstisnaya tabi olmak, tersine bir zorunluluk yüklenmesi demek değildir.

Bir metinde “Geçerli başvuruların tamamı kimlik kontrolünden geçer; ancak kurum içi aktarım kayıtları bu kapsama alınmaz” ifadesi bulunsun. Kurum içi aktarım kaydının kimlik kontrolünden kesin geçmediği çıkarılamaz; ayrı bir işlemle yine kontrol edilmiş olabilir. İstisna, genel şartın bu kategori için zorunlu olup olmadığını değiştirir. Sonuç çıkarırken istisnayı bütünden çıkarıp ters özelliği doğrudan yüklemek yanlış olur.

19. İddianın gücünü artıran ve azaltan sözcükler

“Kesinlikle”, “mutlaka”, “yalnız”, “tümü”, “hiç”, “en az” ve “en fazla” gibi sözcükler yargının kapsamını belirler. “Genellikle”, “çoğunlukla”, “olabilir”, “bazı durumlarda”, “muhtemelen” ve “beklenmektedir” ifadeleri ise güçlü kesinlik yerine sıklık, ihtimal veya beklenti sunar. Metinde ihtiyat payıyla verilen bilgi, sonuçta kesin hükme çevrilemez. Buna karşılık çok güçlü bir cümleyi sebepsiz biçimde zayıflatmak da metindeki gerçeği eksik aktarabilir.

Örneğin “Bütün çevrim içi oturumların kayıtları sistemde saklanır” cümlesi, çevrim içi yapılan her oturum için kayıt saklandığı hükmüdür. “Çevrim içi oturumların çoğunun kayıtları saklanır” biçimine dönüştürülmesi, baştaki kesinliği zayıflatır; sonuç olarak yanlış olmak zorunda değildir ama başlangıç cümlesinin sağladığı tam

bilgiyi korumaz. “Çoğu oturumun kaydı saklanıyor” bilgisinden “bütün oturumlar kayıtlıdır” çıkarmak ise geçersiz güçlü çıkarımdır.

Sözcük değişimlerinin mantıksal sonuçları

İlk ifade	Genişletilmiş ifade	Sorun
Bazı işlemler tamamlandı	Bütün işlemler tamamlandı	Miktar kapsamı artırıldı
İşlem tamamlanabilir	İşlem tamamlandı	Olasılık gerçekleşme sayıldı
İşlemin tamamlanması planlanıyor	İşlem kesin tamamlanacak	Plan zorunluluk sayıldı
En az üç dosya incelendi	Tam üç dosya incelendi	Üst sınır eklenmiş oldu

20. Özgün olay metninde çok aşamalı mantıksal çıkarım

Bir kurumun üç başvuru grubu için yayımladığı kısa bilgilendirme metni şöyle kurulmuş olsun: “Kısa listeye yalnız ön değerlendirmeyi tamamlayan başvurular alınır. Kısa listeye alınan başvuruların tümü ikinci aşama daveti alır. Davet alan her başvurunun ikinci aşamaya katıldığı söylenemez. A başvurusu kısa listededir. B başvurusu ön değerlendirmeyi tamamlamıştır ancak kısa listede bulunduğuna ilişkin bilgi verilmemiştir. C başvurusu ikinci aşama daveti almıştır.”

A'nın ön değerlendirmeyi tamamladığı ve ikinci aşama daveti aldığı kesindir. İlk sonuç yalnız kısa listeye alınabilmek için ön değerlendirme gerektiği kuralından, ikinci sonuç kısa listedeki herkesin davet aldığı kuralından doğar. A'nın ikinci aşamaya gerçekten katıldığı bilgisi ise bulunmamaktadır. B'nin ön değerlendirmeyi tamamlaması, kısa listeye alındığını kanıtlamaz; gerekli koşulun gerçekleşmesi yeterli koşulun gerçekleştiği anlamına gelmez. C'nin davet almış olması da doğrudan kısa listede olduğunu kanıtlamaz; davet başka bir yolla verilmiş olabilir. Metin “Davet yalnız kısa listeden gönderilir” demediği sürece bu ters yöndeki çıkarım geçerli değildir.

Kısa liste ve davet metninin bağımsız çıkarımları

Başvuru	Kesin bilgi	Açıklanmayan durum
A	Ön değerlendirmeyi bitirdi; kısa listede; davet aldı	İkinci aşamaya fiilen katılıp katılmadığı
B	Ön değerlendirmeyi tamamladı	Kısa listeye girip girmediği; davet durumu
C	Davet aldı	Kısa listeye girip girmediği; katılım durumu

Bu örnekte birinci ve ikinci aşamalar arasında işlem zinciri vardır; ancak zincir yalnız kuralın izin verdiği yönde ilerler. Davet almanın kısa liste dışında da mümkün olduğu bir örnek durum, C için kesin kısa liste yargısını çürütür. B'nin değerlendirmeyi bitirdiği hâlde listeye alınmadığı bir örnek durum da B hakkında kesin liste çıkarımını çürütür. A için ise bu karşı durumlar kurulamaz, çünkü A'nın listede olduğu açıkça yazılmıştır.

21. Sayısal bilginin sözel sonuçla birleştirilmesi

Nicelik içeren kısa bir metnin mantıksal sonucu, yalnız dört işlemle değil miktarın hangi alt gruba ait olduğunun doğru anlaşılmasıyla bulunur. Örneğin “Bir oturuma on kişi davet edildi. Davetlilerin yedisi katılım bildirdi. Katılım bildirenlerin beşi toplantıya geldi. Bildirim yapmayanların gelip gelmediği belirtilmedi” denilsin. Kesin olan, en az beş kişinin toplantıya geldiğidir. Bildirim yapmayan üç kişinin de gelmiş olması mümkündür. Ayrıca bildirim yapıp gelmeyen iki kişi bulunduğu kesindir. Davet edilen toplam on kişinin fiilî katılımını tam olarak beş kabul etmek, metnin bıraktığı üç kişilik belirsizliği yok sayar.

Buradaki sayılar bağımsız kontrol edilebilir: Katılım bildiren yedi kişinin beşi gelmişse ikisi gelmemiştir. Bildirim yapmayanlar on eksi yedi, yani üç kişidir. Bu üç kişiden sıfır ile üçü arasında herhangi bir sayı gelebileceğinden toplam katılım beş ile sekiz arasında olabilir. Bu aralık, on davetlinin tamamının katılımı hakkında ek bilgi verilmemişken çıkarılabilecek en dar güvenli sonuçtur. Katılım bildiren iki kişinin gelmemesi, toplamın dokuz veya ona ulaşmasını engeller.

> Kesin alt sınır = 5; mümkün toplam katılım = 5 + x, 0 ≤ x ≤ 3; dolayısıyla 5 ≤ toplam ≤ 8
>
> **Anlamı:** Bildirim yapıp gelen beş kişi kesindir; bildirim yapmayan üç kişinin katılımı bilinmediği için toplam bir aralıktır.
>
> **Koşullar:** Davetliler dışında katılımcı olmadığı ve verilen on kişinin tüm evren olduğu kabul edilir. Diğer durumlar veya misafir katılımı metinde verilmediğinden ayrıca eklenmez.

22. Varsayımın sonuç üzerindeki etkisini açıkça göstermek

Bir metin yetersiz bilgi içeriyorsa açıkça belirtilmiş ek bir varsayım altında sonuç üretilebilir; ancak bu sonuç artık başlangıç metninin tek başına kesin hükmü değildir. Yukarıdaki toplantı örneğine “Bildirim yapmayan hiç kimse toplantıya gelmez” varsayımı eklenirse toplam katılım beşe iner. “Bildirim yapmayanların üçü de gelir” varsayımı eklenirse toplam sekiz olur. Her iki yorum da başlangıçta mümkün durumlara karşılık gelir; fakat bunlardan biri metnin kendisi tarafından zorunlu kılınmamıştır.

Varsayıma dayalı sonuçla doğrudan zorunlu sonucu birbirinden ayırmak hem günlük kararları hem sınav muhakemesini güçlendirir. Kullanılan ek bilgi metinde bulunmuyorsa “şu varsayım altında” ifadesiyle açıkça belirtilmelidir. “Normalde davet alan herkes gelir”, “genellikle rapor kontrol edildikten sonra onaylanır” veya “çoğu zaman en hızlı yöntem en iyisidir” gibi deneyimsel kabuller, özel olarak belirtilmedikçe metindeki mantık kurallarını değiştirmez.

23. Metinden çelişki bulmanın ve çıkarsama yapmanın farkı

Bir metinde verilen öncüller birbirine aykırıysa, bunlardan güvenilir olgu çıkarma işlemi ayrıca değerlendirilmelidir. “Dört belgenin hiçbiri yayımlanmadı” ve “Bu dört belgeden M yayımlandı” cümleleri aynı zaman ve aynı belge kümesini konu alıyorsa çelişir. Burada doğru yaklaşım, çelişkiyi görünmez kılıp rastgele bir yargı seçmek değildir. Önce veri kümesinin tutarsız olduğu belirtilmelidir. Metinde tarihler veya kapsamlar farklıysa çatışma giderilebilir; ikisi de aynı olduğunda ek açıklama gerekir.

Buna karşılık yalnızca bir iddiadan çıkan sonucun şaşırtıcı olması, çelişki bulunduğunu göstermez. “Yalnızca yöneticiye teslim edilen raporlar incelendi” ile “X raporu incelendi ama yöneticiye e-posta yoluyla gönderildi” cümleleri çelişmeyebilir; e-posta yoluyla gönderilmek yöneticiye teslim edilmenin bir biçimi olabilir. “Teslim” kavramına özel olarak fiziksel teslim anlamı yüklenmedikçe iki cümle uzlaştırılabilir. Belirsiz kelimeleri keyfî daraltmak, olmayan bir çelişki yaratır.

24. Uzun anlatımlarda gereksiz bilgiyi ve belirleyici cümleyi ayırma

Geniş metinlerde kişilerin geçmişleri, ortamın niteliği veya sürecin ayrıntıları bulunabilir. Bu bilgiler anlatıyı anlamaya yardımcı olsa da hedeflenen sonuç üzerinde etkili olmayabilir. Bir raporun hangi gün yazılmaya başlandığı, raporun kim tarafından onaylandığına ilişkin kuralla bağlantılı değilse onay sonucunu belirlemez. Buna karşılık “Bütün onaylar son incelemeyi tamamlayanlara verilir” cümlesi doğrudan belirleyici olabilir. Önemli olan metnin en dikkat çekici cümlesini değil, çıkarımı etkileyen cümleyi bulmaktır.

Bu ayrım yalnız hızla ilgili değildir. Metin içinde anlatıcı, bir kişi hakkında olumlu nitelikler saydıktan sonra o kişinin ilgili sınavı kazanıp kazanmadığını belirtmemiş olabilir. Çalışkan, deneyimli ve hazırlıklı görünmek

başarı olasılığını düşündürse de kesin başarı bilgisi oluşturmaz. İlgisiz veya yalnız arka plan sağlayan ayrıntılar, metnin eksik bıraktığı sonucu tamamlamak için kullanılmamalıdır.

25. Güvenilir çıkarımın denetlenebilir anlatımı

Mantıksal sonuca ulaşmak, sonucu tek başına yazmakla bitmez. İyi bir açıklama önce kullanılan bilgileri belirtir, sonra bu bilgilerin ortak özne üzerinde nasıl birleştiğini gösterir, son olarak hangi sınırın korunduğunu açıklar. “X kesin davet almıştır; çünkü X kısa listededir ve kısa listedekilerin tamamına davet gönderilir” cümlesi bu yapıya sahiptir. “B kesin davet almıştır; çünkü ön değerlendirmeyi tamamlamıştır” cümlesi ise aynı metinde geçersizdir; kısa listeye kabul edildiği öncülü eksiktir.

Denetlenebilir açıklama, bilgi türüne uygun kesinlik sözcükleri kullanır. Sonuç zorunluysa “kesin”, veriler yalnız olanağı gösteriyorsa “mümkün”, kesinliği belirlenemiyorsa “metinden anlaşılamaz” gibi ölçülü ifadeler seçilir. Bu sözcüklerin yerinde kullanılması, okuyucunun hangi bilgiyi doğrudan öğrendiğini ve hangi bilgiyi yorumlayarak ürettiğini görmesini sağlar. Metinle bağdaşan tek bir senaryonun kurulması, başka senaryoların dışlandığını kanıtlamaz; özellikle eksik bilgi bulunan olaylarda bu sınır korunmalıdır.

Sonuç çıkarırken uygulanabilecek denetim sırası

Aşama	Temel işlem	Gerekçe
Kapsam	Kişi, belge, zaman ve olay sınırlarını belirlemek	Genellemeyi yanlış genişletmemek
Öncül	Açık bilgileri ve tanımları ayırmak	Varsayımı olgu saymamak
Bağlantı	Ortak özne ve koşulları ilişkilendirmek	Sonucu izlenebilir kılmak
Karşı durum	Sonucun yanlış olduğu geçerli durumu aramak	Zorunluluğu sınamak
Dil	Kesinlik, ihtimal ve bilinmezlik düzeyini korumak	Sonucu gereksiz güçlendirmemek

26. Sözel mantık bölümünün bütünlüğü ve son değerlendirme

Sözel mantık, birbirinden kopuk yöntemler toplamı değildir. Bir problemi çözebilmek için bazen önce kişilerin sırası belirlenir, bazen özellikler eşleştirilir, bazen koşullu kuralların yönü çözülür, bazen de bütün bilgiler bir tabloya taşınır. Bu bölümde üzerinde durulan metinsel sonuç çıkarma ise elde edilen veya doğrudan verilen bilgilerin neyi zorunlu kıldığını sorgular. Dolayısıyla daha önce edinilen tekniklerin ortak denetim ölçütüdür. Bir tablo doğru kurulmuş olsa bile metnin söylemediği bir sonucunu eklemek, çözümü geçersizleştirir.

Sözel muhakemede güvenilir okuma, metni olduğu gibi kabul ederek başlar; fakat bu, metinde geçen her görüşü genel gerçek saymak anlamına gelmez. Söylenen ile çıkarılan, zorunlu ile mümkün, bilinmeyen ile yanlış, zaman sırası ile nedensellik, amaç ile gerçekleşme ve istisna ile ters hüküm ayrı değerlendirilir. Niceliklerin, öznenin ve zamanın kapsamı korunur. Açık bilgi gerekirse farklı bir temsil üzerinde gösterilir, ulaşılan sonuçlar karşı örnekle sınanır. Böylece okuyucu bir sonuca yalnız ulaşmakla kalmaz, o sonucun neden doğru olduğunu ve hangi sınırın ötesine geçemeyeceğini de açıklayabilir.

Bu konuyla GY-07 — Sözel Mantık ve Muhakeme ana modülünün altı konusu tamamlanmaktadır. Bir sonraki GY-08 — Tamamlayıcı Matematik ve Geometri bölümünde ise kümeler, cebirsel çarpanlar, temel olasılık ve sayma, şekiller, ölçüler ve koordinatla ilgili matematiksel ilişkiler ele alınacaktır. Burada kazanılan kanıt, kapsam ve mantıksal sonuç denetimi, sonraki matematiksel konuların yorumlanmasında da geçerlidir.

BÖLÜM 08

TAMAMLAYICI MATEMATİK VE GEOMETRİ

KONU 8.1

KÜMELER VE TEMEL KÜME İŞLEMLERİ

Küme düşüncesi, farklı nesnelerin hangi ortak özelliğe göre bir arada değerlendirildiğini açıkça belirtmeye dayanır. Bir dosyanın birden fazla inceleme türüne girmesi, iki kursa katılan kişilerin bulunması veya bir sayı aralığının başka bir aralıkla örtüşmesi, kümelerin kesişim ve birleşim işlemleriyle incelenebilir. Kümeler yalnızca sayı listeleri değildir; kişilerin, tarihlerin, belgelerin ya da matematiksel nesnelerin belirlenmiş toplulukları da küme olarak ele alınabilir. Bu konuda önemli olan, nesnelerin hangilerinin kümeye ait olduğunu ayırt etmek ve aynı elemanı birden çok kez saymamaktır.

1. Küme kavramı ve üyeliğin belirlenebilir olması

Küme, elemanları belirtilen veya belirli bir koşulu sağlayan nesneler topluluğudur. Küme oluşturabilmek için her nesnenin üyeliği hakkında kullanılabilir bir ölçüt gerekir. Örneğin bir kurumdaki kayıtların içinden “2026 yılında açılmış dosyalar” seçildiğinde hangi dosyaların bu gruba girdiği tarihlerinden anlaşılır. Buna karşılık “ilginç dosyalar” ifadesi, ilginçliğin ölçütü belirlenmedikçe aynı kesinliği sağlamaz. Kümenin elemanları kişinin beğenisine göre sürekli değişiyorsa önce ortak ölçüt açıklanmalıdır.

Kümelerin isimleri genellikle A, B, C gibi büyük harflerle; elemanları ise küçük harf, sayı veya uygun nesne adlarıyla gösterilir. Bir elemanın A kümesinde bulunması $x \in A$, bulunmaması $x \notin A$ biçiminde yazılır. Bu işaretler bir nesnenin üyeliğini ifade eder; bir kümenin başka bir kümeyi kapsayıp kapsamadığını belirtmek için farklı işaretler kullanılır.

Küme dilinde üyelik ve gösterim

Gösterim	Okunuş	Anlamı
$x \in A$	x, A'nın elemanıdır	x nesnesi A'da bulunur.
$x \notin A$	x, A'nın elemanı değildir	x nesnesi A'da bulunmaz.
s(A)	A'nın eleman sayısı	Sonlu A'da farklı elemanların sayısıdır.
A = B	A ile B eşittir	İki kümenin elemanları aynıdır.
$A \subseteq B$	A, B'nin alt kümesidir	A'daki her eleman B'de de bulunur.

2. Liste yöntemi ve kümede tekrarın etkisizliği

Liste yönteminde elemanlar süslü ayraç içine yazılır. A = {2, 4, 6, 8} kümesi dört farklı eleman içerir; s(A) = 4'tür. Elemanların yazılma sırası üyeliği değiştirmez: {2, 4, 6, 8} ile {8, 6, 4, 2} aynı kümedir. Ayrıca bir elemanın defalarca yazılması ona birden çok üyelik kazandırmaz. {2, 2, 4, 6, 6} gösterimi, {2, 4, 6} kümesinin kendisidir ve eleman sayısı üçtür. Liste yöntemi, sonlu ve sınırlı sayıda eleman içeren topluluklarda doğrudan denetlenebilir.

Elemanların türüne dikkat edilmelidir. A = {2, {3}, ∅} kümesinde üç eleman vardır: 2 sayısı, {3} kümesi ve boş küme. Burada {3} bir bütün olarak A'nın elemanıdır; 3 sayısı tek başına A'nın elemanı değildir. Benzer şekilde

∅, A'nın elemanı olarak ayrıca yazılmıştır. Süslü ayraçların bir elemanın yapısını değiştirmesi, üyelik ile alt küme ilişkisini ayırmayı gerektirir.

Aynı listede eleman ve alt küme ayrımı

A = {2, {3}, ∅} için ifade	Doğruluk	Açıklama
$2 \in A$	Doğru	2 doğrudan listelenmiştir.
$\{3\} \in A$	Doğru	{3} kümesi tek bir eleman olarak listelenmiştir.
$3 \in A$	Yanlış	3 sayısı ayrı bir eleman olarak listelenmemiştir.
$\{2\} \subseteq A$	Doğru	{2} kümesinin tek elemanı A'dadır.
$\{3\} \subseteq A$	Yanlış	Bunun için $3 \in A$ olması gerekirdi.
$\emptyset \in A$ ve $\emptyset \subseteq A$	İkisi de doğru	Bu örnekte boş küme hem ayrıca eleman hem her kümenin alt kümesidir.

3. Ortak özellik yöntemi ve tanım kümesinin açıklanması

Eleman sayısı çok fazla olduğunda veya küme sonsuz olduğunda üyeliği bir kuralla belirtmek daha uygundur. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7 \text{ ve } x \text{ tek sayı}\}$ gösterimi, doğal sayılar arasından 7'den küçük tek sayıları seçer; $B = \{1, 3, 5\}$ olur. Bu kitapta doğal sayılar kümesi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ olarak kullanılmaktadır. "$x \in \mathbb{N}$" bölümü unutulursa seçilecek sayıların hangi alandan geldiği belirsizleşebilir. Örneğin $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \le x \le 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ iken aynı eşitsizlik gerçek sayılar içinde ele alındığında aralıktaki bütün gerçek sayılar kümeye girer; bu sonlu bir liste değildir.

Liste ve ortak özellik yöntemleri aynı kümenin iki farklı anlatımı olabilir. Küme üyeliğini belirleyen kural verildiğinde "ve" ile birden çok koşulun birlikte, "veya" ile belirtilen koşullardan en az birinin arandığı değerlendirilir. Daha önce işlenen koşullu çıkarım konusundaki dil farkı burada doğrudan hangi elemanların seçileceğini belirler.

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7 \text{ ve } x \text{ tek}\} = \{1, 3, 5\}$$

Anlamı: Belirtilen sayı evreninde iki koşulu da sağlayan elemanlar listelenir.

Koşullar: Doğal sayılara 0 dâhildir; tek sayılar tanımı tam sayılardaki $2k + 1$ biçimine dayanır.

4. Evrensel küme ve bağlama göre değişen sınırlar

Evrensel küme U veya E ile gösterilir ve yapılan işlemde ele alınan bütün olası elemanların kümesidir. Evrensel küme her durumda "var olan bütün şeyler" anlamına gelmez. Bir örnekte $U = \{1, 2, ..., 10\}$ seçilebilir; başka bir örnekte U, belirli bir kurumda görev yapan kişiler olabilir. A ve B üzerinde işlem yapılıyorsa genellikle $A \subseteq U$ ve $B \subseteq U$ varsayılır. Evrensel kümenin açıkça belirlenmesi özellikle tümleme işlemi için gereklidir.

Örneğin $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ve $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ olsun. "A'da olmayanlar" denildiğinde yalnız U içinde kalan 1, 3, 5, 7 ve 9 sayıları anlaşılır. U dışında kalan 11 veya negatif tam sayılar bu hesabın konusu değildir. Evrensel küme belirtilmeden bir kümenin tümleyenini bütün matematiksel nesneler arasında aramak anlamlı bir işlem sonucu vermez.

5. Boş, tek elemanlı, sonlu ve sonsuz kümeler

Hiç elemanı bulunmayan kümeye boş küme denir; ∅ veya {} biçiminde gösterilir ve s(∅) = 0'dır. {0} ise elemanı 0 sayısı olan tek elemanlı kümedir; boş küme değildir. {∅} de tek elemanlıdır; tek elemanı boş kümedir. Bu gösterimler farklıdır: boş bir kutu ile içinde boş bir kutu bulunan topluluk, eleman sayısı bakımından aynı değildir.

Sonlu kümeler, elemanları sayılarak bir doğal sayıda bitirilebilen kümelerdir. A = {3, 6, 9, 12} sonludur. Pozitif çift tam sayılar kümesi {2, 4, 6, ...} sonsuzdur; en büyük elemanına ulaşılamaz. Sonsuz kümelerde s(A) için sıradan bir sonlu doğal sayı yazılmaz. Bu nedenle sonlu kümeler için geçerli eleman sayısı bağıntıları, sonsuz kümelere aynı aritmetik anlamla düşünmeden aktarılmamalıdır.

Benzer görünen küme gösterimlerinin farkı

Gösterim	Eleman sayısı	Temel özellik
∅	0	Eleman bulunmaz.
{0}	1	0 sayısı bir elemandır.
{∅}	1	Boş kümenin kendisi bir elemandır.
{1, 1, 2}	2	Yinelenen 1 ikinci kez sayılmaz.
{2, 4, 6, ...}	Sonsuz	Pozitif çift sayılarla devam eder.

6. Eşit kümeler ve yalnız eleman sayısı eşit olan kümeler

İki kümenin eşit olabilmesi için her elemanın öteki kümede de bulunması gerekir. C = {a, b, c} ve D = {c, b, a} eşittir; sıralamanın değişmesi kümeyi değiştirmez. Buna karşılık C = {a, b, c} ve F = {1, 2, 3} eşit değildir. Her ikisinin eleman sayısı üç olduğu için sonlu kümeler bakımından “denk küme” olarak nitelendirilebilirler. Denkliğin yalnız eleman sayısı üzerinden yorumlandığı bu bağlamda s(C) = s(F) eşitliği, C = F sonucunu vermez.

Her eşit sonlu küme birbirine denktir; ancak her denk küme eşit değildir. Sayısal tablolar üzerinde çalışırken eşit büyüklükteki iki farklı katılımcı grubunun aynı kişilerden oluştuğu sonucuna ulaşmak bu nedenle hatalıdır.

7. Alt küme ve öz alt küme ilişkisi

A kümesinin her elemanı B kümesinde bulunuyorsa A ⊆ B denir. Bu ifade “A, B'nin alt kümesidir” biçiminde okunur. Örneğin A = {2, 5} ve B = {1, 2, 5, 8} ise A ⊆ B'dir. Alt küme ilişkisi eşitliği de kapsar: A ⊆ A her küme için doğrudur. A ⊆ B ve B ⊆ A birlikte sağlanıyorsa A = B olur. A ⊆ B olduğu hâlde A ≠ B ise A, B'nin öz alt kümesidir; bu kitapta A ⊊ B yazılacaktır. Bazı kaynaklarda ⊂ işareti farklı kapsama gelenekleriyle kullanılabildiğinden, öz alt kümeyi belirtmek için ⊊ tercih edilmiştir.

Boş küme her kümenin alt kümesidir; çünkü boş kümede B'nin dışında kaldığı gösterilebilecek bir eleman bulunmaz. Bu, boş kümenin her kümenin “elemanı” olduğu anlamına gelmez. Örneğin ∅ ⊆ {4, 7} doğru; ∅ ∈ {4, 7} yanlıştır. Boş kümenin kendi öz alt kümesi yoktur. Alt küme ilişkisi, üyelik ilişkisinden farklı olarak iki küme arasında kurulur.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \text{her } x \text{ için } (x \in A \Rightarrow x \in B);\ A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ ve } A \neq B)$$

Anlamı: Alt küme, A elemanlarının tamamının B tarafından kapsanmasıdır; öz alt kümede eşitlik dışlanır.

Koşullar: A ve B küme olmalıdır. Boş küme de alt küme olabilir.

8. Sonlu kümelerin alt küme sayısı

n farklı elemanı bulunan bir kümenin herhangi bir alt kümesi oluşturulurken her eleman için iki bağımsız karar vardır: alt kümeye alınır veya alınmaz. Bu kararların bütün birleşimleri 2^n farklı alt küme verir. Dört elemanlı G = {a, b, c, d} kümesinde toplam $2^4 = 16$ alt küme bulunur. Bunlardan biri boş küme, biri G'nin kendisidir. Bu nedenle öz alt küme sayısı 16 − 1 = 15, boş olmayan öz alt küme sayısı ise 16 − 2 = 14'tür.

Özel bir koşul altında seçenek sayısı azalabilir. G'nin alt kümeleri arasından a'yı içeren, b'yi içermeyenler seçildiğinde a'nın durumu “alınır”, b'nin durumu “alınmaz” diye sabitlenir. c ve d bağımsız kaldığından $2^2 = 4$ seçenek bulunur: {a}, {a, c}, {a, d} ve {a, c, d}. Bu dört alt kümeyi doğrudan listelemek, üslü sayıyla yapılan ilk hesabı bağımsız biçimde doğrular. Burada elemanların farklı olması ve aynı elemanın iki kez sayılmaması zorunludur.

$$s(A) = n \text{ ise alt küme sayısı } = 2^n; \text{ öz alt küme sayısı } = 2^n - 1$$

Anlamı: Her eleman, alt kümeye alınma veya alınmama olmak üzere iki seçeneğe sahiptir.

Koşullar: A sonlu ve n ≥ 0 olmalıdır. Boş olmayan öz alt küme sayısı n ≥ 1 için $2^n - 2$'dir; n = 0 için bu ifade kullanılmaz, sayı 0'dır.

Küçük sonlu kümelerde alt küme sayıları

Eleman sayısı n	Bütün alt kümeler	Öz alt kümeler	Boş olmayan öz alt kümeler
0	1	0	0
1	2	1	0
2	4	3	2
3	8	7	6
4	16	15	14

9. Alt küme zinciri ve kapsama yönü

A ⊆ B ve B ⊆ C ise A ⊆ C olur; çünkü A'nın her elemanı önce B'de, sonra C'de bulunur. Bu geçişlilik ilişkisi, sayı kümelerinde $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ gösteriminde de kullanılmıştır. Fakat A ⊆ B bilgisinden B ⊆ A çıkarılamaz. Ayrıca yalnız A ve B kümelerinin eleman sayılarının karşılaştırılması alt kümelik sonucunu kanıtlamaz. Örneğin A = {1, 2} ve B = {3, 4, 5} için s(A) < s(B) olmasına rağmen A ⊆ B değildir.

Sonlu kümelerde A ⊆ B ise s(A) ≤ s(B) olduğu kesindir; ters yön her zaman geçerli değildir. A ⊆ B ve s(A) = s(B) ise sonlu kümelerde A = B olur. Bu son sonuç, B'de A dışında bir eleman bulunması hâlinde B'nin eleman sayısının daha büyük olacağı düşüncesiyle denetlenebilir.

10. Kesişim: ortak elemanları seçme

A ve B'nin her ikisinde bulunan elemanların kümesi A ∩ B ile gösterilir. Örneğin A = {0, 1, 2, 3, 5, 8} ve B = {1, 3, 4, 8, 9} için A ∩ B = {1, 3, 8} olur. Bir elemanın kesişimde bulunması iki üyelik koşulunun birlikte gerçekleşmesini gerektirir; yalnız A'da veya yalnız B'de olması yeterli değildir. Kesişim her iki kümenin de alt kümesidir: A ∩ B ⊆ A ve A ∩ B ⊆ B.

Kesişimde elemanların birden fazla listelenmesi söz konusu değildir. Kesişim boş çıkıyorsa iki kümenin ortak elemanı yoktur. A ⊆ B olduğunda A'daki bütün elemanlar zaten B'de bulunduğu için A ∩ B = A'dır.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

Anlamı: İki kümede birden bulunan elemanları seçer.

Koşullar: Aynı nesnenin üyeliği iki küme için de tanımlanmış olmalıdır.

11. Birleşim: en az birinde bulunan elemanlar

Birleşim, iki kümeden en az birine ait olan bütün elemanların kümesidir ve A ∪ B ile gösterilir. Aynı A ve B için birleşim {0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9} olur. 1, 3 ve 8 iki kümede de bulunduğu hâlde birleşimde birer kez sayılmıştır. Kesişim için “ve”, birleşim için “en az birinde” anlamındaki kapsayıcı “veya” kullanılır. Bir kişinin iki faaliyet grubuna birden katılması, birleşim hesabında o kişiyi iki kişi hâline getirmez.

Birleşim, hem A'yı hem B'yi kapsar: A ⊆ A ∪ B ve B ⊆ A ∪ B. A ⊆ B ise birleşim doğrudan B'ye eşittir. İki kümenin toplam eleman sayılarını doğrudan toplamak, ortak elemanlar varsa aynı kişileri veya nesneleri birden fazla sayacağı için ayrıca düzeltilmelidir.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

Anlamı: Birinci kümede, ikinci kümede veya her ikisinde bulunan elemanların tamamını kapsar.

Koşullar: “Veya” kapsayıcı anlamdadır; aynı eleman yalnız bir kez listelenir.

İki somut kümede kesişim, birleşim ve yönlü fark

İşlem	Sonuç	Seçme gerekçesi
A ∩ B	{1, 3, 8}	İki kümede de bulunanlar
A ∪ B	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9}	En az birinde bulunanlar
A \ B	{0, 2, 5}	A'da olup B'de bulunmayanlar
B \ A	{4, 9}	B'de olup A'da bulunmayanlar

12. Fark: bir kümede bulunup diğerinde bulunmama

A \ B, A'da olup B'de bulunmayan elemanlardan oluşur. Yukarıdaki kümelerde A \ B = {0, 2, 5}, B \ A = {4, 9}'dur. Fark işlemi genel olarak değişme özelliğine sahip değildir: A \ B ile B \ A aynı sonucu vermeyebilir. “A'dakilerden B'ye de girenleri çıkarma” anlatımı, işlemin yönünü unutmamayı sağlar. Birleşim ve kesişimden farklı olarak fark hesabında ilk küme özellikle önemlidir.

Bir kişinin A grubunda bulunup B grubunda bulunmadığını bilmek, B grubundan başka bütün gruplarda bulunmadığını söylemez. Fark yalnız belirtilen iki kümeyle ilgilidir. Ayrıca A \ B = ∅ sonucu, mutlaka A'nın boş olduğu anlamına gelmez; A'nın bütün elemanları B'de bulunuyorsa da aynı sonuç ortaya çıkar. Nitekim A \ B = ∅ olması A ⊆ B ile eşdeğerdir.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\} = A \cap B'$$

Anlamı: A'da bulunan, B'de bulunmayan elemanları ayırır.

Koşullar: B′ gösterimi kullanılacaksa, A ve B'yi kapsayan evrensel küme U belli olmalıdır.

13. Tümleme: evrensel kümenin kalan bölümü

U evrensel kümesinde A'ya ait olmayan elemanların kümesine A'nın tümleyeni denir; A' veya A^c yazılabilir. U = {1, 2, ..., 10} ve A = {2, 4, 6, 8, 10} olduğunda A' = {1, 3, 5, 7, 9} elde edilir. A ile A' ortak eleman içermez ve ikisinin birleşimi U'yu oluşturur. Tümleyen iki kez alındığında yeniden A bulunur. Boş kümenin tümleyeni U, U'nun tümleyeni boş kümedir.

Evrensel küme değişirse aynı A kümesinin tümleyeni de değişebilir. U = {1, 2, ..., 10} için A' tek rakamlar iken U = {1, 2, ..., 12} seçilirse 11 de tümleyene girer. Bu yüzden "A'da olmayanlar" ifadesi ancak hangi evren içinde söylendiği belirtilerek çözülebilir.

$$A' = U \setminus A;\ A \cap A' = \varnothing;\ A \cup A' = U;\ (A')' = A$$

Anlamı: Tümleme, evrensel kümenin A dışında kalan bölümüdür.

Koşullar: $A \subseteq U$ olmalı ve işlem boyunca aynı U kullanılmalıdır.

14. Ayrık kümeler ve ortak eleman bulunmaması

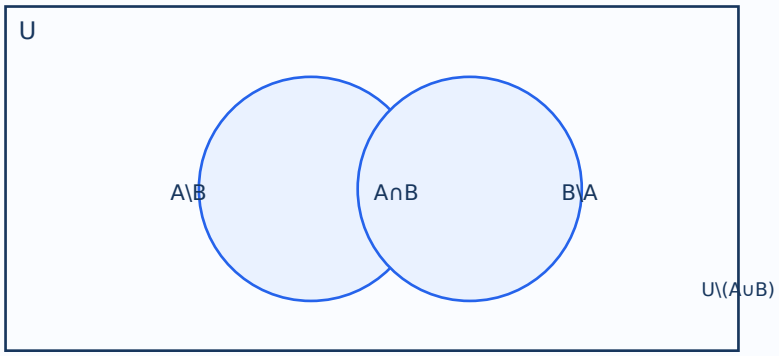
$A \cap B = \varnothing$ ise A ve B ayrık kümelerdir. Örneğin {2, 4, 6} ile {1, 3, 5} ayrık kümelerdir. Ayrıklık, kümelerin eleman sayılarının farklı olmasıyla veya adlarının farklı olmasıyla ilgili değildir; yalnız ortak eleman bulunmamasına bağlıdır. İki farklı kümenin bazı ortak elemanlara sahip olması mümkündür. Birden çok küme için "ikişer ikişer ayrık" ifadesi, seçilecek her farklı çiftin kesişiminin boş olduğu anlamına gelir.

Ayrık iki sonlu kümenin birleşiminde eleman sayısı toplamı doğrudan alınır. Ancak A ve B'nin ayrık olması, evrensel kümede üçüncü bir grubun olmadığı anlamına gelmez: U içinde iki gruptan hiçbirine girmeyen elemanlar bulunabilir. Dolayısıyla yalnız $A \cap B = \varnothing$ bilgisiyle $A \cup B = U$ sonucuna ulaşılamaz.

15. Venn şeması ve bölgelere ayırma yöntemi

Venn şeması, kümelerin ortak ve farklı bölümlerini görsel olarak düzenler. İki küme için dikdörtgen U'yu, dikdörtgenin içindeki iki daire A ve B'yi temsil eder. Dairelerin örtüşen bölgesi $A \cap B$, yalnız A dairesinde kalan bölüm $A \setminus B$, yalnız B dairesinde kalan bölüm $B \setminus A$'dır. Her iki dairenin dışında olup dikdörtgenin içinde kalan bölüm, $(A \cup B)'$ kümesidir. Görsel kullanılmasa da bu dört bölge birbirinden ayrıdır ve birlikte U'yu oluşturur.

İki kümenin kesişim ve birleşimi



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

Şema çizilmesi zorunlu değildir: dört bölgeyi ayrı sütun veya satırlarla tabloya taşımak aynı mantığı sağlar. Özellikle sayılarla yapılan problemlerde önce ortak bölgenin miktarını belirlemek, sonra yalnız bir gruba girenleri hesaplamak ve en son iki gruba da girmeyenleri bulmak hata riskini azaltır.

İki küme için dört ayrık üyelik durumu

Bölge	A üyeliği	B üyeliği	Küme gösterimi
Yalnız A	Var	Yok	A \ B
Ortak bölge	Var	Var	A ∩ B
Yalnız B	Yok	Var	B \ A
İkisinde de değil	Yok	Yok	(A ∪ B)′

16. İki sonlu kümenin birleşimindeki eleman sayısı

A ve B sonlu olduğunda s(A) + s(B) toplamında ortak elemanlar iki kez yer alır: bir kez A'nın, bir kez B'nin sayısına girer. Oysa birleşimde her eleman bir kez sayılmalıdır. Bu nedenle ortak eleman sayısı bir kez çıkarılır. Sonuç, s(A ∪ B) = s(A) + s(B) − s(A ∩ B) bağıntısıdır. Aynı sonucu dört ayrık bölgeden de elde ederiz: yalnız A = s(A) − s(A ∩ B), yalnız B = s(B) − s(A ∩ B), ortak = s(A ∩ B). Bu üç miktar toplandığında aynı ifade ortaya çıkar.

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

Anlamı: A ve B toplamında iki kez sayılan ortak elemanlar bir kez çıkarılır.

Koşullar: A ve B sonlu olmalı, aynı tür tekil elemanlar sayılmalı ve bir eleman her kümede bir kez bulunmalıdır.

17. İki grubun örtüştüğü sayısal bir durumu çözme

Tamamı 120 kişiden oluşan temsili bir hizmet içi eğitim grubunda A, veri düzenleme eğitimine katılan 72 kişiyi; B, arşiv düzenleme eğitimine katılan 61 kişiyi göstersin. Her iki eğitime katılan kişi sayısı 24 ise birinci eğitime katılıp ikinciye katılmayanların sayısı 72 − 24 = 48; yalnız ikinci eğitime katılanların sayısı 61 − 24 = 37'dir. En az bir eğitime katılanların sayısı 48 + 24 + 37 = 109'dur. Hiçbirine katılmayanların sayısı 120 − 109 = 11 bulunur.

Bağımsız ikinci hesap, birleşim bağıntısıyla yapılır: 72 + 61 − 24 = 109. Ayrık dört bölgenin toplamı da 48 + 24 + 37 + 11 = 120'dir. Böylece hem grup toplamları hem evrensel küme sayısı kontrol edilmiş olur. Bu sayılar gerçek kurumsal kayıt değil, yalnız yöntemi açıklayan temsili verilerdir.

Temsili 120 kişilik eğitim grubunun ayrık bölgeleri

Bölge	Kişi sayısı	Hesap
Yalnız veri düzenleme	48	72 − 24
Her iki eğitim	24	Verilen ortak katılım
Yalnız arşiv düzenleme	37	61 − 24
Hiçbir eğitim	11	120 − (48 + 24 + 37)
Toplam	120	48 + 24 + 37 + 11

18. Bilinmeyen ortak katılımı geri hesaplama

Bir evrende 90 kişi bulunsun; A grubunda 55, B grubunda 49 kişi olduğu ve iki gruba da girmeyen 8 kişi bulunduğu bilinsin. En az bir gruba girenlerin sayısı 90 − 8 = 82'dir. İki gruba katılanların sayısına x dersek 82 = 55 + 49 − x olur. Buradan x = 22 bulunur. Dolayısıyla yalnız A'da 55 − 22 = 33, yalnız B'de 49 − 22 = 27 kişi vardır.

Sonucu dört bölgeden kontrol edebiliriz: 33 + 22 + 27 + 8 = 90. Ayrıca A'nın iki bölgesinin toplamı 33 + 22 = 55, B'nin iki bölgesinin toplamı 27 + 22 = 49'dur. Ortak bölümün sıfırdan küçük veya gruplardan birinin eleman sayısından büyük çıkması, verilen sayılarda çelişki veya hesap hatası olabileceğine işaret eder.

$$s(A \cap B) = s(A) + s(B) - s(A \cup B);\ s(A \cup B) = s(U) - s((A \cup B)')$$

Anlamı: Ortak bölüm ve birleşim, bilinmeyen konumunda da aynı sayma ilişkilerinden hesaplanabilir.

Koşullar: Bütün sayılar aynı evrene, aynı zaman dilimine ve tekil kişilere/nesnelere ait olmalıdır.

Geri hesaplanan katılımlar için çok yönlü kontrol

Bölge	Kişi sayısı	Bağımsız denetim
Yalnız A	33	55 − 22
Hem A hem B	22	55 + 49 − 82
Yalnız B	27	49 − 22
İkisinde de değil	8	90 − 82
Dört bölgenin toplamı	90	33 + 22 + 27 + 8

19. Kesişim ve birleşimin temel işlem özellikleri

Kesişim ve birleşimde kümelerin yazılma sırası sonucu değiştirmez: $A \cap B = B \cap A$ ve $A \cup B = B \cup A$. Üç kümede aynı işlem art arda yapılıyorsa hangi ikisinin önce gruplandığı da sonucu değiştirmez. Bir kümenin kendisiyle kesişimi veya birleşimi yeniden kendisidir. Boş küme kesişimde sonuç olarak boş küme verir; birleşimde ise diğer kümeye ekleyecek yeni elemanı yoktur. Evrensel küme birleşimde bütün olası elemanları kapsar, kesişimde karşı kümenin elemanlarını olduğu gibi bırakır.

Kesişim ve birleşimin kısa işlem yasaları

Özellik	Kesişim	Birleşim
Değişme	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Tek kuvvet	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Boş küme	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
Evrensel küme	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Kapsama ($A \subseteq B$)	$A \cap B = A$	$A \cup B = B$
Tümleyen	$A \cap A' = \varnothing$	$A \cup A' = U$

Bu özellikler sayı işlemlerinde kullanılan sıradan aritmetik eşitliklerle karıştırılmamalıdır. Özellikle $A \cap A = A$ olmasına karşılık sayılarla çarpmanın genel olarak $a \cdot a = a$ sonucunu vermediği açıktır. İki farklı işlem türü, benzer bir sembolik gösterim taşısa da ayrı kurallarla ele alınır.

20. Dağılma ve yutma özellikleri

Üç kümenin bir arada bulunduğu işlemlerde kesişim ile birleşim birbirinin üzerine dağılabilir. $A \cap (B \cup C)$, A'nın elemanı olup B veya C'den en az birinde bulunanları seçer. Bu elemanlar ya $A \cap B$'de ya $A \cap C$'de bulunacağı için $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ile aynı kümeyi oluşturur. Benzer biçimde $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olur. Bu ikinci bağıntıda bir elemanın sağ tarafta bulunabilmesi için A'da olması ya da hem B hem C'de bulunması gerekir; ikisi aynı koşuldur.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Anlamı: Kesişim ve birleşim, üyelik koşullarının mantıksal dağılımını korur.

Koşullar: Aynı eleman evreninde A, B ve C kümeleri üzerinde işlem yapılır.

Yutma özelliklerinde $A \cup (A \cap B) = A$ ve $A \cap (A \cup B) = A$'dır. İlkinde A'nın içinde kalan bir bölüm A'ya yeniden eklendiği için yeni eleman gelmez; ikincisinde A, kendisini zaten kapsayan birleşimle kesiştirildiğinde değişmez. Bu ilişkiler işlem sırasını kolaylaştırır; ancak bir eşitlikte parantezi kaldırmadan önce hangi işlemin içeride olduğu belirlenmelidir.

21. De Morgan kuralları ve tümlemeyi içeri dağıtma

Birleşimin tümleyeni, hiçbir kümeye ait olmayanları seçer. Bu eleman hem A'nın hem B'nin dışında olmak zorundadır. Dolayısıyla $(A \cup B)' = A' \cap B'$ olur. Kesişimin tümleyeni ise iki kümede birden bulunmayanları seçer: elemanın A'da bulunmaması veya B'de bulunmaması yeterlidir. Bu nedenle $(A \cap B)' = A' \cup B'$ elde edilir. Tümleme işareti parantezin içine aktarıldığında birleşimin kesişime, kesişimin birleşime dönüşmesi De Morgan kurallarının temel özelliğidir.

$$(A \cup B)^{\prime} = A^{\prime} \cap B^{\prime};\ (A \cap B)^{\prime} = A^{\prime} \cup B^{\prime}$$

Anlamı: “Hiçbirinde değil” her ikisinin dışında olmayı; “ikisinde birden değil” en az birinin dışında olmayı ifade eder.

Koşullar: Bütün tümleyenler aynı U evrensel kümesine göre tanımlanır.

$U = \{1, 2, ..., 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ seçilsin. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ olduğundan $(A \cup B)' = \{1, 9\}$ elde edilir. Öte yandan $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ olduğundan $A' \cap B'$ de $\{1, 9\}$'dur. İkinci kuralda $A \cap B = \{2\}$; dolayısıyla $(A \cap B)' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ olur. $A' \cup B'$ aynı dokuz elemanı verir. Kurallar böylece iki ayrı işlem yoluyla kontrol edilir.

Tümleyenin birleşim ve kesişimle ilişkisi

Eleman durumu	$(A \cup B)'$ içinde mi?	$(A \cap B)'$ içinde mi?
Yalnız A'da	Hayır	Evet
Hem A hem B'de	Hayır	Hayır
Yalnız B'de	Hayır	Evet
İkisinde de değil	Evet	Evet

22. Fark işlemlerini tümleme ve kesişim üzerinden dönüştürme

A \ B işlemi, A'nın B dışında kalan bölümünü seçtiğinden A ∩ B′ ile aynıdır. Böylece fark içeren ifadeler kesişim ve tümleme kullanılarak karşılaştırılabilir. Örneğin (A \ B) ∪ (B \ A), iki kümeden yalnız birinde bulunan elemanların tümünü içerir; ortak bölüm bu ifadeye girmez. Bu topluluk, (A ∪ B) \ (A ∩ B) olarak da yazılabilir. İki anlatımda da aynı iki ayrık bölge seçilmiştir.

A \ (B ∪ C) ifadesinde A'nın elemanı olup B'nin de C'nin de dışında kalma koşulu vardır. Dolayısıyla (A \ B) ∩ (A \ C) ile aynıdır. Buna karşılık A \ (B ∩ C), A'da bulunup en az birinden uzak kalan elemanları seçer; (A \ B) ∪ (A \ C) olur. Bu eşitlikler, De Morgan kurallarının fark işlemi üzerindeki uygulamalarıdır.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);\ A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Anlamı: Başka kümelerin birleşiminden çıkarma iki koşulu, kesişiminden çıkarma en az bir dışlanma koşulunu gerektirir.

Koşullar: Kümeler aynı eleman evreni içinde değerlendirilmeli; farkın yönü korunmalıdır.

23. Üç kümede ortak sayımı düzeltme

Üç sonlu kümede birleşim elemanlarını sayarken önce s(A) + s(B) + s(C) toplanır. İki kümenin kesişiminde bulunan elemanlar başlangıçta iki kez sayıldığı için her üç ikili kesişimin eleman sayısı çıkarılır. Ancak A ∩ B ∩ C'de bulunan bir eleman ilk toplamda üç kez, ikili kesişimlerin çıkarılmasında da üç kez yer aldığından geçici sonuçta hiç sayılmamış olur. Onu bir kez geri eklemek gerekir. Böylece üç kümeli kapsama–dışlama bağıntısı ortaya çıkar.

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

Anlamı: Üç kümenin birleşiminde birden çok sayılan elemanlar düzeltilir; üçlü ortak bölüm bir kez geri eklenir.

Koşullar: A, B ve C sonlu olmalı; ikili kesişimler üçlü ortak elemanları da içerir.

24. Üç gruplu temsili bir sınıflandırmanın ayrıntılı çözümü

Toplam 60 kişilik temsili bir eğitim topluluğunda A, B ve C adlı üç etkinliğe katılanların sayıları sırasıyla 28, 26 ve 24 olsun. İkili kesişimlerin sayıları s(A ∩ B) = 10, s(A ∩ C) = 9 ve s(B ∩ C) = 8; üçünün ortak bölümünün sayısı s(A ∩ B ∩ C) = 4 olsun. Buradaki ikili kesişimlerin her biri üç etkinliğe de katılan dört kişiyi içerir. Bu yüzden yalnız A ve B'ye katılanlar 10 − 4 = 6, yalnız A ve C'ye katılanlar 9 − 4 = 5, yalnız B ve C'ye katılanlar 8 − 4 = 4 kişidir.

Yalnız A'da bulunanlar 28 − 6 − 5 − 4 = 13, yalnız B'dekiler 26 − 6 − 4 − 4 = 12 ve yalnız C'dekiler 24 − 5 − 4 − 4 = 11 kişidir. Üç kümeli birleşim bağıntısından en az bir etkinliğe katılanlar 28 + 26 + 24 − 10 − 9 − 8 + 4 = 55 olarak hesaplanır; hiçbirine katılmayanlar 60 − 55 = 5 kişidir. Böylece tam bir etkinliğe katılanların sayısı 13 + 12 + 11 = 36, tam iki etkinliğe katılanların sayısı 6 + 5 + 4 = 15 ve üç etkinliğe katılanların sayısı 4 olur.

Bağımsız toplama kontrolü 36 + 15 + 4 + 5 = 60 sonucunu verir. Ayrıca A'nın parçaları 13 + 6 + 5 + 4 = 28; B'nin parçaları 12 + 6 + 4 + 4 = 26; C'nin parçaları 11 + 5 + 4 + 4 = 24'tür. Bu sonuçlar aynı başlangıç verilerini iki farklı yoldan doğrular. Bunlar resmî istatistik değil, yalnız öğretici amaçla kurulmuş temsili sayılardır.

Temsili 60 kişilik toplulukta üç kümeye ait ayrık bölgeler

Ayrık bölge	Kişi sayısı	Kontrol bilgisi
Yalnız A	13	28 − 6 − 5 − 4
Yalnız B	12	26 − 6 − 4 − 4
Yalnız C	11	24 − 5 − 4 − 4
Yalnız A ve B	6	10 − 4
Yalnız A ve C	5	9 − 4
Yalnız B ve C	4	8 − 4
A, B ve C'nin üçünde	4	Verilen üçlü kesişim
Hiçbirinde	5	60 − 55
Bütün topluluk	60	13 + 12 + 11 + 6 + 5 + 4 + 4 + 5

25. Sayı aralıkları ile küme işlemleri

Küme işlemleri yalnız ayrık nesne listeleri üzerinde değil, sayı doğrusu üzerindeki aralıklarda da kullanılır. Bu durumda başlangıç ve bitiş noktalarının kümeye dâhil olup olmadığı özellikle önemlidir. Köşeli ayraç [ ] uç noktanın dâhil olduğunu, yuvarlak ayraç ( ) dışlandığını gösterir. Evrensel küme $\mathbb{R}$ kabul edilerek $A = [-2, 5)$ ve $B = (1, 8]$ alınsın. A kümesi −2'yi içerir ama 5'i içermez; B kümesi 1'i içermez ama 8'i içerir.

Her iki aralığın ortak noktaları 1'den büyük ve 5'ten küçük gerçek sayılardır: $A \cap B = (1, 5)$. Birleşim, −2'den 8'e uzanan ve iki ucu da içeren aralıktır: $A \cup B = [-2, 8]$. Fark için $A \setminus B = [-2, 1]$ bulunur; 1, B'ye ait değil ama A'ya ait olduğundan dâhildir. Buna karşılık $B \setminus A = [5, 8]$ olur; 5, A'da bulunmadığı için B'nin fark kümesine girer. A'nın $\mathbb{R}$'ye göre tümleyeni $(-\infty, -2) \cup [5, \infty)$ biçimindedir. Sonsuzluk bir uç nokta sayılamayacağından ∞ ve $-\infty$ ile her zaman yuvarlak ayraç kullanılır.

A = [−2, 5) ve B = (1, 8] aralıklarında işlemler

İşlem	Sonuç	Uç noktalar yönünden gerekçe
$A \cap B$	$(1, 5)$	1, B'ye; 5, A'ya dâhil olmadığından ikisi de dışarıda.
$A \cup B$	$[-2, 8]$	−2, A'ya; 8, B'ye dâhildir.
$A \setminus B$	$[-2, 1]$	1, B'de bulunmaz; A'da bulunur.
$B \setminus A$	$[5, 8]$	5, A'nın dışında; B'nin içindedir.
A' $(U = \mathbb{R})$	$(-\infty, -2) \cup [5, \infty)$	−2, A'dadır; 5, A'nın dışındadır.

26. Sonuçları üyelik tablosu ve karşı örnekle denetleme

Bir küme eşitliğini doğrulamak için her elemanın eşitliğin iki tarafında da aynı üyelik durumunu taşıdığını göstermek gerekir. İki küme söz konusu olduğunda dört durum yeterlidir: eleman yalnız A'da, yalnız B'de, her ikisinde veya hiçbirinde olabilir. Örneğin $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$ bağıntısı, A'da bulunmayan fakat B'de bulunan elemanların iki tarafta da seçilmesiyle anlaşılır. A'ya giren bir eleman, birleşimde bulunsa bile sol taraftaki farkla dışarı çıkar; sağ tarafta da zaten A'da bulunduğu için dışarıda kalır.

Buna karşılık A \ B = B \ A eşitliği genel olarak doğru değildir. A = {1, 2}, B = {2, 3} alındığında A \ B = {1}, B \ A = {3} olur. Tek bir geçerli karşı örnek, bu iddianın bütün kümeler için geçerli olmadığını göstermeye yeter. Küme sonuçlarını denetlerken tek bir örneğin doğruluğunu genel kural sanmamak, bütün örneklerde doğru olduğu ileri sürülen kurallar için ise üyelik gerekçesi kurmak gerekir.

Önemli ayrım Küme işlemlerinde aynı elemanın birden çok yerde görünmesi, onu birden çok kişi veya nesneye dönüştürmez. Özellikle "her iki gruba katılan" ifadesi kesişimi, "en az birine katılan" ifadesi birleşimi, "yalnız A'da" ifadesi A \ B'yi, "hiçbirine katılmayan" ifadesi ise (A ∪ B)′ kümesini belirtir. Tümleme için evrensel küme; eleman sayısı hesapları için aynı zaman ve tekil kişi/nesne sınırı açık olmalıdır.

27. Küme dilinin diğer matematik konularıyla bağlantısı

Küme gösterimi, eşitsizliklerle belirtilen aralıkların karşılaştırılmasında, sayısal verinin ortak ve ayrık gruplara ayrılmasında ve bir koşulun hangi durumlarda geçerli olduğunun anlaşılmasında kullanılır. Birleşim ve kesişim, önceki sözel muhakeme bölümündeki kapsayıcı "veya" ve "ve" ilişkilerine matematiksel karşılık verir; ancak sözel cümleleri kümeye dönüştürürken kişi, zaman ve evren sınırlarının korunması gerekir. Bir koşulun uygulandığı kümenin başka bir kümeyi kapsaması, koşulların tersinden sonuç çıkarılabileceği anlamına gelmez.

Sonraki GY-08 konularında çarpanlara ayırma, basit sayma ve olasılık ile geometri yer alacaktır. Özellikle olasılıkta örnek uzayın hangi sonuçları içerdiğini tanımlamak, uygun olay kümelerini ve bunların kesişimlerini ayırt etmek bakımından küme düşüncesi doğrudan kullanılacaktır. Bu bölüm, söz konusu işlemlerin kapsamını önceden belirleyen temel matematik dilini kurmaktadır.

KONU 8.2

ÇARPANLARA AYIRMA

Çarpanlara ayırma, toplama ve çıkarma biçiminde yazılmış bir cebirsel ifadeyi ona eşit bir çarpım biçiminde göstermektir. Bu işlem, daha önce tanıtılan dağılma özelliğinin ters yönde kullanılmasına dayanır. 6x + 18 ifadesinin 6(x + 3) olarak yazılabilmesi buna örnektir. İki yazım, x değişkeninin her gerçek değerinde aynı sonucu üretir; farklı olan, ifadenin yapısının görünür hâle gelmesidir. Toplam biçiminde terimler, çarpım biçiminde ortak etkenler öne çıkar. Çarpım biçimi bir ifadenin hangi değerlerde sıfır olduğunu görmeyi, cebirsel kesirleri koşullarını koruyarak sadeleştirmeyi ve bazı işlemleri daha kısa yoldan yapmayı sağlar.

Bu bölüm GY-02.07'de açılımı verilen özdeşlikleri yeniden baştan öğretmek yerine onları çarpanlara ayırma amacıyla ters yönde kullanır. Ayrıca ortak çarpan, gruplandırma, iki terimli ve üç terimli ifadeler, birden fazla yöntemin birleşmesi, tanım kümesinin korunması ve doğrulama yöntemleri üzerinde durur. Çarpanların bulunması için her zaman tek bir uygun yol yoktur; sağlam sonuç, elde edilen çarpımın yeniden açılarak başlangıç ifadesiyle karşılaştırılmasıdır.

1. Çarpan kavramı ve eşdeğer gösterimler

Bir polinom, değişkenin sıfır veya pozitif tam sayı kuvvetleriyle kurulan terimlerin toplamıdır. Örneğin $3x^2 - 12x$ bir polinomdur; x^2 ve x terimlerinin katsayıları 3 ve −12'dir. 3x(x − 4) çarpımı açıldığında $3x^2 - 12x$ elde edildiğinden 3x ve x − 4 bu polinomun çarpanlarıdır. Burada çarpan denildiğinde yalnız bir sayı değil, cebirsel bir ifade de anlaşılır. Değişkenin belli bir değeri için çarpanlardan birinin sıfır olması bütün çarpımı sıfır yapar.

Çarpanlara ayırma, terimlerin değerini değiştiren bir işlem değildir. 2(x + 5) ile 2x + 10 eşit ifadeler olduğu gibi −(x − 7) ile 7 − x de eşittir. Aynı polinomun −1 gibi sabitler yeniden dağıtılarak farklı görünümde çarpan yazımları olabilir. Bu nedenle "çarpanlarına ayrılmış biçim" ifadesi, kullanılan sayı kümesine ve hedeflenen

ayrıntı düzeyine göre değerlendirilmelidir. Örneğin $x^2 - 2$, tam sayı katsayılı birinci dereceden iki çarpana ayrılamaz; gerçek katsayılarla $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ olarak yazılabilir.

> $P(x) = F(x) \cdot G(x)$ ve $F(x) \cdot G(x)$ açıldığında $P(x)$ elde edilir.
>
> **Anlamı:** F(x) ve G(x), P(x) ifadesinin çarpanlarıdır.
>
> **Koşullar:** Eşitlik, seçilen tanım kümesindeki bütün izin verilen x değerlerinde geçerli olmalıdır; çarpanların sıfırdan farklı olması şart değildir.

2. Yöntem seçmeden önce yapılacak yapısal inceleme

İfadeye önce en dıştaki işlemin toplama mı, çıkarma mı, yoksa çarpma mı olduğuna bakılarak yaklaşılır. Her terimde ortak bir sayı veya değişken kuvveti varsa ortak çarpan araştırılır. Ortak çarpan yoksa dört terimin ikişerli gruplara ayrılması, iki terimin kare farkı biçiminde olması ya da üç terimin bir ikinci dereceden ifade oluşturması denetlenebilir. İkinci dereceden bir ifadede ilk ve son terimler kare olabilir fakat orta terim uygun değilse tam kare özdeşliği kullanılamaz.

Bir ifadenin çarpanlara ayrılması, bütün çarpanların artık başka biçimde ayrılamadığı anlamına gelmeyebilir. Örneğin $2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9)$ ilk adımında ortak çarpan çıkarılmıştır; $x^2 - 9$ ise iki kare farkı olduğundan işlem $2x(x - 3)(x + 3)$ biçimine kadar sürdürülebilir. Son adımın doğruluğu $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$ ve bunun $2x$ ile çarpılması yoluyla görülür.

İfadenin görünümüne göre ilk kontrol

Görünüm	İncelenecek özellik	Olası yöntem
$8x^2 + 12x$	Her iki terimde 4x ortak mı?	Ortak çarpan
$xy + 2x + 3y + 6$	İkişerli gruplardan aynı parantez çıkar mı?	Gruplandırma
$16a^2 - 25b^2$	İki terim iki karenin farkı mı?	İki kare farkı
$x^2 + 10x + 25$	Orta terim iki karekökün iki kat çarpımı mı?	Tam kare
$x^2 + 7x + 10$	Çarpımları 10, toplamları 7 olan iki sayı var mı?	İkinci dereceden üç terimli
$3x^3 - 27x$	Önce ortak çarpan, ardından kare farkı var mı?	Birleşik yöntem

3. Sayısal ortak çarpanı dışarı alma

$6x + 18$ ifadesinin her terimi 6'nın katıdır; $6x + 18 = 6(x + 3)$ olur. Burada 6 ortak çarpan, $x + 3$ ise kalan parantezdir. Kontrol için 6 sayısı parantezdeki her terimle çarpılır: $6 \cdot x + 6 \cdot 3 = 6x + 18$. Ortak çarpan, terimlerden birine değil tüm terimlere bölünerek belirlenir. $15a - 25b + 10$ örneğinde katsayıların ortak pozitif böleni 5'tir; sonuç $5(3a - 5b + 2)$ olur. Parantez açıldığında $15a - 25b + 10$ bulunur.

En büyük ortak sayısal çarpanı seçmek çoğu zaman sade bir son biçim verir. Ancak bu tercih matematiksel eşitliğin zorunlu şartı değildir: $12x + 18$ ifadesi $2(6x + 9)$ biçiminde de yazılır, $6(2x + 3)$ biçiminde de. İkisi de doğrudur; ikinci yazımda parantezin tam sayı katsayıları için sayısal ortak böleni kalmamıştır. Ortak çarpan alırken parantez içinde terim unutulmamalıdır. $6x + 6 = 6(x + 1)$ olur; $6x + 6 = 6x$ yazılamaz.

4. Değişken ve kuvveti ortak çarpan olarak belirleme

Ortak harf çarpanı aranırken tüm terimlerde bulunan değişken seçilir ve bu değişkenin en küçük pozitif üs kuvveti dışarı alınır. $10x^4y^2 - 15x^2y^3$ ifadesinde sayısal ortak çarpan 5, x için ortak kuvvet x^2, y için ortak kuvvet y^2'dir. Dolayısıyla $10x^4y^2 - 15x^2y^3 = 5x^2y^2(2x^2 - 3y)$ olur. Çarpım açıldığında ilk terim $10x^4y^2$, ikinci terim $-15x^2y^3$ olarak geri gelir. Özel bir x veya y değerine bölerek işlem yapmaya gerek yoktur; dolayısıyla x = 0 ya da y = 0 olasılıkları eşitliği bozmaz.

Bir terimde değişken bulunmuyorsa o değişken tüm ifadeden ortak çarpan olarak çıkarılamaz. Örneğin $8x^2 + 12x + 4$ için her terimde x yoktur; ortak sayısal çarpan 4'tür. $4(2x^2 + 3x + 1)$ elde edilir. Parantez içindeki ifade başka bir yöntemle $(2x + 1)(x + 1)$ biçiminde çarpanlarına ayrılabilir; böylece $4(2x + 1)(x + 1)$ son biçimine ulaşılır. Burada ilk adım ile sonraki adım birbirinin yerine değil, ardışık uygulanır.

$$a \cdot x^m + b \cdot x^n = x^k(a \cdot x^{m-k} + b \cdot x^{n-k}),\ k = \min(m,n).$$

Anlamı: Ortak değişken kuvveti, tüm terimlerdeki en küçük üslü çarpandır.

Koşullar: m, n ve k negatif olmayan tam sayıdır; burada $k \le m$ ve $k \le n$ alınır. Ortak kuvvet bulunması için ilgili değişken her terimde yer almalıdır.

Ortak çarpanı belirlerken yapılan dönüşümler

Başlangıç ifadesi	Ortak çarpan	Eşdeğer çarpım
$14x + 21$	7	$7(2x + 3)$
$18a^2 - 12a$	$6a$	$6a(3a - 2)$
$10x^4y^2 - 15x^2y^3$	$5x^2y^2$	$5x^2y^2(2x^2 - 3y)$
$-8p^2 - 12p$	$-4p$	$-4p(2p + 3)$
$8x^2 + 12x + 4$	4	$4(2x^2 + 3x + 1)$

5. Negatif ortak çarpanın işaret yönetimi

Bir polinomun başındaki terim negatifse, parantez içinde pozitif baş terim elde etmek için negatif ortak çarpan seçilebilir. $-8p^2 - 12p = -4p(2p + 3)$ eşitliğinde $-4p$ ile $2p$ çarpılırsa $-8p^2$, $-4p$ ile 3 çarpılırsa $-12p$ bulunur. Öte yandan $12 - 4x = -4(x - 3)$ yazımı da doğrudur. Negatif ortak çarpan dışarı çıkarıldığında parantez içindeki bütün terimlerin işareti değişir: $-(a - b + c) = -a + b - c$.

Bir parantezin içindeki terimlerden yalnız birinin işaretini değiştirmek yanlış bir dönüşümdür. $6 - 2x = -2(x - 3)$ doğruyken $-2(x + 3) = -2x - 6$ farklı ifadedir. Bunu denetlemek için x = 0 seçilebilir: başlangıç değeri 6, yanlış yazımın değeri −6 olur. Ancak yalnız birkaç değerle uyuşma, genel özdeşlik kanıtı sayılmaz; çarpımı açmak bütün x değerlerini kapsayan kesin kontroldür.

6. Ortak bir parantezi tek çarpan gibi görmek

Ortak çarpan her zaman tek bir rakam veya harften oluşmaz. $(x - 2)(x + 5) + 3(x - 2)$ ifadesindeki iki terimde $x - 2$ bütünü ortak çarpandır. Bu ifade $(x - 2)[(x + 5) + 3] = (x - 2)(x + 8)$ olur. Burada $x - 2$'ye bir blok gibi davranmak, gereksiz açılımı önler. Kontrol açılımında $x^2 + 6x - 16$ hem başlangıçtan hem de son çarpımdan elde edilir.

Benzer biçimde (a + b)(a − b) − (a + b)² ifadesinde a + b ortaktır. Dışarı alındığında (a + b)[(a − b) − (a + b)] = (a + b)(−2b) = −2b(a + b) bulunur. Parantezli çıkarma sırasında ikinci grubun içindeki bütün işaretler değişir. Bu yöntemde a + b ifadesine bölme yapılmadığından a + b = 0 olan değerler de eşitliğin kapsamındadır.

7. Gruplandırma ile iki aşamalı ortak çarpan

Dört terimli bir ifadede her terime ortak tek bir çarpan bulunmayabilir. Bu durumda uygun terimler birlikte düzenlenip ikili ortak çarpanlar alınabilir. 2xy + 6x + 5y + 15 ifadesi (2xy + 6x) + (5y + 15) olarak gruplandırılır. İlk gruptan 2x, ikinci gruptan 5 çıkarıldığında 2x(y + 3) + 5(y + 3) elde edilir; ortak (y + 3) parantezi sayesinde sonuç (2x + 5)(y + 3) olur. Açılım 2xy + 6x + 5y + 15'i aynen geri verir.

Gruplandırmada hedef, ilk gruplamaların sonunda aynı parantezin ortaya çıkmasıdır. Eğer bir düzenlemede bu oluşmuyorsa terimlerin farklı şekilde gruplanması düşünülebilir; her dört terimli ifade seçilen bir eşitlik türünde mutlaka ayrılabilir diye bir kural yoktur. Örneğin 3ab − 6a + 5b − 10 için 3a(b − 2) + 5(b − 2) = (3a + 5)(b − 2) bulunur. İşaretlerin doğru tutulması, gruplandırmanın başarısını belirler.

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d).$$

Anlamı: Uygun gruplarda aynı parantez bulunursa son kez ortak çarpan dışarı alınır.

Koşullar: İşlem, dağılma özelliğinin geçerli olduğu sayı kümesinde bir özdeşliktir; terimlerin işaretleri aynen korunmalıdır.

Gruplandırmada ortak paranteze ulaşma

İfade	İlk gruplama	Son çarpım
2xy + 6x + 5y + 15	2x(y+3) + 5(y+3)	(2x+5)(y+3)
3ab − 6a + 5b − 10	3a(b−2) + 5(b−2)	(3a+5)(b−2)
$x^3 + 2x^2 - 9x - 18$	$x^2(x+2) - 9(x+2)$	(x+2)(x−3)(x+3)
$2x^2 + 7x + 3$	$2x^2 + 6x + x + 3$	(2x+1)(x+3)

8. İki kare farkını ters yönde kullanma

İki terimin kareleri farkı, toplamları ve farklarının çarpımıdır. $49x^2 - 64 = (7x)^2 - 8^2$ olduğundan (7x − 8)(7x + 8) yazılır. Çarpımın açılımında +56x ve −56x birbirini götürür; geriye $49x^2 - 64$ kalır. Bu yöntemin işareti önemlidir: $a^2 + b^2$ ifadesi aynı yöntemle (a − b)(a + b) biçiminde yazılamaz; bu çarpım $a^2 - b^{2'}$dir.

İki kare farkı bazen doğrudan görülmez. Örneğin $9(x + 1)^2 - 4y^2$ ifadesinde kare tabanları 3(x + 1) ve 2y'dir. Dolayısıyla [3(x + 1) − 2y][3(x + 1) + 2y] olur. x + 1'in önce açılması zorunlu değildir. Sayısal denetimde x = 1, y = 2 için ilk ifade 9·4 − 4·4 = 20; çarpanlar 6 − 4 = 2 ve 6 + 4 = 10 olduğundan çarpım 20'dir. Genel eşitliği ise iki kare farkı özdeşliği güvenceye alır.

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Anlamı: İki kare farkı, iki ifadenin toplamı ile farkının çarpımıdır.

Koşullar: A ve B uygun gerçek değerler alan ifadeler olabilir; artı işaretli iki kare toplamı aynı özdeşlikle ayrılamaz.

9. Tam kare üç terimlisinin ayırt edilmesi

Bir ifadenin ilk ve son terimleri kare olduğunda yalnız bu bilgiyle tam kare kararı verilemez. Orta terimin, kare tabanlarının iki kat çarpımı olması da gerekir. Örneğin $4x^2 + 20x + 25$ için $4x^2 = (2x)^2$ ve $25 = 5^2$'dir. İki tabanın iki kat çarpımı $2 \cdot 2x \cdot 5 = 20x$ olduğu için ifade $(2x + 5)^2$'dir. Açılımla $4x^2 + 20x + 25$ elde edilir. İşaret orta terimde eksi olsaydı $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$ olurdu.

Buna karşılık $4x^2 + 12x + 25$ ifadesinde ilk ve son terimler yine kare olsa da beklenen orta terim $20x$'tir; $12x$ değildir. Bu nedenle $(2x + 5)^2$ yazılamaz. Özdeşlikleri ters kullanırken dıştaki iki karenin ve orta terimin birlikte değerlendirilmesi hatalı tam kare seçimini önler. Bir polinomun tam kare olmaması, başka bir yöntemle çarpanlarına ayrılabileceği ihtimalini tek başına ortadan kaldırmaz.

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2;\ A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2.$$

Anlamı: Orta terim, iki kare tabanının iki kat çarpımına eşitse üç terim bir tam kare oluşturur.

Koşullar: Bütün terimler aynı A ve B seçiminden türemelidir; yalnız uçların kare olması yeterli değildir.

Tam kare kontrolünde orta terimin rolü

İfade	Beklenen orta terim	Sonuç
$4x^2 + 20x + 25$	$+2 \cdot 2x \cdot 5 = +20x$	$(2x+5)^2$
$4x^2 - 20x + 25$	$-2 \cdot 2x \cdot 5 = -20x$	$(2x-5)^2$
$9y^2 + 12y + 4$	$+2 \cdot 3y \cdot 2 = +12y$	$(3y+2)^2$
$x^2 - 14x + 49$	$-2 \cdot x \cdot 7 = -14x$	$(x-7)^2$
$4x^2 + 12x + 25$	$+20x$ olmalıydı	Tam kare özdeşliği uygulanamaz

10. $x^2 + bx + c$ türündeki üç terimliler

Baş katsayısı 1 olan $x^2 + bx + c$ ifadesi $(x + m)(x + n)$ olarak yazılabiliyorsa $m + n = b$ ve $m \cdot n = c$ olmalıdır. Bu koşullar dağılma sonucundan gelir: $(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$. Örneğin $x^2 + 9x + 20$ için toplamları 9, çarpımları 20 olan 4 ve 5 seçilir; ifade $(x + 4)(x + 5)$ olur. Açılım orta terimi $4x + 5x = 9x$ olarak geri verir.

Negatif sabit terim, bulunacak iki sayının zıt işaretli olduğunu gösterir. $x^2 + x - 30$ ifadesinde toplamı 1, çarpımı -30 olan 6 ve -5 uygundur; $(x + 6)(x - 5)$ elde edilir. Başka örnekte $x^2 - 11x + 24$ için -3 ve -8'in toplamı -11, çarpımı $+24$'tür; sonuç $(x - 3)(x - 8)$ olur. Tam sayı çifti bulunamaması, gerçel sayılarda çarpanların mutlaka bulunmadığı anlamına gelmez; hangi katsayı kümesinde işlem yapıldığı belirtilmelidir.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \Leftrightarrow m + n = b \text{ ve } mn = c.$$

Anlamı: İkinci dereceden üç terimlinin orta katsayısı iki sabitin toplamı, son terimi çarpımıdır.

Koşullar: m ve n seçilen sayı kümesindedir; eşdeğerlik, iki parantezin açılmasına dayanır.

11. Baş katsayısı 1 olmayan ikinci dereceden ifadeler

$ax^2 + bx + c$ ifadesinde $a \neq 0$ iken, tam sayı katsayılı çarpanlar aranıyorsa ilk ve son terimlerin çarpım yapısı birlikte incelenir. $6x^2 + 11x + 3$ ifadesinde $a \cdot c = 18$'dir; toplamı 11, çarpımı 18 olan 9 ve 2 seçilir. Orta terim $9x + 2x$ olarak bölünür: $6x^2 + 9x + 2x + 3 = 3x(2x + 3) + 1(2x + 3) = (3x + 1)(2x + 3)$. Kontrol çarpımında $6x^2 + 9x + 2x + 3 = 6x^2 + 11x + 3$ elde edilir.

Negatif sabitli $4x^2 - 7x - 2$ örneğinde $a \cdot c = -8$'dir. Toplamları -7, çarpımları -8 olan -8 ve 1 ile orta terim bölünür: $4x^2 - 8x + x - 2 = 4x(x - 2) + (x - 2) = (4x + 1)(x - 2)$. İki örnek de birbirinden farklı katsayı işaretlerini kapsar. Bu yöntem, uygun sayıların bulunabildiği ifadeler için kullanışlıdır; her ikinci dereceden polinomun tam sayı katsayılı iki doğrusal çarpanı bulunmak zorunda değildir.

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + mx + nx + c;\ m + n = b,\ mn = ac.$$

Anlamı: Orta terim uygun iki parçaya bölünüp ortak parantez oluşturulabilir.

Koşullar: $a \neq 0$; m ve n seçilen katsayı kümesinde seçilir; bölme ve gruplanma işlemleri sonunda elde edilen çarpım mutlaka açılarak denetlenir.

İkinci dereceden ifadelerin iki çarpana dönüştürülmesi

İfade	Toplam/çarpım için seçilen sayılar	Çarpanlara ayrılmış biçim
$x^2 + 9x + 20$	$4 + 5 = 9$; $4 \cdot 5 = 20$	$(x+4)(x+5)$
$x^2 + x - 30$	$6 + (-5) = 1$; $6 \cdot (-5) = -30$	$(x+6)(x-5)$
$x^2 - 11x + 24$	$-3 + (-8) = -11$; $(-3)(-8) = 24$	$(x-3)(x-8)$
$6x^2 + 11x + 3$	$9 + 2 = 11$; $9 \cdot 2 = 18$	$(3x+1)(2x+3)$
$4x^2 - 7x - 2$	$-8 + 1 = -7$; $-8 \cdot 1 = -8$	$(4x+1)(x-2)$

12. Sayı kümesine göre çarpanlara ayrılabilirlik

Bir polinom için "çarpanlarına ayrılamaz" kararı hangi katsayıların kullanılabileceğine bağlıdır. $x^2 - 3$, tam sayı ya da rasyonel katsayılı iki birinci derece çarpanın çarpımı değildir; çünkü $\sqrt{3}$ rasyonel değildir. Gerçek katsayılarla ise $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ olarak ayrılır. Öte yandan $x^2 + 4$, gerçek sayılarda iki birinci derece çarpanın çarpımı biçiminde yazılamaz. Çünkü böyle bir çarpımın sıfır olduğu gerçek bir x değeri bulunmalıydı, ancak $x^2 + 4$ her gerçek x için en az 4'tür. Karmaşık sayılar ayrı bir kapsamdır ve bu kitapta gerekli değildir.

Çarpanlara ayırma işlemi kimi zaman katsayıların daha basit bir kümede kalması hedefiyle yapılır. Örneğin $x^2 - 9$ tam sayı katsayılı çarpanlara $(x - 3)(x + 3)$ olarak ayrılır. $x^2 + 3x + 1$'in tam sayı katsayılı doğrusal çarpanlarının bulunmaması, bunun gerçel sayı katsayılı doğrusal çarpanlara ayrılamayacağı anlamına gelmez. Temel yöntemlerin kullanımında "tam sayı çarpanları" ve "gerçek sayı çarpanları" ayrımının korunması, kesin olmayan yargılardan kaçınmayı sağlar.

13. Karekök ve ayırt ediciyle gerçel çarpan sınırı

İkinci dereceden $ax^2 + bx + c$ polinomunda $a \neq 0$ iken $b^2 - 4ac$ değerine ayırt edici (Δ) denir. Bu değer negatifse polinomun gerçek kökü yoktur; dolayısıyla gerçek katsayılı iki birinci derece çarpana ayrılamaz. Δ sıfırsa tek bir tekrar eden gerçek kökü vardır; çarpım bir tam kare biçimine dönebilir. Δ pozitifse iki farklı gerçek kök vardır ve polinom bu köklere karşılık gelen iki doğrusal çarpana ayrılır. Bu ayrım, yalnız tam sayı ikilileri denemenin neden bütün olasılıkları tüketmediğini gösterir.

Örneğin $x^2 + 2x - 2$ için $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12 > 0$'dır. Gerçek kökler $-1 - \sqrt{3}$ ve $-1 + \sqrt{3}$ olduğundan polinom $[x + 1 + \sqrt{3}][x + 1 - \sqrt{3}]$ olarak yazılır; eşlenik çarpanların açılımı $(x + 1)^2 - 3 = x^2 + 2x - 2$ olur. Buna karşılık $x^2 + 2x + 5$ için $\Delta = 4 - 20 = -16$'dır. Tam kareye tamamlama da $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 \geq 4$ sonucunu verir; gerçek kök olmadığını bağımsız biçimde doğrular. Bu anlatım, ikinci derece denklem çözme yöntemlerinin ayrıntılarına girmeden çarpanların varlık koşulunu belirlemek içindir.

$$\Delta = b^2 - 4ac;\ x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a);\ ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Anlamı: $\Delta \geq 0$ olduğunda gerçek kökler kullanılarak ikinci dereceden ifade gerçek doğrusal çarpanlara ayrılabilir.

Koşullar: $a,b,c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; gerçek kök ve gerçek doğrusal çarpan için $\Delta \geq 0$ zorunludur. $\Delta < 0$ ise bu gösterim gerçek köklerle kurulamaz.

Ayırt ediciyle gerçek doğrusal çarpanların ilişkisi

Δ durumu	Gerçek kök sayısı	Gerçek katsayılı doğrusal çarpan durumu
$\Delta > 0$	İki farklı kök	$a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta = 0$	Bir çift katlı kök	$a(x-x_0)^2$
$\Delta < 0$	Gerçek kök yok	Gerçek doğrusal çarpanlara ayrılamaz

14. Tam kareye tamamlama ile çarpan arama

Bazı ikinci dereceden ifadelerin çarpanları, orta terimin yarısı kullanılarak görülebilir. $x^2 + 8x + 7$ için $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ olduğundan başlangıç ifadesine 16 eklenip 16 çıkarılabilir: $x^2 + 8x + 7 = (x + 4)^2 - 9 = (x + 1)(x + 7)$. Son eşitliğin kontrolü $(x + 1)(x + 7) = x^2 + 8x + 7$ açılımıdır. Eklenen ve çıkarılan sayılar birbirini götürdüğü için polinomun değeri hiçbir aşamada değişmez.

Aynı yaklaşım $x^2 - 6x + 5$ için $(x - 3)^2 - 4 = (x - 5)(x - 1)$ verir. Bu iki örnekte farkın karesinin negatif olmaması doğru kurulmuş ifadeyle ilgilidir; eklenen 9 veya 4 sayısı, bir kareyi tamamlamak için gereken sabit ile başlangıç sabitinin farkından doğar. Tam kareye tamamlama yöntemi, uygun iki tamsayıyı gözle hemen bulmanın mümkün olmadığı durumlarda da sistematik bir yol sunar.

15. İki yöntemi ardışık uygulamak ve son biçimi denetlemek

Çarpanlara ayırmada her adımın yeni bir yapıyı görünür kılması beklenir. $12x^3 - 48x$ için önce $12x$ ortak çarpanı alınır: $12x(x^2 - 4)$. Parantez içindeki kare farkı $x^2 - 2^2$ olduğundan $12x(x - 2)(x + 2)$ bulunur. Başlangıca dönüş kontrolü $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$ ve $12x \cdot (x^2 - 4) = 12x^3 - 48x$ biçimindedir.

Daha çok aşamalı bir örnekte $3x^3 + 6x^2 - 27x - 54$ ifadesi önce 3 ortak çarpanı alınarak $3(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$ olur. Parantezin ilk iki teriminden x^2, son ikisinden -9 çıkarılır: $3[x^2(x + 2) - 9(x + 2)] = 3(x + 2)(x^2 - 9)$. Son olarak $3(x + 2)(x - 3)(x + 3)$ elde edilir. Baştan açılım yapılarak $3x^3 + 6x^2 - 27x - 54$ değeri geri bulunabilir. İşlem basamaklarının sıralaması farklı olsa da doğru eşdeğer dönüşümler aynı polinomu verir.

Birleşik yöntemlerde adımların rolü

Başlangıç	İlk işlem	Son çarpım
$12x^3 - 48x$	12x ortak çarpan	$12x(x-2)(x+2)$
$3x^3 + 6x^2 - 27x - 54$	3 ortak çarpan ve gruplandırma	$3(x+2)(x-3)(x+3)$
$8x^2 + 12x + 4$	4 ortak çarpan ve üç terimli ayrıştırma	$4(2x+1)(x+1)$
$x^4 - 16$	$(x^2)^2 - 4^2$ kare farkı	$(x-2)(x+2)(x^2+4)$

16. Daha yüksek kuvvetlerde iki kare farkının devamı

Bir kuvvetin çift üslü olması, uygun iki kare farkı yapıları için bir ipucudur. $x^4 - 16$ ifadesi $(x^2)^2 - 4^2$ olarak ele alınır ve $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$ elde edilir. İlk çarpan yeniden kare farkıdır: $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$. Burada $x^2 + 4$ ifadesi gerçek doğrusal çarpanlara ayrılamaz. Çarpanların sınırı bu yüzden dikkatle belirtilmelidir.

Benzer biçimde $25y^4 - 1 = (5y^2 - 1)(5y^2 + 1)$ olur. Gerçek katsayılı doğrusal çarpanlar istenirse ilk parça $(\sqrt{5}y - 1)(\sqrt{5}y + 1)$ biçiminde ayrıca yazılabilir; ikinci parça gerçek sayılarda hep pozitiftir. Ancak tam sayı veya rasyonel katsayılı polinom çarpanlarına ayırma hedefinde $(5y^2 - 1)(5y^2 + 1)$ aşaması uygundur. Burada kök işareti $\sqrt{(5y)}$ değil $(\sqrt{5})\cdot y$ anlamındadır; gösterimde parantezle belirtilmesi belirsizliği giderir.

17. Bir ifadenin yerine geçici değişken koymak

Bazı ifadeler yüzeyde yüksek dereceli görünse de belirli bir parça tek bir değişken gibi düşünülebilir. $x^4 - 10x^2 + 9$ için $t = x^2$ tanımlanırsa $t^2 - 10t + 9$ bulunur. Toplamı -10 ve çarpımı 9 olan $-1, -9$ sayılarıyla $(t - 1)(t - 9)$ elde edilir. t yerine x^2 yazılınca $(x^2 - 1)(x^2 - 9)$ olur; her iki kare farkı da ayrılarak $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$ bulunur. Böylece dördüncü derece görünümü, ikinci dereceden bir ara yapıya dönüştürülmüştür.

Geçici değişken kullanımı, başlangıçtaki izin verilen değerleri genişletiyormuş gibi yorumlanmamalıdır. $t = x^2$ gerçek x için $t \geq 0$'dır; ancak yalnız bir polinom özdeşliği kurulurken yapılan cebirsel dönüşüm, t'nin bu özelliğinden bağımsız olarak her gerçek x'te doğrudur. Eğer t için ayrıca denklem çözülüyorsa son aşamada $t = x^2 \geq 0$ koşuluna geri dönülür. Bu ayrım, eşit ifadeyi dönüştürmek ile çözüm kümesi belirlemek arasındaki farktır.

18. Çarpan biçiminden sıfırları görmek ve sıfır çarpım ilkesi

Gerçek sayılarda iki sayının çarpımı sıfırsa çarpanlardan en az biri sıfırdır. $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$ olduğundan bu polinomun sıfır olduğu değerler $x = 7$ ve $x = -2$'dir. Kontrol için başlangıç polinomuna 7 yazılırsa $49 - 35 - 14 = 0$; -2 yazılırsa $4 + 10 - 14 = 0$ bulunur. Çarpanlardan biri sıfır olduğunda bütün çarpımın sıfır olması, bu örneklerin neden çalıştığını açıklar.

Ancak çarpımın sıfır olmadığı bir eşitlikte aynı yöntem uygulanamaz. $(x - 7)(x + 2) = 12$ eşitliğinde "$x - 7 = 12$ ya da $x + 2 = 12$" denilemez. Ayrıca bir çarpan sıfır olabilirken o çarpana bölerek sadeleştirme yapılması, tam da incelenmesi gereken kökü kaybettirebilir. Eşitliğin türü ve başlangıç koşulları belirlendikten sonra sıfır çarpım kuralı uygulanmalıdır.

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ veya } B = 0.$$

Anlamı: Gerçek sayı çarpımının sıfır olmasının gerekli ve yeterli koşulu en az bir çarpanın sıfır olmasıdır.

Koşullar: A ve B gerçek değerler alır; eşitliğin sağ tarafındaki "veya" kapsayıcıdır, iki çarpan birden sıfır da olabilir.

19. Cebirsel kesirlerde ortak çarpanı sadeleştirmek

Çarpanlara ayırma, pay ve paydanın aynı sıfırdan farklı çarpanı içermesi durumunda cebirsel kesri eşdeğer biçimde sadeleştirmeyi sağlar. $(x^2 - 16)/(x^2 + x - 20)$ ifadesinde pay $(x - 4)(x + 4)$, payda $(x + 5)(x - 4)$ olur. Başlangıç paydası $x = 4$ ve $x = -5$ için sıfır olduğundan bu değerler tanım kümesinde değildir. Ortak $x - 4$ çarpanı yalnız $x \neq 4$ için sadeleşir: sonuç $(x + 4)/(x + 5)$ biçimindedir, fakat $x \neq 4$ ve $x \neq -5$ koşulları birlikte korunmalıdır.

Örneğin $x = 0$ için başlangıç kesri $(-16)/(-20) = 4/5$'tir; yeni kesir 4/5 verir. $x = 4$ için yeni yazım 8/9 sayısını üretse bile başlangıçtaki ifade 0/0 olduğundan tanımsızdır. Sadeleştirilmiş bir yazımın daha fazla sayıda x değerinde hesaplanabilmesi, başlangıç ifadesinin tanım kümesini geriye dönük olarak genişletmez. Ayrıca pay

ve paydada yalnız aynı terim değil aynı ÇARPAN olmalıdır. (x + 4)/(x + 5) kesrinde x'ler veya 4 ve 5 keyfî olarak “götürülemez”.

$$[K(x)\cdot M(x)]/[K(x)\cdot N(x)] = M(x)/N(x).$$

Anlamı: Pay ve paydadaki aynı çarpan yalnız sıfır değilse sadeleştirilebilir.

Koşullar: Başlangıçta K(x) ≠ 0 ve N(x) ≠ 0; işlem sonunda bu yasak değerler unutulmaz.

Kesir sadeleştirmesinde başlangıç tanım koşulları

Başlangıç	Çarpan gösterimi	Sade biçim ve yasak değerler
$(x^2-16)/(x^2+x-20)$	$(x-4)(x+4)\ /\ [(x+5)(x-4)]$	$(x+4)/(x+5);\ x\neq4,\ x\neq-5$
$(x^2-9)/(x-3)$	$(x-3)(x+3)/(x-3)$	$x+3;\ x\neq3$
$(2x^2+6x)/(4x)$	$2x(x+3)/(4x)$	$(x+3)/2;\ x\neq0$
$(x^2-4)/(x+2)$	$(x-2)(x+2)/(x+2)$	$x-2;\ x\neq-2$

20. Denklemde çarpanla sadeleştirmenin çözüm kaybı riski

Bir cebirsel eşitlikte her iki taraf aynı değişkenli ifadeyi içeriyorsa o ifadeye bölmeden önce sıfır olma ihtimali kontrol edilmelidir. x(x − 5) = 2(x − 5) denkleminde doğrudan x − 5'e bölünürse x = 2 bulunur; ancak x = 5 de eşitliği sağlar, çünkü iki taraf o durumda sıfırdır. Güvenli yol, bütün terimleri aynı tarafta toplamak ve ortak çarpan almaktır: x(x − 5) − 2(x − 5) = (x − 5)(x − 2) = 0. Sonuç x = 5 veya x = 2'dir. Başlangıç eşitliğine iki değerin de yazılarak doğrulanması, çözüm kaybını açıkça gösterir.

Eğer çözülmekte olan ifade bir cebirsel kesir olsaydı paydanın sıfır olması daha başlangıçta yasaklanırdı. Bu iki durum farklıdır: polinom denkleminde bir çarpanın sıfır olması geçerli bir kök verebilir; paydada aynı çarpanın sıfır olması ise tanımsızlık yaratır. Çarpanlara ayırma tekniği doğru kullanılsa bile yanlış bölme adımı matematiksel problemi değiştirebilir.

21. İşaret incelemesinde çarpanların belirleyici rolü

Çarpanlara ayrılmış bir ifade yalnız sıfırları değil, pozitif ve negatif olduğu aralıkları da gösterir. (x − 2)(x + 4) çarpımında kritik değerler −4 ve 2'dir. x < −4 iken iki çarpan negatif olduğundan çarpım pozitiftir. −4 < x < 2 iken bir çarpan negatif, öbürü pozitif olduğundan çarpım negatiftir. x > 2 iken iki çarpan da pozitiftir. x = −4 veya x = 2 için çarpım sıfır olur. Bu nedenle $x^2 + 2x - 8 \geq 0$ eşitsizliğinin çözümü $x \leq -4$ veya $x \geq 2$ olarak bulunur.

Bu incelemede işaret aralıklarının sınırları, çarpanların sıfır olduğu değerlerdir; paydalı ifadelerde ise paydanın sıfırları dışlanmalıdır. Örneğin (x − 2)/(x + 4) ≥ 0 için x = −4 tanım dışı, x = 2 ise payı sıfırladığı için dâhildir. İşaretler x < −4 ve x ≥ 2 aralıklarında uygun olduğundan çözüm $(-\infty, -4) \cup [2, \infty)$ olur. Çarpanların tek/çift kuvvetle bulunması işaretin geçiş davranışını etkileyebilir; bu konuya burada yalnız temel işaret mantığı düzeyinde yer verilmektedir.

(x−2)(x+4) çarpımının işaret aralıkları

x aralığı	x−2 işareti	x+4 işareti	Çarpım işareti
x < −4	Negatif	Negatif	Pozitif
x = −4	Negatif	Sıfır	Sıfır
−4 < x < 2	Negatif	Pozitif	Negatif
x = 2	Sıfır	Pozitif	Sıfır
x > 2	Pozitif	Pozitif	Pozitif

22. Çarpanlara ayırmayla hızlı ve denetlenebilir sayısal hesap

İki kare farkı, birbirine yakın sayıların karelerini karşılaştırırken uzun çarpma yapmadan sonuç elde etmeyi sağlar. $105^2 - 95^2 = (105 - 95)(105 + 95) = 10 \cdot 200 = 2\,000$ olur. Bağımsız doğrudan kontrol: $105^2 = 11\,025$, $95^2 = 9\,025$ ve fark 2 000'dir. Bu örnek, çarpanlara ayırmanın yalnız bilinmeyenli ifadelerde değil, sayısal hesaplamada da işlem sayısını azaltabildiğini gösterir.

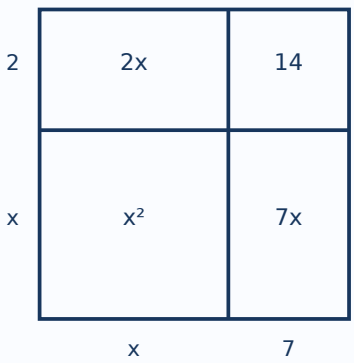
Aynı yöntem $48 \cdot 53 + 48 \cdot 47$ ifadesinde ortak çarpanla uygulanır: $48(53 + 47) = 48 \cdot 100 = 4\,800$. Ayrı çarpımlar $48 \cdot 53 = 2\,544$ ve $48 \cdot 47 = 2\,256$ olup toplam yine 4 800'dür. Bu örneklerde kullanılan yöntemler yalnız dağılma ve kare farkı kurallarının farklı yönden uygulanmasıdır; kısa işlem seçimi sonucu kontrol etme gereğini ortadan kaldırmaz.

23. Alan modelinde çarpanların geometrik yorumu

Dikdörtgenin alanı iki kenar uzunluğunun çarpımıdır. Kenarları metre cinsinden x ve x + 6 olan bir dikdörtgenin alanı $x(x + 6) = x^2 + 6x$ metrekaredir. Bu eşitlik $x > 0$ koşulunda gerçek bir dikdörtgenin ölçülerini temsil eder. $x^2 + 6x$ alan ifadesini $x(x + 6)$ biçiminde çarpanlara ayırmak, uzunlukların neden iki çarpan hâlinde göründüğünü açıklar. Örneğin x = 4 metre seçildiğinde kenarlar 4 ve 10 metre, alan 40 metrekaredir; açılım $4^2 + 6 \cdot 4 = 16 + 24 = 40$ sonucuyla aynı değeri verir.

Bir kenarı x + 7 metre, diğer kenarı x + 2 metre olan dikdörtgenin alanı $x^2 + 9x + 14$ metrekaredir. Bu alan ifadesinin $(x + 7)(x + 2)$ biçiminde olması, terimlerin toplamından iki uzunluğu ayrıştırmaya örnektir. Sadece cebirsel özdeşliğe bakıldığında x her gerçek sayı olabilir; gerçek bir uzunluk modelinde ise her iki kenarın pozitif olması gerekir. Geometrik anlam, cebirsel eşitliğe ek bir geçerlilik koşulu getirir.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

24. Yaygın yanlışları karşı örnekle ayırma

Bir toplamın ortak çarpanına bölünmesi ile bir toplamın herhangi bir terimini silmek farklı işlemlerdir. $6x + 12 = 6(x + 2)$ doğrudur; buna karşılık "$6x + 12 = 6x$" yazımı sabit 12'yi kaybeder. Benzer biçimde $x^2 + 25$ ifadesi $(x + 5)(x - 5)$ değildir; sağ taraf $x^2 - 25$'tir. Bir üç terimlinin tam kare olması için orta terimin de uygun biçimde bulunması gerekir: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, fakat $x^2 + 6x + 6$ aynı eşitliği vermez.

Bir çarpanı sadeleştirirken hangi ifadenin paydada olduğu belirleyicidir. $(x^2 - 9)/(x - 3)$ kesrinde $x - 3$ ortak çarpanı $x \neq 3$ iken sadeleşebilir; buna karşılık $(x^2 - 9)/(x + 3)$ için ortak çarpan $x + 3$'tür ve yasak değer $x = -3$'tür. Sonuçlar sırasıyla $x + 3$ ve $x - 3$ olsa da farklı başlangıç tanım kümeleri nedeniyle bu iki kesir özdeş aynı problem değildir. Ayrıca uygun bir örnekte bulunan özel x değeri, genel dönüşümün her x için geçerli olduğunu kanıtlamaz.

Çarpanlara ayırmada görülen hatalı genellemeler

Yanlış yaklaşım	Neden yanlış?	Doğru ayrım
$x^2+25 = (x-5)(x+5)$	Sağ taraf x^2-25'tir	Kare farkında eksi işareti zorunludur
$x^2+6x+6 = (x+3)^2$	Açılımın son terimi 9 olur	Üç terimin tamamı kontrol edilir
$6x+12 = 6x$	Sabit 12 kaybolur	$6(x+2)$ yazılır
$(x^2-9)/(x-3) = x+3$, bütün x için	$x=3$ başlangıçta tanımsızdır	Eşitlik yalnız $x\neq3$ için
$x(x-5)=2(x-5) \Rightarrow$ yalnız $x=2$	$x=5$ kökü bölmeyle kaybolur	$(x-5)(x-2)=0$ kurulmalıdır

25. Sonucun bağımsız denetimi ve yöntemlerin sınırları

Çarpanlara ayırma sonucunu kontrol etmenin en güvenilir yolu, çarpanları parantezlerin dağılımı ve özdeşliklerle yeniden çarparak aynı polinomu elde etmektir. Örneğin $(2x - 3)(x + 4)$ çarpımı $2x^2 + 8x - 3x - 12 = 2x^2 + 5x - 12$ verir. Dolayısıyla $2x^2 + 5x - 12$ için uygun bir çarpan gösterimi kurulmuştur. Ayrı bir sayısal kontrol amacıyla $x = 2$ seçilirse başlangıç $8 + 10 - 12 = 6$, çarpan biçimi $(4 - 3)(2 + 4) = 6$ olur. Sayısal karşılaştırma işlem hatasını yakalamaya yardımcıdır; genel özdeşliği kanıtlayan ise cebirsel açılımdır.

İfade kesirliyse başlangıç paydasının sıfır olduğu değerler baştan kaydedilir. Denklem çözülüyorsa çarpanın sıfır olabileceği durumlar korunur ve bulunan değerler ilk eşitliğe yeniden yazılır. Birim içeren geometrik veya sayısal uygulamada sonuçların uzunluk, alan ya da başka nicelik bakımından anlamlı olması gerekir. Çarpanlara ayırma yöntemleri böylece aritmetik ortak çarpandan cebirsel özdeşliğe, denklemden işaret incelemesine uzanan tutarlı bir araç oluşturur. Bir sonraki GY-08.03 konusundaki sayma ve olasılık için ise çarpan biçiminden ziyade olası durumların doğru tanımlanması ve sistematik sayılması esas alınacaktır.

> **Önemli ayrım** Çarpanlara ayırma bir eşdeğer biçime dönüştürmedir; bir ifadeyi çözüme kavuşturmakla aynı işlem değildir. İkinci dereceden bir ifadenin gerçek doğrusal çarpanlara ayrılabilmesi için gerçek köklere sahip olması gerekir. Değişken içeren ortak çarpana bölme, onun sıfır olabildiği denklemlerde çözüm kaybettirebilir; cebirsel kesirdeyse başlangıç paydasını sıfırlayan bütün değerler işlem boyunca yasak kalır. Her son biçim, çarpılarak açılımla doğrulanmalıdır.

KONU 8.3

BASİT OLASILIK VE SAYMA

Sayma, belirli kuralları karşılayan kaç farklı sonuç bulunduğunu belirleme işidir; olasılık ise bir sonucun ya da sonuç grubunun gerçekleşme ihtimalini sayısal olarak ifade eder. Bir seçim sürecinde mümkün durumları yanlış saymak, daha sonra doğru formül kullanılsa bile hatalı olasılığa yol açar. Bu nedenle önce hangi sonuçların birbirinden farklı kabul edildiği, sıranın önemli olup olmadığı, aynı nesnenin tekrar seçilip seçilemeyeceği ve sonuçların eşit şanslı sayılıp sayılamayacağı belirlenir. Bu bölümde temel sayma yöntemleri, basit olasılık hesapları ve bunların geçerlilik koşulları birlikte ele alınacaktır. Kümelerin birleşim, kesişim ve tümleme işlemleri GY-08.01'de tanıtılmıştır; burada aynı işlemler olası sonuçları doğru gruplamak amacıyla kullanılır.

1. Sayma ve olasılığın ortak başlangıcı: mümkün durumların tanımlanması

Bir olay için “kaç farklı yol var?” denildiğinde önce bir yolun hangi özelliklerle tanımlandığı açıklığa kavuşturulmalıdır. Bir adayın üç oturum saatinden birini ve dört çalışma alanından birini seçmesi, saat ve alan ikilisiyle belirlenen bir sonuç üretir. Her saat her alanla birlikte seçilebiliyorsa $3 \cdot 4 = 12$ farklı ikili vardır. Buna karşılık yalnız hangi saatin seçildiği önemliyse dört çalışma alanı ayrı sonuç kabul edilmez ve olası saat sayısı üçtür. Aynı fiziksel seçim süreci, neyin sonuç sayıldığına göre farklı sayma problemleri doğurabilir.

Günlük dilde “olasılık” sözü kimi zaman belirsiz tahmin anlamında kullanılır; matematikteyse olayın hangi deneyde, hangi sonuç kümesi üzerinde ve hangi olasılık modeline göre tanımlandığı belirtilmelidir. Bir olayın sayılabilir olması tek başına onun bütün sonuçlarının eşit olasılıklı olduğunu kanıtlamaz. Sayma ile olasılık arasındaki ilişki, ancak model koşulları açıklandığında geçerlidir.

2. Deney, çıktı, örnek uzay ve olay

Sonucu önceden kesin olarak belirlenemeyen, ancak hangi sonuçların mümkün olduğu tanımlanabilen işlem bir olasılık deneyi olarak ele alınır. Deneyden tek seferde elde edilen belirli sonuca çıktı, bütün mümkün çıktıların oluşturduğu kümeye örnek uzay denir. Örnek uzay E harfiyle, bir olay da A gibi bir harfle gösterilebilir. Olay, örnek uzayın belirli çıktılarından oluşan bir alt kümesidir; bazı olaylar tek çıktı, bazıları birkaç çıktı içerir.

Örneğin üzerinde 1, 2, 3, 4, 5 sayıları bulunan eş büyüklükte beş kartın karıştırılarak birinin seçildiği deneyde $E = \{1,2,3,4,5\}$ olur. “Çift sayılı kart gelmesi” $A = \{2,4\}$, “3'ten büyük sayı gelmesi” $B = \{4,5\}$ olaylarıdır. Aynı 4 çıktısı hem A hem B olayına aittir. Kartlar fiziksel olarak eş özellikte olmalı, karıştırma ve rastgele seçme süreci her karta aynı şansı vermelidir; yalnız numaralandırma bu eşitliği sağlamaz.

Beş kartlık özgün deneyde örnek uzay ve olay

Tanım	Küme gösterimi	Çıktı sayısı
Bütün mümkün kartlar	$E=\{1,2,3,4,5\}$	5
Çift sayılı kart	$A=\{2,4\}$	2
3'ten büyük kart	$B=\{4,5\}$	2
Hem çift hem 3'ten büyük	$A \cap B=\{4\}$	1
İki olaydan en az birine giren	$A \cup B=\{2,4,5\}$	3

3. Eş olasılıklı sonuç şartı

Sonlu bir örnek uzayın bütün çıktıları aynı şansa sahipse tek bir çıktının olasılığı 1/s(E), bir A olayının olasılığı ise s(A)/s(E) olur. Burada s(A), A kümesindeki çıktı sayısı; s(E), örnek uzaydaki toplam çıktı sayısıdır. E boş olamaz. Örneğin iyi karıştırılmış ve fiziksel olarak eş olan beş kartın her biri 1/5 olasılıkla seçiliyorsa çift sayılı kart gelme olasılığı 2/5'tir. Bu oran, yalnızca iki uygun durum bulunduğu için değil, her kartın eş şanslı olması nedeniyle geçerlidir.

Eş büyüklükte olmayan çark bölümleri, farklı ağırlıktaki nesneler veya taraflı bir madenî para söz konusu olduğunda sonuçları yalnız saymak yeterli değildir. Böyle durumlarda her çıktının uygun olasılığı bilinmeli ya da gerekçeli bir model kurulmalıdır. “İki seçenek var; o hâlde olasılık yarı yarıya” çıkarımı genel olarak geçersizdir.

$$P(A) = s(A)/s(E)$$

Anlamı: Bir olayın olasılığı, uygun çıktı sayısının bütün mümkün çıktı sayısına oranıdır.

Koşullar: E sonlu ve boş olmayan örnek uzaydır; E içindeki bütün tekil çıktılar eş olasılıklıdır. Bu şart sağlanmıyorsa yalnız çıktı sayıları oranı kullanılmaz.

4. Saymanın toplama ilkesi: birbirinden ayrık yollar

Bir iş, aynı sonucu iki kez saymayan birbirinden ayrı seçenek gruplarından yalnız biriyle yapılabiliyorsa grup sayıları toplanır. Bir danışma birimine başvurmak için öğleden önce üç ayrı saat ya da öğleden sonra dört ayrı saat seçilebilsin. Bu saatlerin hiçbiri iki grupta birlikte yer almıyorsa toplam yedi farklı saat seçeneği vardır. “Ya öğleden önce ya öğleden sonra” ifadesi burada örtüşmeyen iki grubu gösterir.

Gruplar örtüşüyorsa aynı seçenek iki kez sayılmamalıdır. Örneğin 1'den 10'a kadar numaralı kayıtlardan çift numaralılar beş, 5'ten büyük olanlar da beştir. Her iki koşulu sağlayan 6, 8 ve 10 olmak üzere üç kayıt vardır. İki grubun birleşimi 5 + 5 − 3 = 7 kayıt içerir. Böylece toplama ilkesinin kapsaması ve kümelerin birleşim hesabı aynı sayma mantığına dayanır.

Ayrık ve örtüşen gruplarda toplama

Durum	Doğru işlem	Neden
Ayrı 3 sabah ve 4 öğleden sonra saati	3+4=7	Ortak seçenek bulunmaz
1–10 içinde çift sayılar veya 5'ten büyük sayılar	5+5−3=7	6, 8, 10 iki kez sayılır
Hem çift hem 5'ten büyük	3	Birleşim değil, ortak bölüm istenir

5. Saymanın çarpma ilkesi: birbirini izleyen aşamalar

Bir sonuç, arka arkaya verilen seçimlerin tamamıyla belirleniyorsa aşamalardaki seçenek sayıları çarpılır. Üç farklı dosya türü ve dört farklı işlem kanalı bulunduğunda, her tür her kanalla seçilebiliyorsa 3 · 4 = 12 farklı tür–kanal ikilisi oluşturulabilir. İki aşamadan biri belirli seçenekler altında farklı sayıda olasılık bırakıyorsa tek bir sabit çarpım kullanmadan önce dallar ayrı sayılmalıdır.

Örneğin iki iletim yönteminden ilki için üç zaman, ikincisi için beş zaman seçeneği bulunsun. Her dalın sonucu yöntem ve zaman ikilisiyle tanımlandığında toplam 3 + 5 = 8 olasılık vardır; 2 · 5 = 10 saymak yanlıştır, çünkü her yöntemde beş zaman seçeneği bulunmamaktadır. Çarpma ilkesi, koşulların izin verdiği seçeneklerin her aşamada eksiksiz ve çakışmasız kurulmasına bağlıdır.

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Anlamı: Bir sonuç k ardışık aşamadaki seçimlerle oluşuyor ve her önceki seçime karşılık ilgili aşamada belirtilen n_i seçenek bulunuyorsa sonuç sayısı aşama sayılarının çarpımıdır.

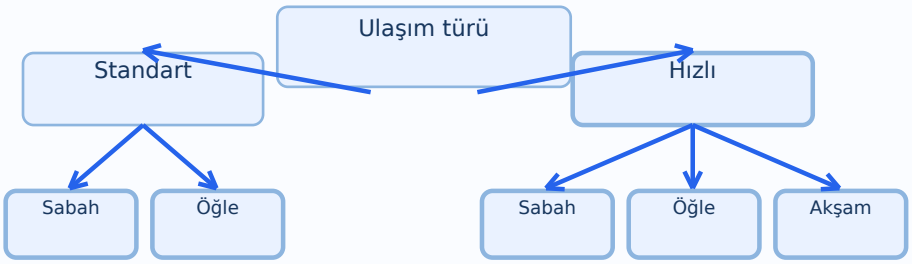
Koşullar: Aşamaların bir araya gelmesi tek bir sonucu tanımlar; bütün izin verilen birleşimler hesaba katılır. Seçenek sayısı önceki seçime göre değişiyorsa ayrı dallar toplanarak hesaplanır.

6. Ağaç şeması ve sistematik durum tablosu

Çok aşamalı bir süreçte seçimlerin hangi sonuçlara ulaştığı bir ağaç şemasıyla izlenebilir. İki kargo türü (standart, hızlı) ve her tür için üç teslim penceresi (sabah, öğle, akşam) varsa ilk ayrım tür, ikinci ayrım pencere olabilir. Her ilk dalın altında üç alt dal bulunur; uçlarda toplam altı sonuç oluşur. Aynı durum iki satırlı ve üç sütunlu tabloda altı hücre olarak gösterilebilir. Sayılar yalnız çizimden okunmamalı, metinde açıkça belirtilmelidir.

Bir ağaç şemasının en önemli işlevi, bazı dalların kapandığı ya da ek koşul taşıdığı durumları görünür kılmasıdır. Standart türde akşam teslimatı yoksa standart dalı iki; hızlı dalı üç sonuç verir ve toplam beş olur. Böyle bir durumu bütün dallar eşitmiş gibi $2 \cdot 3 = 6$ ile hesaplamak fazla saymaya yol açar.

Konuya ait açıklayıcı şema



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

7. Tekrar serbestliği ve seçimin sıraya bağlı olması

Sayıma başlamadan önce seçilmiş bir nesnenin yeniden kullanılabilip kullanılamayacağı belirlenmelidir. Beş farklı sembolden üç konumlu bir kod üretiliyor ve tekrar serbestse her konum için beş seçenek bulunur; toplam $5^3 = 125$ kod vardır. Tekrar yasaksa birinci konumda beş, ikinci konumda dört, üçüncü konumda üç seçenek kalır ve $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ kod elde edilir. Burada sıralama önemlidir; ABC ile BAC ayrı kodlardır.

Aynı beş nesneden üç kişilik bir ekip seçilmesi farklıdır. Ekip üyelerinin hangi sırada seçildiği sonuç kümesini değiştirmez. Sayma modeli bu nedenle kod oluşturma ile ekip oluşturmayı aynı yöntemle ele alamaz. İzin verilmeyen tekrarı dikkate almamak veya önemsiz olan sıralamayı gereksiz yere saymak iki ayrı hata türüdür.

Beş farklı sembolden üçlü oluşturmanın kapsamı

Model	Sıra önemli mi?	Tekrar var mı?	Farklı sonuç
Üç konumlu kod	Evet	Evet	$5^3=125$
Üç konumlu, tekrarsız kod	Evet	Hayır	$5\cdot4\cdot3=60$
Üç üyeli ekip	Hayır	Hayır	10

8. Faktöriyel kavramı ve sıralamayı ifade etmesi

Birbirinden farklı n nesnenin tamamı bir sıraya yerleştirilecekse ilk konum için n, ikinci için n−1 seçenek bulunur; seçenek sayısı son konuma kadar birer azalır. Bu çarpım n! biçiminde okunur. Örneğin birbirinden farklı dört klasörün tek sıraya diziliş sayısı 4! = 4 · 3 · 2 · 1 = 24'tür. Faktöriyel, başka bir işlem gibi yalnız belirli örneğe ait değildir; her sıralama uzunluğunda kullanılan standart gösterimdir.

0! = 1 kabulü tutarsız bir istisna değildir. Hiç nesne seçilmeyen veya boş dizilişin oluşturulduğu durum için bir tek boş düzen vardır; ayrıca 1! = 1 · 0! bağıntısının korunması 0! değerinin 1 olmasını gerektirir. Burada n, sıfır veya pozitif tam sayı olmalıdır. Faktöriyel işaretiyle birlikte işlem yapılırken n! ifadesinin n · (n−1)! olduğu ve negatif faktöriyelin bu temel kapsamda tanımlanmadığı unutulmamalıdır.

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1;\ 0! = 1$$

Anlamı: n farklı nesnenin tümünü sıralamanın yol sayısı n! ile verilir.

Koşullar: n ≥ 0 tam sayıdır; n=0 için boş diziliş tek biçimde kabul edilir.

9. Permütasyon: sırası önemli olan kısmi yerleştirme

Birbirinden farklı n nesnenin r tanesi seçilip farklı görev veya konumlara sıralandığında permütasyon hesabı yapılır. Beş konuşmacıdan açılış, ikinci ve kapanış konuşmasını yapacak üç kişi belirleniyorsa görevler farklıdır. Açılış için beş kişi, ikinci için dört kişi, kapanış için üç kişi seçilebilir; 5 · 4 · 3 = 60 atama vardır. Aynı üç kişinin görevlerinin değişmesi ayrı bir düzen oluşturur.

Bu modelde herhangi bir konuşmacı birden fazla göreve atanamaz. Tekrar serbest olsaydı aynı kişinin farklı görevlerde seçimi de sayılacak, sonuç 5^3 = 125 olurdu. P(n,r) gösterimi, n!/(n−r)! oranını kullanır; payda sıfır faktöriyel de olabilir. Hesap yalnız 0 ≤ r ≤ n olduğunda bu biçimde geçerlidir.

$$P(n,r) = n!/(n-r)! = n(n-1)\ldots(n-r+1)$$

Anlamı: n farklı nesneden tekrarsız seçilen r nesnenin sıralı diziliş sayısı.

Koşullar: n ve r tam sayı; 0 ≤ r ≤ n. Sıra önemlidir ve aynı nesne tekrar kullanılamaz.

10. Kombinasyon: sırasız seçim ve tekrarlı saymayı giderme

Bir gruba kimin dâhil olduğu önemli, ancak seçilme sırası önemsizse kombinasyon kullanılır. Altı gönüllüden iki kişi seçilirken sıralı işlem 6 · 5 = 30 görünüm üretir; ancak Ali–Burcu ile Burcu–Ali aynı iki kişilik gruptur. Her grup 2! = 2 farklı sırayla sayıldığı için gerçek grup sayısı 30/2 = 15'tir. Böylece kombinasyon, permütasyonun sıralama fazlalığını giderir.

C(n,r) veya n'nin r'lisi gösterimi, n!/[r!(n−r)!] olarak yazılır. Özellikle C(n,0)=1 ve C(n,n)=1, sırasıyla hiç kimseyi seçmemek ve bütün grubu seçmek için tek bir seçenek bulunduğunu gösterir. Seçim sayısı n'yi aşamaz. C(6,2)=C(6,4)=15 eşitliği, iki kişi seçmek ile dışarıda kalan dört kişiyi belirlemenin birbirine karşılık gelmesinden doğar; bu iki görevin sözel anlamı aynı olmak zorunda değildir.

$$C(n,r) = n!/[r!(n-r)!];\ C(n,r)=C(n,n-r)$$

Anlamı: n farklı nesneden tekrar olmadan r nesnelik, sırası önemsiz grupların sayısı.

Koşullar: n ve r tam sayı; 0 ≤ r ≤ n. Her grup bir kez sayılır.

11. Özdeş nesnelerin tekrarlı dizilişlerini ayırma

Nesneler görünüş veya tanım bakımından ayırt edilemiyorsa bütününü n! ile sıralamak aynı dizilişi gereğinden fazla sayar. A, D, A harflerinden oluşan üç konumlu dizilişler ADA, AAD ve DAA olmak üzere üçtür. İlk ve son A harflerinin yerini kendi aralarında değiştirmek yeni bir kelime oluşturmaz. Bu nedenle toplam 3! düzeni, iki özdeş A'nın 2! yer değişimine bölünür: 3!/2! = 3.

K, A, S, A harflerinin bütün farklı diziliş sayısı da 4!/2! = 12'dir; iki A tekrar ederken K ile S farklıdır. İki veya daha çok tekrar grubu olduğunda her grubun faktöriyeli bölende yer alır. Bu yöntem aynı türdeki nesnelerin gerçekten birbirinden ayırt edilmediği koşulda kullanılır. İki fiziksel kart, yazıları aynı olsa bile kart kimlikleriyle ayrı ayrı izleniyorsa örnek uzayın nesne tanımı değişebilir.

$$\text{Farklı diziliş} = n!/(a!\cdot b!\cdot \ldots)$$

Anlamı: Toplam n nesne içinde birbirinin aynısı olan büyüklükleri a, b, ... olan tekrar gruplarının yol açtığı fazla sayım düzeltilir.

Koşullar: a+b+...=n; gruplardaki nesneler kendi aralarında ayırt edilmez; bütün n konum kullanılır.

12. Yasak konumlar, baştaki sıfır ve sayma kısıtları

Her seçeneği her konuma doğrudan dağıtmak bazı sayısal koşulları ihlal edebilir. {0,2,4,7,9} rakamlarıyla rakamları farklı üç basamaklı doğal sayılar oluşturulurken yüzler basamağına 0 gelemez. İlk basamak için dört; ikinci için kalan dört; üçüncü için kalan üç seçenek bulunur. Sonuç $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ farklı sayıdır. Birler basamağının 0 olabildiği durumlarda bile yüzler basamağında 0 yasağı devam eder.

Aynı rakamlardan rakamları farklı üç basamaklı çift sayı sayısı, son basamak değerine göre ayrılarak bulunur. Son rakam 0 ise yüzler için dört, onlar için üç seçenek: 12 sayı. Son rakam 2 veya 4 ise iki son rakam seçeneğinin her biri için yüzlerde 0 dışındaki üç, onlar basamağında kalan üç seçenek vardır: $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ sayı. Toplam 30 farklı çift sayıdır. İlk ve son basamağı aynı çarpma kalıbıyla saymak, sıfırla başlama kısıtını kaçırabilir.

{0,2,4,7,9} rakamlarıyla üç basamaklı sayılar

Sayma kapsamı	Seçenek çarpımı	Sonuç
Rakamları farklı bütün üç basamaklılar	4·4·3	48
Son rakam 0 olan çiftler	4·3	12
Son rakamı 2 veya 4 olan çiftler	2·3·3	18
Toplam rakamları farklı çiftler	12+18	30

13. Sıralama ve seçmenin birbirine karıştırılmaması

Sekiz farklı çalışandan üç kişilik bir değerlendirme grubu seçildiğinde ve herkes aynı statüde olduğunda C(8,3)=56 grup vardır. Aynı üç kişiye başkan, yazman ve sözcü görevi ayrı ayrı verilecekse görevler fark yaratır; P(8,3)=8·7·6=336 atama oluşur. Aradaki altı kat, seçilen üç kişinin kendi aralarında 3!=6 görev yerleşimi bulunmasından kaynaklanır.

Sayma işleminden önce “Sıra değişince sonuç değişir mi?” ve “Aynı eleman bir kez daha seçilebilir mi?” ayrımı kurulmalıdır. Bir bilet çekilmesi veya tek kartın belirlenmesi sırasında sıranın etkisi yoktur; peş peşe iki bilet

çekilip birincinin ve ikincinin ayrı ayrı kaydı tutuluyorsa sıralı çiftler önem kazanır. Bu farklılık, daha sonra olasılığın paydasında neyin tekil çıktı sayılacağını da belirler.

Sekiz kişiden üç kişinin seçimi veya görevlendirilmesi

İş	Kullanılan sayma	Farklı sonuç
Eş görevli üç kişilik grup	C(8,3)	56
Üç ayrı göreve birer kişi	P(8,3)	336
Sıralı sonucu sırasız gruba dönüştürme	336/3!	56

14. Klasik olasılıkta pay ve paydanın aynı sonucu sayması

Bir deneyin bütün çıktıları aynı türden nesneler veya sıralı işlemler olarak tanımlanmalıdır. Bir torbada beş mavi, üç turuncu ve iki yeşil eş büyüklükte bilye bulunuyor ve bir bilye rastgele çekiliyorsa toplam on fiziksel bilye eş olasılıklıdır. Mavi çıkma olasılığı 5/10=1/2, yeşil çıkmama olasılığı 8/10=4/5'tir. Renk sayısı üçtür ancak renkler eş olasılıklı değildir; “mavi, turuncu, yeşil” renklerini üç ayrı eş sonuç gibi sayarak maviye 1/3 olasılık vermek yanlıştır.

Payda fiziksel bilye sayısına göre kurulmuşsa uygun durum da fiziksel bilye sayısı olmalıdır. Bu model aynı zamanda farklı renklerin olasılıklarını 5/10, 3/10 ve 2/10 biçiminde ayırır; toplamı (5+3+2)/10=1'dir. Uygun sayıların toplam sayıyı aşması veya kesrin negatif çıkması model hatasını gösterir.

On eş özellikli bilyenin bir kez rastgele çekilmesi

Olay	Uygun bilye	Olasılık
Mavi	5	5/10=1/2
Turuncu	3	3/10
Yeşil	2	2/10=1/5
Mavi veya turuncu	8	8/10=4/5
Yeşil değil	8	8/10=4/5

15. İmkânsız, kesin ve tümleyen olaylar

E örnek uzayında hiçbir çıktı içermeyen olay imkânsız; bütün çıktıları içeren olay kesin olarak adlandırılır. Eş olasılıklı sonlu modelde imkânsız olayın olasılığı 0, kesin olayın olasılığı 1'dir. Her A olayının tümleyeni A′, A'nın olmadığı bütün çıktılardan oluşur. Bir olayın olması ve olmaması birbirini dışlar ve birlikte bütün örnek uzayı kaplar; bu nedenle P(A)+P(A′)=1'dir.

İçinde yalnız 1–5 sayılı kartlar olan deneyde “8 gelmesi” imkânsız; “1 ile 5 arasında bir tam sayı gelmesi” kesindir. “Çift gelmemesi” olayının olasılığı, çift gelme olasılığı 2/5 olduğundan 1−2/5=3/5'tir; doğrudan tek sayılı 1,3,5 kartlarını saymak da aynı 3/5 sonucunu verir. Sürekli modellerde tek bir değerin olasılığı 0 olsa da olay mantıken mümkün olabilir; burada ağırlık sonlu klasik örnek uzaylar üzerindedir.

$$0 \le P(A) \le 1;\ P(E)=1;\ P(\varnothing)=0;\ P(A')=1-P(A)$$

Anlamı: Olasılığın sınırları, kesin ve imkânsız olaylar ile tümleyen bağıntısı.

Koşullar: P, tutarlı bir olasılık dağılımıdır; A′, aynı E örnek uzayına göre tanımlanır.

16. Birleşim, kesişim ve örtüşen olaylarda olasılık

İki olaydan en az birinin gerçekleşmesi A∪B, her ikisinin birden gerçekleşmesi A∩B ile ifade edilir. Birleşimde ortak çıktılar iki kez sayılmamalıdır. Eş olasılıklı bir altı yüzlü sayı küpünün üst yüzü 1–6 arasında olduğunda A={1,3,5} tek gelmesi, B={5,6} beş veya altı gelmesi olsun. A∩B={5}, A∪B={1,3,5,6} olur. Bu durumda P(A∪B)=3/6+2/6−1/6=4/6=2/3'tür.

A ve B ayrık olaylarsa ortak sonuç yoktur ve birleşim olasılığı doğrudan P(A)+P(B) olur. Ayrık olmayan iki olayı aynı biçimde toplamak toplamı gereğinden fazla gösterebilir, hatta 1'i aşan anlamsız sonuçlara yol açabilir. Buradaki küme işlemleri GY-08.01'deki kuralların olasılık dağılımına uygulanmasıdır.

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Anlamı: A veya B olayının en az birinin gerçekleşme olasılığı; ortak olay iki kez sayılmaz.

Koşullar: A ve B aynı olasılık uzayında tanımlanır. Ayrık olaylarda P(A∩B)=0'dır.

Altı eş olasılıklı yüz üzerinde iki olay

Olay	Küme	Olasılık
A: tek yüz	{1,3,5}	3/6
B: 5 veya 6	{5,6}	2/6
A ile B birlikte	{5}	1/6
A veya B	{1,3,5,6}	4/6

17. Çok aşamalı deneyde örnek uzayın eş olasılıklı kurulması

İki bağımsız ve hilesiz altı yüzlü sayı küpü atıldığında tek tek 1–6 toplam değerlerini saymak yeterli değildir. Çıktı, birinci küpün yüzü ile ikinci küpün yüzünün sıralı ikilisidir: (1,1), (1,2), …, (6,6). Toplam 6·6=36 eş olasılıklı ikili vardır. Toplamın 8 olmasını sağlayan ikililer (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) olmak üzere beştir; dolayısıyla olasılık 5/36'dır.

Toplamların 2,3,…,12 arasında on bir farklı değer alabilmesi, bu on bir toplamın eş olasılıklı olduğu anlamına gelmez. Örneğin toplamı 2 yapan yalnız (1,1), toplamı 7 yapan ise altı ayrı sıralı ikili vardır. Bir problemde “sayıların toplamı” gözlenen nicelik olsa bile klasik olasılık paydasını eş şanslı temel çıktılar üzerinden kurmak gerekir.

İki hilesiz sayı küpünün eş şanslı sıralı sonuçları

Toplam	Uygun sıralı çift sayısı	Olasılık
2	1	1/36
6	5	5/36
7	6	6/36=1/6
8	5	5/36
12	1	1/36

18. Sıralı aşamalarda olasılığın çarpılması

Bir sürecin her aşaması için uygun durumların toplam durumlara oranı belirlenebiliyorsa bütün aşamaların birlikte gerçekleşme olasılığı koşullu aşama olasılıklarının çarpımıyla bulunur. Birinci aşamada kırmızı çıkma olasılığı 3/7 ve bu gerçekleştiğinde ikinci aşamada mavi çıkma olasılığı 4/6 ise “önce kırmızı, sonra mavi” olasılığı (3/7)·(4/6)=12/42=2/7 olur. Burada ikinci olasılığın 4/6 olmasının nedeni ilk seçilen kırmızı nesnenin geri konulmamasıdır.

Çarpma sırasında her aşamanın paydası o aşamaya gerçekten kalan mümkün sonuçları, payı ise belirtilen olayı sağlayanları saymalıdır. Bağımsızlık varsayımı olmadan P(A∩B)=P(A)·P(B) yazmak yanlış olur; doğru genel ifade P(A∩B)=P(A)·P(B|A)'dır. Koşullu olasılık, yeni bilginin örnek uzayı daraltmasını görünür kılar.

$$P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B)$$

Anlamı: İki olayın birlikte gerçekleşmesi, ilk olayın olasılığıyla o olay gerçekleşmişken ikinci olayın olasılığının çarpımıdır.

Koşullar: P(B|A) için P(A)>0; P(A|B) için P(B)>0 gerekir. Bağımsızlık varsa P(B|A)=P(B) olur.

19. Geri koymadan çekme ve değişen paydalar

Bir kutuda dört mavi ve üç kırmızı, toplam yedi eş özellikli kart bulunsun. İki kart sırayla çekilip geri konulmadığında önce kırmızı ardından mavi çekilme olasılığı 3/7 · 4/6 = 2/7'dir. Tersi sıralama, önce mavi ardından kırmızı, 4/7 · 3/6 = 2/7 verir. Sıralar farklı sonuç olsa da iki durum aynı “bir kırmızı ve bir mavi” olayının ayrık parçalarıdır; toplam olasılık 4/7 olur.

Bağımsız ikinci bir sayımda toplam sıralı kart çifti 7 · 6 = 42'dir. Bir kırmızı–bir mavi çift için iki sıra vardır; her sırada 3 · 4 = 12 çift bulunur. Böylece uygun sıralı çift sayısı 24 ve olasılık 24/42=4/7 olur. Şartlı çarpım ile doğrudan örnek uzay sayımı aynı sonucu verdiğinden model iki yolla doğrulanmıştır.

Yedi karttan geri koymadan iki çekiş

Olay	Aşama olasılıkları	Sonuç
Önce kırmızı sonra mavi	(3/7)·(4/6)	2/7
Önce mavi sonra kırmızı	(4/7)·(3/6)	2/7
Tam bir kırmızı ve bir mavi	2/7+2/7	4/7
İkisi de kırmızı	(3/7)·(2/6)	1/7
İkisi de mavi	(4/7)·(3/6)	2/7

20. Geri koyarak çekme ve bağımsızlık ayrımı

Aynı kutudan çekilen kart her seferinde geri konulup yeniden karıştırılıyorsa çekimler arasında kutunun sayısal yapısı değişmez. Kırmızı kart çekme olasılığı her defasında 3/7 olduğundan art arda iki kırmızı gelme olasılığı $(3/7)^2=9/49$'dur. Geri koymadan yapılan iki kırmızı çekme deneyindeki 1/7 değeriyle farklı olması, ikinci aşamanın koşulunun değişmesinden kaynaklanır.

Bağımsız olaylarda birinin gerçekleşmesi diğerinin olasılığını değiştirmez. İki ayrı ve hilesiz para atışında birinci atışta yazı gelmesi ile ikinci atışta yazı gelmesi bağımsızdır; birlikte yazı gelme olasılığı $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$'tür. Buna karşılık "aynı atışta yazı" ile "aynı atışta tura" olayları ayrık, fakat ikisi de pozitif olasılıklı olduğundan bağımsız değildir: Birinin gerçekleşmesi diğerini imkânsız kılar. Ayrıklık ve bağımsızlık birbirine karıştırılmamalıdır.

> **Temel olasılık ayrımı** Geri koyma, farklı çekişlerin aynı dağılımla yapılmasını sağlayabilir; ancak bağımsızlık yalnız süreç gerçekten önceki sonucu etkilemiyorsa kabul edilir. Ayrık iki pozitif olasılıklı olay bağımsız değildir. $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ bağımsızlık koşulunda; genel durumda $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$ geçerlidir.

21. Koşullu olasılıkta daraltılmış örnek uzay

"İlk kartın kırmızı olduğu biliniyor" ifadesi yalnız ek bir ayrıntı değil, ikinci çekişin olası durumlarını değiştiren bilgidir. Geri koymadan çekme örneğinde ilk kırmızıdan sonra altı kart kalır ve bunların dördü mavidir. İkinci kartın mavi olma koşullu olasılığı $4/6=2/3$'tür. İlk kartın rengini bilmeden "ikinci kart mavi" olasılığı ise simetri nedeniyle 4/7'dir; iki oran farklı soruları temsil eder.

Koşullu olasılık $P(B|A)=P(A\cap B)/P(A)$ bağıntısıyla tanımlanır. Eş olasılıklı durumda, A gerçekleştiği biliniyorsa A içindeki uygun B çıktılarının A'nın toplam çıktı sayısına oranı kullanılır. Koşul olayının olasılığı 0 olduğunda bu temel oran tanımsızdır; gerçekleşmesi imkânsız bir koşula sıradan bölme işlemi uygulanamaz.

$$P(B|A) = P(A\cap B)/P(A)$$

Anlamı: A olayı gerçekleşmişken B olayının olasılığı.

Koşullar: $P(A)>0$ olmalıdır; koşul ve istenen olay aynı deney kapsamında bulunmalıdır.

22. "En az bir" ve "hiçbiri" ifadelerinin tümleyenle çözülmesi

Birden fazla çekişte en az bir kez istenen özelliğin görülmesi, doğrudan çok sayıda dala ayrılabilir. Çoğu zaman önce hiç görülmeme olasılığını hesaplamak daha kısa ve güvenlidir. Dört mavi, üç kırmızı kartlık kutudan geri koymadan iki kart alındığında hiç mavi olmaması, iki kartın da kırmızı olmasıdır: $(3/7)\cdot(2/6)=1/7$. Bunun tümleyeni "en az bir mavi" olayı olduğundan sonuç $1-1/7=6/7$ olur.

Bağımsız kontrol için yalnız bir mavi olma olasılığı 4/7; iki mavi olma olasılığı 2/7'dir. Bunların toplamı 6/7'dir. "En az bir" ifadesi bir veya daha fazlasını; "tam bir" yalnız birini; "en fazla bir" sıfır ya da birini içerir. Bağlam doğru kurulmadığında aynı olaylar farklı paylarla hesaplanabilir.

$$P(\text{en az bir A}) = 1-P(\text{hiç A olmaması})$$

Anlamı: Bir veya daha fazla başarının tümleyeni sıfır başarıdır.

Koşullar: Deneyin bütün aşamaları ve hiçbir başarının oluşmaması olayı aynı örnek uzayda tanımlanır; bağımsızlık yalnız 'hiç' olasılığını çarparken gerekirse ayrıca kullanılır.

23. Üç aşamalı deney ve seçme sayısıyla olasılık ilişkisi

Hilesiz bir madenî para üç kez bağımsız atıldığında her atışta yazı (Y) veya tura (T) bulunur. Üç konumlu $2^3=8$ eş olasılıklı dizi oluşur: YYY, YYT, YTY, TYY, YTT, TYT, TTY, TTT. Tam iki yazı gelme olayı YYT, YTY, TYY olmak üzere üç çıktıdır ve olasılığı 3/8'dir. Bu çıktıları seçerek saymak için üç konumdan hangi ikisinin yazı olacağını belirlemek yeterlidir; C(3,2)=3'tür.

Bu örnekte C(3,2) yalnız yazı yerlerinin sayısını verir. Toplam 2^3 ise hem yazı hem tura olabilen bütün sıralı dizilerin sayısıdır. Tam iki yazı dışında tam sıfır, bir veya üç yazı ihtimalleri de bulunur ve olasılıkların toplamı 1 olur. Sonucun 3/8 bulunması, üç atışın bağımsız ve para yüzlerinin eş olasılıklı olmasına dayanır.

Üç bağımsız hilesiz para atışında yazı sayısı

Yazı adedi	Uygun dizi sayısı	Olasılık
0	1	1/8
1	3	3/8
2	3	3/8
3	1	1/8
Toplam	8	1

24. Bir gruptan belirli bileşimde seçim yapma

Sekiz farklı gönüllünün beşi A biriminden, üçü B biriminden olsun. Eş şanslı biçimde üç kişilik bir ekip oluşturulurken sıra önemsizdir. Toplam olası ekip sayısı C(8,3)=56'dır. Ekipte tam iki A ve bir B çalışanının bulunması için beş A çalışanından ikisi C(5,2)=10, üç B çalışanından biri C(3,1)=3 farklı yolla seçilebilir. İki grup seçimi birleştirildiğinde $10 \cdot 3 = 30$ uygun ekip ve 30/56=15/28 olasılık elde edilir.

Aynı sonuca sıralı çekiş yöntemiyle de ulaşılabilir, ancak AAB, ABA ve BAA biçimlerinin her biri kendi olasılığıyla değerlendirilmelidir. Sırasız ekipleri 56 ile, sıralı çekişleri 8·7·6 ile saymak mümkündür; pay ve payda aynı tür çıktılarla kurulursa sonuç değişmez. Örneğin B biriminden hiç kimse seçilmeme olasılığı C(5,3)/C(8,3)=10/56=5/28'dir. Bu olay, “en az bir B” olayının tümleyeni olduğu için en az bir B bulunma olasılığı 1−5/28=23/28 olur.

Beş A ve üç B çalışanından üçlü ekip

İstenen bileşim	Uygun ekip	Olasılık
İki A, bir B	C(5,2)·C(3,1)=30	15/28
Üç A	C(5,3)=10	5/28
En az bir B	56−10=46	23/28
Bütün olası ekipler	C(8,3)=56	1

25. Deneysel olasılık ve göreli sıklık

Teorik olasılık bir modelin koşullarından çıkarılır; deneysel olasılık ise belirli sayıda gözlemde olayın görülme payıdır. Varsayımsal olarak bir düzenek 80 kez çalıştırıldığında seçilen sonucun 28 kez gözlendiği kaydedilsin. Gözlenen göreli sıklık 28/80=0,35, yani %35'tir. Bu değer deneyin o 80 tekrarına aittir; tek başına gelecekteki her denemede olayın kesin %35 olacağını göstermez.

Deneme sayısı arttıkça birçok uygun rastgele modelde gözlenen oran teorik olasılığa yaklaşma eğilimi gösterir. Bu, her yeni gözlemle oranın mutlaka daha yakın olacağı veya kısa bir dizide dengenin zorunlu olarak kurulacağı anlamına gelmez. Örneğin hilesiz bir para beş kez üst üste yazı geldikten sonra sonraki atışta tura gelmek zorunda değildir. İlişkili veya sistematik yanlılık içeren ölçümlerde salt tekrar sayısını artırmak hatalı varsayımı düzeltmez. Bu bölümdeki 80 denemelik değer yalnız özgün, temsili veri olarak kullanılmıştır.

Deneysel göreli sıklık = olayın gözlenme sayısı / toplam deneme sayısı

Anlamı: Sonlu gözlemde olayın gerçekleşme payı.

Koşullar: Toplam deneme sayısı pozitif tam sayıdır; aynı olay tanımı bütün denemelerde korunur. Deneysel oran teorik olasılığa otomatik eşit değildir.

26. Eş olasılıklı olmayan sonuçlarda ağırlık ve modelleme

Dört farklı renge ayrılmış bir çarkın renk dilimleri eş büyüklükte değilse dört renk sonucunu eş şanslı kabul etmek yanlıştır. Çarkın alanının ya da açı ölçüsünün yarısı kırmızı, dörtte biri mavi, sekizde biri yeşil ve sekizde biri sarı olsun; düzgün ve konuma göre tarafsız bir çevirme modelinde bu oranlar sırasıyla 1/2, 1/4, 1/8 ve 1/8 olasılıkları verir. Renk sayısı dört olduğu hâlde kırmızının olasılığı 1/4 değil 1/2'dir.

Bu modelin denetimi olasılıkların toplamının 1 olmasıdır: 1/2+1/4+1/8+1/8=1. Mavi veya yeşil gelme olasılığı 1/4+1/8=3/8'dir; renkler birbirini dışladığından bu iki olasılık toplanabilir. Eğer çarkın fiziksel yapısı eş yüzey alanlarını eş olasılığa dönüştürmüyorsa yalnız geometrik oranla gerçek olasılık garantisi verilemez; kullanılan varsayım açıkça belirtilmelidir.

Düzgün döndüğü varsayılan farklı büyüklükte renk dilimleri

Renk	Çember payı	Model olasılığı
Kırmızı	1/2	1/2
Mavi	1/4	1/4
Yeşil	1/8	1/8
Sarı	1/8	1/8
Toplam	1	1

27. Olasılık sonuçlarını yüzde ve anlamlı sınırlarla yorumlama

Olasılıklar 0 ile 1 arasında kesir, ondalık sayı veya yüzde olarak yazılabilir. Örneğin 3/8 = 0,375 = %37,5'tir. Ancak yüzdeye çevirme olayın tanımını değiştirmez. “Olma olasılığı %37,5” ifadesi, bir tek denemenin %37,5'inin gerçekleşeceği anlamına gelmez; aynı model altında olası sonuç ağırlığını ifade eder. İstatistiksel gözlemden gelen göreli sıklık ise belirli örneklem veya deneme serisiyle sınırlıdır.

Bir olayın olasılığı 1'den büyük ya da 0'dan küçük çıkarsa hesap mutlaka hatalıdır. Birden fazla olayın olasılıkları toplamı 1'i aşabilir; bu, olayların örtüşmesinden kaynaklanıyorsa tek başına hata değildir. Ancak aynı deneye ait birbirini dışlayan ve birlikte bütün örnek uzayı kaplayan olayların toplam olasılığı tam 1 olmalıdır. Bu kontrol olasılık hesabının son adımında en az doğrudan aritmetik kadar önemlidir.

28. Sayma ve olasılıkta örnek uzayın güvenilirliğini denetleme

İyi kurulmuş bir çözümde önce sonuç birimi tanımlanır: sıralı ikili mi, sırasız grup mu, fiziksel nesne mi, yoksa yalnız renk gibi bir özellik mi? Sonra tekrar ve sıralama kuralları yazılır; kısıtlar varsa her seçim aşamasında uygulanır. Ardından olayın hangi çıktılardan oluştuğu belirlenir. Son olarak eş olasılıklılık veya koşullu olasılık varsayımları gerekçelendirilir. Bir olay en az bir veya hiçbiri koşuluyla anlatılıyorsa tümleyen hesabı da ayrı bir denetim sağlayabilir.

Örneğin geri koymadan kart çekme modelinde payda her çekişte değişirken, geri koymalı modelde sabit kalır. Üç kişilik ekip seçiminde sıra önemsizdir; üç ayrı görevde görev ataması yapılırsa önemlidir. İki sayı küpünün toplamları eşit olasılıklı olmasa da iki küpün sıralı yüz çiftleri eşit olasılıklıdır. Bu temel farklar korunursa sayma, deney ve olasılık hesapları aynı matematiksel model üzerinde tutarlı biçimde kurulabilir. Bir sonraki konuda geometrik şekiller inceleneceğinden burada olasılıkla ilgili geometrik uygulamalar genişletilmemiştir.

> **Hesap ve model kontrolü** Olasılık formülüne geçmeden önce örnek uzayı tanımla, uygun ve bütün sonuçları aynı türde say, sonuçların eş olasılıklı olup olmadığını gerekçelendir, sıra ve geri koyma koşullarını koru. Sonuç 0 ile 1 arasında kalmalı; birbirini dışlayan ve bütün örnek uzayı kapsayan olayların olasılık toplamı 1 olmalıdır.

KONU 8.4

ÜÇGEN, DÖRTGEN VE ÇEMBERİN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Geometride bir şekli tanımak, yalnız çizimde nasıl göründüğünü söylemek değil; nokta, doğru parçası, açı, kenar ve köşegenler arasındaki zorunlu ilişkileri belirlemektir. Çizimler yaklaşık olabilir, bazı uzunluklar bilinmeyebilir ve bir şekil döndürülmüş ya da eğik gösterilmiş olabilir. Buna karşılık matematiksel tanım, çizimin görünüşünden bağımsızdır. Üçgenler üç doğru parçasının uç uca birleşmesiyle oluşur; dörtgenler dört kenarlı kapalı şekillerdir; çember ise bir merkezden eşit uzaklıktaki düzlem noktalarının kümesidir. Bu bölüm, bu şekillerin yapısını ve açı-kenar ilişkilerini öğretir. Çevre, alan, yüzey ve hacim hesaplarının düzenli anlatımı GY-08.05'e, koordinat düzlemindeki konum ve şekil değerlendirmeleri GY-08.06'ya bırakılmıştır.

1. Geometrinin ortak dili: nokta, doğru, ışın ve doğru parçası

Noktanın konumu vardır; uzunluğu, genişliği ve alanı yoktur. Bir doğru iki yönde sınırsız uzanır. Işın bir başlangıç noktasından bir yönde uzarken doğru parçası iki uç noktası arasında sınırlıdır. A ve B farklı noktalar olmak üzere AB doğru parçasının uzunluğu |AB| ile ifade edilir; uzunluk negatif olamaz. İki doğru parçası birbirine eşit uzunlukta olsa bile düzlemde farklı konumlarda bulunabilir. Bir açı, ortak başlangıçlı iki ışının oluşturduğu açıklıktır; ölçüsü burada derece (°) birimiyle yazılır.

İki doğru kesişiyorsa karşılıklı (ters) açıları eşittir. Kesişen iki doğrunun oluşturduğu yan yana açılar bütünlerdir; ölçüleri toplamı 180° olur. Bir açıyı iki eş parçaya ayıran ışın açıortaydır. Bir doğru diğerine dikse aralarındaki açı 90°'dir; iki doğru birbirine paralelse aynı düzlemde kesişmez. Paralel doğruları kesen üçüncü doğrunun oluşturduğu yöndeş ve iç ters açıların eşitliği, üçgenin açı toplamını anlamanın temelidir.

Geometrik terimlerin birbirinden ayrılması

Terim	Ayırt edici özellik	Gösterim veya örnek
Doğru	Her iki yönde sınırsız	A ve B'den geçen doğru
Işın	Bir noktadan tek yönde sınırsız	A'dan B yönüne ışın
Doğru parçası	İki uç noktayla sınırlı	AB parçasının uzunluğu 7 cm
Açı	Ortak uçlu iki ışının açıklığı	65°
Dik doğrular	90° açıyla kesişir	d □ e
Paralel doğrular	Aynı düzlemde kesişmez	d ∥ e

2. Açıların ölçüsü, komşuluk ve doğrusal açı

Ölçüsü 90°'den küçük pozitif açı dar, 90° olan açı dik, 90° ile 180° arasındaki açı geniş, 180° olan açı doğru açıdır. Tam açının ölçüsü 360°'dir. Tümler açıların ölçüleri toplamı 90°, bütünler açıların ölçüleri toplamı 180°'dir; bu tanımlar açıların fiziksel olarak yan yana çizilmesini gerektirmez. Komşu iki açı ortak bir köşe ve bir ortak kenar paylaşır, iç bölgeleri örtüşmez. Doğru açıyı komşu iki açı bölüyorsa toplamları 180° olur.

Örneğin bir doğru üzerinde ortak kenarlı iki komşu açı 3x+10° ve 2x+20° olarak verilmiş olsun; x sayısal bir değişken olup açıların derece cinsinden ölçüleri pozitif olmalıdır. 3x+10+2x+20=180 eşitliğinden 5x=150, dolayısıyla x=30 bulunur. Açılar 100° ve 80°'dir. Bağımsız kontrol, 100+80=180 ve başlangıç ifadelerinin x=30 için gerçekten bu ölçüleri vermesidir. Başka bir konumdaki iki açının toplamının 180° olduğunun söylenmesi ise tek başına komşu olduklarını kanıtlamaz.

Tümler açılar: α+β=90°; bütünler açılar: α+β=180°

Anlamı: İki açının derece ölçüleri belirli bir toplam oluşturur.

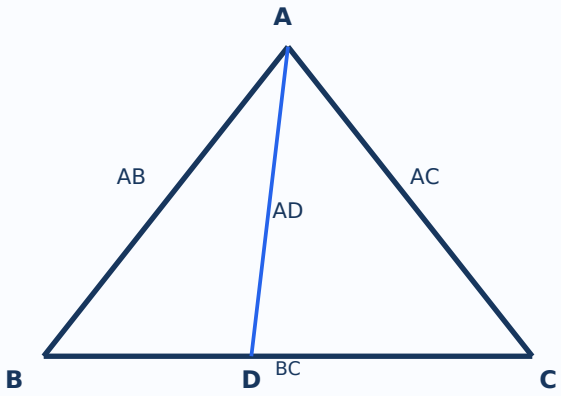
Koşullar: α, β ilgili açıların ölçüleridir; geometrik açı modelinde negatif açı ölçüsü kullanılmaz. Yan yana olma ayrı bir özelliktir.

3. Üçgenin temel elemanları ve adlandırılması

A, B ve C doğrusal olmayan üç farklı nokta olsun. AB, BC ve CA doğru parçalarının oluşturduğu kapalı şekil ABC üçgenidir. A, B ve C köşeler; AB, BC ve CA kenarlardır. A köşesinin karşısındaki kenar BC, B köşesinin karşısındaki kenar AC, C köşesinin karşısındaki kenar AB'dir. Bir kenarın karşısındaki açıya karşı açı denmesi, açılarla kenar uzunluklarının ilişkilendirilmesini kolaylaştırır. İsimdeki harf sırası değişse de aynı üç noktadan oluşan üçgen anlatılır; ancak belirli bir açının isimlendirilmesinde orta harf köşeyi gösterir: ∠ABC, B köşesindeki açıdır.

Üçgenin iç bölgesi, sınırını oluşturan üç kenarın çevrelediği bölgedir. Kenarların uzunlukları uygun birimle, açı ölçüleri dereceyle ifade edilir. Üçgenin üç köşesi tek bir doğru üzerinde olamaz; böyle olsaydı iç bölge oluşmazdı. Bu nedenle üçgenin kurulması için yalnız üç uzunluk yazılmış olması değil, bu uzunlukların kapanabilen bir üçgen vermesi gerekir.

Üçgenin kenar, açı ve yükseklik gösterimi



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

4. Üçgende iç açıların toplamı ve geometrik gerekçesi

Öklid düzleminde her üçgenin üç iç açısının ölçüleri toplamı 180°'dir. Bunun gerekçesi bir köşeden karşı kenara paralel bir doğru geçirildiğinde, diğer iki köşedeki açıların bu paralel doğru üzerinde iç ters açılar olarak taşınabilmesidir. Böylece üç açı bir doğru açı oluşturur. Bu sonuç yalnız ikizkenar ya da dik üçgenlerde değil, düzlemsel bütün gerçek üçgenlerde geçerlidir.

A ve B köşe açıları sırasıyla 48° ve 67° olan bir üçgende C açısı 180−48−67=65° bulunur. İkinci kontrol 48+67+65=180° eşitliğidir. Başka bir öğretici örnekte açılar x°, (x+20)° ve (2x−20)° olsun. Toplamdan 4x=180, x=45 çıkar; açılar 45°, 65°, 70° olur. Bunların üçü de pozitif, her biri 180°'den küçük ve toplamları 180°'dir; bu iki koşul sayısal sonucun geçerli bir üçgene uygun olduğunu doğrular.

$$m(\angle A)+m(\angle B)+m(\angle C)=180^\circ$$

Anlamı: Düzlemsel ABC üçgeninin üç iç açısının ölçüleri toplamı bir doğru açıdır.

Koşullar: A, B, C doğrusal olmayan köşelerdir; açılar gerçek ve pozitif olmalıdır. Küresel yüzey gibi düzlem dışı geometriler bu kapsamda değildir.

İç açı toplamına dayalı örnek üçgenler

A açısı	B açısı	C açısı	Kontrol
48°	67°	65°	180°
90°	35°	55°	180°
45°	65°	70°	180°
60°	60°	60°	180°

5. Üçgende dış açı ve komşu olmayan iki iç açı

Bir üçgenin bir kenarı köşenin ötesine uzatıldığında uzatılan kenar ile komşu kenarın oluşturduğu, iç açıya komşu bütünler açı dış açıdır. Seçilen dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan diğer iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir. Bunun nedeni dış açının, komşu iç açıyla birlikte 180° olması ve üç iç açının da 180°'yi tamamlamasıdır. Her köşeden aynı yönde birer dış açı alındığında dış açılar toplamı 360° olur.

Örneğin ABC üçgeninde BC kenarı C'den D yönüne uzatılsın. B açısı 43°, A açısı 72° ise C'deki BCD dış açısı 43+72=115°'dir. İç açı C=180−115=65° olur; 72+43+65=180° bağımsız denetimdir. Bu dış açı, C köşesindeki iç açıyla aynı değildir. Ayrıca bir köşedeki iki farklı uzatma yönünün açılarının aynı dış açı gibi üst üste sayılmaması gerekir.

$$\text{C'de seçilen dış açı} = \text{A iç açısı} + \text{B iç açısı} = 180° - \text{C iç açısı}$$

Anlamı: Bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamıdır.

Koşullar: BC kenarı C'den uzatılmış; dış açı iç C açısına komşu bütünler açıdır.

6. Kenarlarına göre üçgenler: çeşitkenar, ikizkenar, eşkenar

Üç kenarı farklı uzunlukta olan üçgene çeşitkenar denir. İki kenarı aynı uzunlukta olan üçgen ikizkenardır; eşit kenarların karşılarındaki taban açıları da eşittir. Üç kenarı aynı uzunlukta olan üçgen eşkenardır; üç açısı da 60°'dir. Matematikte eşkenar üçgen, en az iki kenarı eşit olduğu için ikizkenar üçgenin özel durumu olarak da değerlendirilebilir; öğretimde bazen türler birbirinden ayrı başlıklarda sunulur. Tanım kullanılırken 'tam olarak iki eşit kenar' ile 'en az iki eşit kenar' arasındaki fark açık olmalıdır.

AB=AC=13 cm ve BC=10 cm olan bir ikizkenar üçgende B ve C açıları eşittir; ancak yalnız kenar uzunluklarına bakılarak bu açının derecesi temel aritmetik işlemlerle doğrudan belirlenemez. Buna karşılık tepe açısının 44° olduğu bir ikizkenar üçgende iki taban açısının toplamı 136° ve her biri 68°'dir. Kontrol: 44+68+68=180°. Eşkenar üçgende açılar eşit olduğundan üç eşit pozitif açının toplamı 180°'yi paylaşır; her biri 60° olur.

Kenar eşitliğine göre üçgen türleri

Tür	Kenar bilgisi	Zorunlu açı bilgisi
Çeşitkenar	Üç kenar farklı	Üç karşı açı farklı
İkizkenar	En az iki kenar eşit	Eşit kenarların karşı açıları eşit
Eşkenar	Üç kenar eşit	Bütün iç açılar 60°

7. Açılarına göre üçgenler ve dik üçgen

Üç açısı da 90°'den küçük olan üçgen dar açılı; bir açısı 90° olan üçgen dik açılı; bir açısı 90°'den büyük olan üçgen geniş açılıdır. Bir üçgende iki dik açı veya iki geniş açı bulunamaz; çünkü iç açıların toplamı 180° olmak zorundadır. Dik üçgende dik açıyı oluşturan iki kenar dik kenar, dik açının karşısındaki en uzun kenar hipotenüstür. Dik açı dışındaki iki açı tümlerdir. Dik üçgenin kenar ve açı türleri birbirinden bağımsız sınıflandırmalardır; örneğin dik ikizkenar üçgen de olabilir.

Dik açılı bir üçgende dar açılardan biri 38° ise diğeri 52°'dir. 38+52=90° ve dik açı eklendiğinde toplam 180°'dir. Dik ikizkenar üçgende iki dar açı eşit olduğundan her biri 45°'dir. Hipotenüsün dik kenarlardan uzun olması, karşısındaki açının en büyük (90°) açı olmasıyla da uyumludur.

Üçgenin açı türleri

Sınıf	Belirleyici koşul	Örnek açı üçlüsü
Dar açılı	Üç açı da 90°'den küçük	55°, 60°, 65°
Dik açılı	Bir açı 90°	90°, 35°, 55°
Geniş açılı	Bir açı 90°'den büyük	105°, 30°, 45°

8. Üçgen eşitsizliği: üç uzunluk ne zaman bir üçgen kurar?

Üç pozitif uzunluğun bir üçgen oluşturabilmesi için her kenarın uzunluğu diğer ikisinin toplamından kesin küçük, farklarının mutlak değerinden kesin büyük olmalıdır. Bu sıkı eşitsizlikler üç doğru parçasının uç uca bağlandığında doğru üzerinde kapanmasını, yani dejenere (düzleşmiş) bir görünüm oluşmasını dışlar. İki kenarın toplamına eşit üçüncü uzunluk gerçek bir üçgen kurmaz.

Kenarlar 7 cm, 10 cm ve x cm olsun. Üçüncü kenarın $3<x<17$ koşulunu sağlaması gerekir. x tam sayı ve santimetre biriminde ise 4,5,...,16 olmak üzere 13 değer bulunur. Bu sonuç $10-7=3$ ve $10+7=17$ sınırlarına dayanır. $x=3$ durumunda $7+3=10$, $x=17$ durumunda $7+10=17$ olur; her iki eşitlik de geçerli üçgen oluşturmaz. $x=12$ seçildiğinde $7+10>12$, $7+12>10$ ve $10+12>7$ olduğundan üçgen mümkündür. Sınır kontrolü ile üç ayrı toplamın kontrolü aynı sonucu verir.

$$|a-b|<c<a+b$$

Anlamı: Pozitif a ve b uzunlukları verildiğinde üçüncü kenar c'nin oluşturabileceği açık aralık.

Koşullar: $a>0$, $b>0$, $c>0$; üçgenin üç köşesi doğrusal olmamalıdır. Uç değerlere eşitlik izin vermez.

Üç uzunluğun üçgen oluşturma denetimi

Kenarlar (cm)	En büyük kenar ve diğerlerinin toplamı	Üçgen oluşur mu?
5, 8, 10	$10 < 5+8=13$	Evet
6, 9, 15	$15 = 6+9$	Hayır
4, 6, 12	$12 > 4+6$	Hayır
7, 10, 12	$12 < 7+10=17$	Evet

9. Üçgende büyük açı ile büyük kenar ilişkisi

Bir üçgende daha büyük açı, daha uzun kenarın karşısındadır; eşit açılar eşit kenarların karşısındadır. Tersi de geçerlidir: Daha uzun kenarın karşısındaki açı daha büyüktür. Bu ilişki, çizimin büyüklüğünden bağımsız bir sıralama sağlar. Örneğin açı ölçüleri $A=80°$, $B=60°$, $C=40°$ olan bir üçgende karşılarındaki kenarlar $BC>AC>AB$ sırasındadır. Üç açının $180°$ toplamı verdiği kontrol edilirse sıralamanın geçerli bir üçgenin açıları için kurulduğu anlaşılır.

Bir üçgenin en uzun kenarı her zaman en büyük açının karşısındadır. Ancak yalnız açıları bilmek bütün kenarların kesin uzunluklarını vermez; aynı açılara sahip farklı büyüklükte üçgenler olabilir. Benzer şekilde üçgen eşitsizliği bir üçgenin mümkünlüğünü belirler ama tek başına açıların kesin değerlerini belirlemez. Bu iki farklı kullanım birbirine karıştırılmamalıdır.

10. Dik üçgende Pisagor bağıntısı ve tersinin anlamı

Dik üçgende dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüs uzunluğunun karesidir. a ve b pozitif dik kenar uzunlukları, c pozitif hipotenüs uzunluğu olsun. $a^2+b^2=c^2$ eşitliği, seçilen birim santimetre ise karelerin biriminin santimetrekare olmasıyla tutarlıdır; sonuçta karekök alınarak uzunluk yeniden santimetreyle ifade edilir. Bağıntı yalnız dik üçgende geçerlidir; herhangi bir üçgene uygulanamaz.

Dik kenarları 9 cm ve 12 cm olan üçgende $c^2=81+144=225$, c=15 cm'dir. Negatif karekök uzunluk olamaz. Bağımsız kontrol $9^2+12^2=225=15^2$ ve 9+12>15 üçgen eşitsizliğidir. Ters yönde, uzunlukları 8, 15, 17 cm olan gerçek bir üçgende $8^2+15^2=64+225=289=17^2$ olduğundan 17 cm karşısındaki açı diktir. Pisagor teoreminin tersi, önce üç kenarın gerçekten üçgen oluşturduğu varsayımı altında kullanılır.

$$a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow \text{c kenarının karşısındaki açı } 90^\circ \text{ (gerçek bir üçgende)}$$

Anlamı: Dik üçgende iki dik kenarın kareleri toplamı hipotenüsün karesidir; üçgenin kenarları bu eşitliği sağlıyorsa en büyük kenarın karşısı diktir.

Koşullar: a,b,c>0; c en uzun kenardır ve uzunluklar üçgen oluşturur. Uzunluk $c=\sqrt{(a^2+b^2)}$ pozitif kareköküdür.

Dik üçgende iki yönlü kenar denetimi

Kenarlar	Kareler eşitliği	Sonuç
9, 12, 15	81+144=225	Dik üçgen
8, 15, 17	64+225=289	Dik üçgen
6, 8, 11	36+64=100≠121	Dik üçgen değil
5, 12, 13	25+144=169	Dik üçgen

11. Üçgende açıortay, kenarortay ve yükseklik

Üçgende bir iç açıyı iki eş açıya bölen doğru parçası iç açıortaydır; köşeden karşı kenara ulaşır. Bir köşeyi karşı kenarın orta noktasıyla birleştiren doğru parçası kenarortaydır; onun tanımında açıların eşit olması gerekmez. Bir köşeden karşı kenarın doğrultusuna dik çizilen doğru parçası ise yüksekliktir. Geniş açılı bir üçgende bazı yükseklikler karşı kenarın kendisine değil uzantısına iner. Bu üç yardımcı eleman ancak özel koşullarda birbiriyle çakışır.

Örneğin ABC üçgeninde D, BC kenarının orta noktasıysa BD=DC olur; AD kenarortaydır. BC=14 cm verilirse BD=DC=7 cm'dir. AD'nin aynı zamanda açıortay olduğu bilgisi ayrıca verilmedikçe ∠BAD ve ∠DAC eşit kabul edilemez. İkizkenar üçgende eşit kenarların birleştiği tepe köşesinden tabana inen doğru parçası ise kenarortay, açıortay ve yükseklik görevlerini birlikte yapar.

Üçgende yardımcı elemanlar

Eleman	Tanımı belirleyen koşul	Sık karşılaşılan yanlış yorum
Açıortay	Köşe açısını iki eş açıya ayırır	Karşı kenarı her zaman iki eş parçaya ayırmaz
Kenarortay	Karşı kenarın orta noktasına gider	Köşe açısını her zaman ortalamaz
Yükseklik	Karşı kenarın doğrusuna diktir	Her zaman üçgenin içinde değildir
Kenar orta dikme	Bir kenarın orta noktasından dik geçer	Her zaman karşı köşeden geçmez

12. Üçgende yardımcı elemanların oran ve kesişim özellikleri

İç açıortay teoremi, açıortayın karşı kenarı komşu kenarların uzunlukları oranında böldüğünü söyler. ABC üçgeninde A köşesinin açıortayı BC'yi D'de kesiyorsa BD/DC=AB/AC olur. Örneğin AB=8 cm, AC=12 cm ve BC=15 cm ise BD:DC=2:3 olur; toplam beş pay 15 cm olduğundan BD=6 cm, DC=9 cm'dir. İkinci denetim BD+DC=15 ve 6/9=8/12=2/3 eşitlikleridir. İkizkenar olmayan üçgende açıortay genel olarak kenarortay değildir.

Üç kenarortay tek noktada (ağırlık merkezi) kesişir. A köşesinden BC'nin orta noktası D'ye çizilen kenarortayın ağırlık merkezi G ile kesişiminde AG:GD=2:1 olur. AD=18 cm ise AG=12 cm ve GD=6 cm bulunur; toplam 18 cm'yi verir. İç açıortayların ortak noktası içteğet çemberinin merkezi; kenar orta dikmelerin ortak noktası çevrel çemberin merkezi; yükseklik doğrularının ortak noktası diklik merkezidir. Bu merkezler genel üçgende farklı noktalardır.

> BD/DC=AB/AC (AD iç açıortay); AG/GD=2/1 (AD kenarortay, G ağırlık merkezi)
>
> **Anlamı:** Açıortay karşı kenarı komşu kenar oranıyla; ağırlık merkezi kenarortayı köşeden itibaren ikiye bir oranıyla böler.
> **Koşullar:** ABC gerçek üçgen, D BC üzerinde uygun kesişim noktasıdır; bütün oranların paydaları pozitif uzunluklardır.

13. Üçgenlerde eşlik ile benzerliğin farkı

Eş üçgenler, dönme, öteleme veya yansıma ile tam çakışabilecek şekillerdir; karşılıklı kenarları ve açıları eşittir. Benzer üçgenlerde ise karşılıklı açı ölçüleri eşit, karşılıklı kenar uzunlukları aynı pozitif orandadır. Her eş üçgen çifti benzerdir; fakat her benzer üçgen çifti eş değildir. Eşliği göstermede üç karşılıklı kenarın eşliği (KKK), iki kenar ve aralarındaki açının eşliği (KAK), bir kenar ve uygun iki açının eşliği (AKA veya AAK) gibi yeterli koşullar kullanılır. Benzerlik için iki karşılıklı açının eşliği (AA) yeterlidir; yalnız açı eşliği eşlik için yeterli değildir.

Kenarları 3,4,5 cm olan bir üçgenle kenarları 6,8,10 cm olan üçgen aynı kenar oranına sahiptir: 6/3=8/4=10/5=2. İki üçgen de 3-4-5 ve 6-8-10 dik üçgenleridir, dolayısıyla benzerdir; fakat kenarları aynı olmadığından eş değildir. Çizimde iki kenarın eşit görünmesi veya tek bir açının eşit olması genel olarak üçgen eşliğini kanıtlamaz. Özellikle iki kenar ile bunlardan birinin karşısındaki açının verilmesi, genel durumda tek bir üçgeni belirlemeyebilir.

Üçgen eşliği ve benzerliği

Karşılaştırma	Eşlik	Benzerlik
Karşılıklı açılar	Eşit	Eşit
Karşılıklı kenarlar	Eşit uzunlukta	Sabit pozitif oranlı
Ölçek katsayısı	1	Pozitif herhangi bir değer
Yalnız üç açı eşitliği	Eşlik için yeterli değil	Benzerlik için yeterli

14. Dörtgenin tanımı, köşegenleri ve iç açı toplamı

Dörtgen dört doğru parçasının uç uca birleştiği basit kapalı çokgendir. Dört köşe, dört kenar, iki köşegen bulunur. ABCD dörtgeninde köşegenler AC ve BD'dir; köşegenler komşu olmayan iki köşeyi birleştirir. Dışbükey dörtgende iki köşegen de iç bölgede bulunur. İçbükey dörtgende bir iç açı 180°'yi aşabilir ve en az bir köşegenin bir bölümü şeklin dışında kalabilir. Kesişmeyen kenarlarla oluşan basit dörtgenin iç açılar toplamı her iki durumda da 360°'dir.

Dışbükey dörtgenin bir köşesinden karşı köşeye çizilen köşegen şekli iki üçgene ayırır; 180+180=360° sonucu buradan gelir. Örneğin üç iç açısı 74°, 96°, 105° olan bir dışbükey dörtgende dördüncü iç açı 360−(74+96+105)=85°'dir. Kontrol: 74+96+105+85=360°. Dışbükeylik koşulu bu açıların her birinin 180°'den küçük olmasını gerektirir; verilen sayılarla bu koşul sağlanır.

> Dörtgen iç açıları toplamı = (4−2)·180° = 360°; köşegen sayısı = 4·(4−3)/2 = 2
>
> **Anlamı:** Bir basit dörtgen iki üçgenin iç açı toplamını taşır ve iki köşegeni vardır.
>
> **Koşullar:** Kenarlar yalnız komşu uç noktalarda birleşen basit dörtgendir; iç açılar iç bölgede ölçülür.

15. Paralelkenarın temel özellikleri

Paralelkenar, karşılıklı iki kenar çiftinin de paralel olduğu dörtgendir. Karşılıklı kenarlar eş uzunluktadır; karşılıklı iç açılar eşittir, komşu iç açıların toplamı 180°'dir. Köşegenler birbirini ortalar; fakat her paralelkenarın köşegenleri birbirine dik veya eşit uzunlukta olmak zorunda değildir. Bir dörtgende karşılıklı kenarların hem paralel hem eşit olması belirgin bir paralelkenar örüntüsüdür.

ABCD paralelkenarında A açısı 68° olsun. C açısı 68°, B ve D açıları 180−68=112° olur. Bağımsız toplam 68+112+68+112=360°'dir. AC köşegeni ile BD köşegeni O'da kesişiyor ve AO=7 cm, BO=5 cm ise OC=7 cm, OD=5 cm olur; AC=14 cm ve BD=10 cm'dir. Köşegenlerin farklı uzunlukta oluşu paralelkenar tanımına aykırı değildir.

Paralelkenarda zorunlu ve zorunlu olmayan ilişkiler

İlişki	Genel paralelkenarda durum
Karşılıklı kenarlar paralel	Zorunlu
Karşılıklı kenar uzunlukları eşit	Zorunlu
Karşılıklı açılar eşit	Zorunlu
Köşegenler birbirini ortalar	Zorunlu
Köşegenler eşit uzunlukta	Zorunlu değil
Köşegenler dik kesişir	Zorunlu değil

16. Dikdörtgenin kenar, açı ve köşegen özellikleri

Dikdörtgen dört iç açısı 90° olan paralelkenardır. Karşılıklı kenarlar paralel ve eşittir. Köşegenleri birbirine eşit uzunluktadır ve birbirini ortalar. Bununla birlikte köşegenlerin dik kesişmesi, kare olmayan genel dikdörtgende geçerli değildir. Bir dikdörtgenin kısa veya uzun kenarının yatay çizilmesi tanımın parçası değildir; şekil döndürülse de dört dik açısı ve diğer özellikleri korunur.

Kenarları 6 cm ve 8 cm olan bir dikdörtgende her köşegen, dik kenarları 6 ve 8 cm olan bir dik üçgenin hipotenüsüdür. Bu nedenle köşegen uzunluğu $\sqrt{(6^2+8^2)}=\sqrt{100}=10$ cm'dir. İki köşegen eşit olduğundan ikisi de 10 cm, kesişim noktasındaki yarım köşegen uzunlukları 5 cm'dir. Ters kontrol $10^2=6^2+8^2=100$ eşitliğidir. Her paralelkenarın aynı biçimde dikdörtgen olduğu söylenemez; dört açının 90° olması ek kısıttır.

17. Eşkenar dörtgenin ayırt edici yapısı

Eşkenar dörtgen, dört kenarı da eşit uzunlukta olan paralelkenardır. Karşılıklı açıları eşittir; köşegenleri birbirini ortalar, dik kesişir ve köşe açılarını iki eş parçaya böler. Buna karşılık bir eşkenar dörtgende köşegenlerin birbirine eşit olması genel bir zorunluluk değildir. Eşkenar dörtgenin dik açılı olması hâlinde kare elde edilir.

Köşegen uzunlukları 12 cm ve 16 cm olan bir eşkenar dörtgende yarım köşegenler 6 cm ve 8 cm'dir. Köşegenler dik kesiştiğinden bir kenar $\sqrt{(6^2+8^2)}=10$ cm olur. Sonuç 6-8-10 dik üçgeniyle doğrulanır; her dört kenar da 10 cm'dir. Dört kenarın eşitliği veya köşegenlerin dikliği, yalnız çizimde görünen bir özellik değil şeklin tanımından çıkarılan sonuçtur. Köşegenlerin uzunluklarının eşit olmadığı bu örnek, eşkenar dörtgenin mutlaka kare olmadığını da gösterir.

18. Karenin iki özel dörtgenden devraldığı özellikler

Kare dört eş kenarı ve dört dik açısı olan dörtgendir. Bu nedenle hem dikdörtgen hem eşkenar dörtgen hem de paralelkenardır; bu şekillerin geçerli özelliklerini birlikte taşır. Köşegenleri eş uzunluktadır, birbirini ortalar, dik kesişir ve köşe açılarını ortalar. Her dikdörtgen kare olmadığı gibi her eşkenar dörtgen de kare değildir. Türler arasındaki içerme ilişkisi, çizimin alışılmış konumuna göre değil tanıma göre belirlenir.

Bir kenarı 5 cm olan karenin köşegeni, dik kenarları 5 cm olan dik üçgenin hipotenüsüdür: $d^2=5^2+5^2=50$, $d=5\sqrt{2}$ cm. İki köşegen de $5\sqrt{2}$ cm olduğundan yarım köşegenler $5\sqrt{2}/2$ cm olur. Bağımsız denetimde $2\cdot(5\sqrt{2}/2)^2=25$, böylece yarım köşegenlerden kurulan dik üçgenin hipotenüsü 5 cm olarak geri bulunur. Karekök gösterimi kesin uzunluktur; ondalık yaklaşık değer kullanmak zorunlu değildir.

Paralelkenar ailesinde köşegen özellikleri

Şekil	Köşegenler birbirini ortalar	Köşegenler eşit	Köşegenler dik
Genel paralelkenar	Evet	Zorunlu değil	Zorunlu değil
Dikdörtgen	Evet	Evet	Zorunlu değil
Eşkenar dörtgen	Evet	Zorunlu değil	Evet
Kare	Evet	Evet	Evet

19. Yamuk, ikizkenar yamuk ve tanım farklılığı

Yamuk, bazı öğretim kaynaklarında yalnız bir çift karşı kenarı paralel olan dörtgen olarak, daha kapsayıcı matematiksel tanımda ise en az bir çift karşı kenarı paralel olan dörtgen olarak adlandırılır. Hangi tanımın seçildiği özellikle “paralelkenar da yamuk mudur?” türü sınıflandırmalarda sonucu değiştirir. Bu kitapta yamuğun kendine özgü özellikleri anlatılırken paralel kenar çiftlerinden birinin taban olduğu, ikinci çiftin paralel olmasının zorunlu tutulmadığı genel düzen esas alınır; karşılıklı iki çiftin de paralel olduğu durumda şekil ayrıca paralelkenar olarak adlandırılır. Bir kaynağın 'yalnız bir çift' kuralı varsa paralelkenarı yamuk sınıfına katmamak gerekir.

Paralel iki tabanı kesen yan kenar, aynı taraftaki iç açıları bütünler yapar. Örneğin ABCD yamuğunda $AB\parallel CD$ iken AD yan kenarı üzerindeki A ve D iç açıları toplamı 180°'dir. A açısı 72° ise D açısı 108° olur. BC yan kenarı üzerinde B=64° verilirse C=116°'dir. Bütün dört açı $72+108+64+116=360°$ verir. İkizkenar yamukta paralel olmayan yan kenarlar eşit; aynı tabana komşu iki açı eşit ve köşegen uzunlukları eşittir. Genel yamukta bunların hiçbiri kendiliğinden zorunlu değildir.

Yamuk sınıflandırmasının kapsamı Bazı okul kaynaklarında yamuk yalnız bir karşı kenar çifti paralel olan dörtgen olarak tanımlanır; başka kaynaklarda en az bir çift paralel kenar yeterli sayılır. Bir şekli yamuk sınıfına yerleştirirken kullanılan tanımın hangisi olduğunu belirlemek gerekir.

20. Deltoid ve köşegenlerde özel dikkat

Deltoid, komşu kenarlardan bir çiftinin uzunlukları eşit, diğer komşu kenar çiftinin de kendi içinde eşit olduğu, genellikle iki farklı uzunluk içeren dörtgendir. Bu düzen, karşılıklı kenarların eşit olmasından farklıdır. Simetri ekseni olan köşegen öteki köşegeni dik keser ve ortalar; ancak genel deltoidde iki köşegen birbirini karşılıklı olarak ortalamaz. Bu ayrım, deltoidi paralelkenardan ayırır. Bazı tanımlarda dört kenarı eşit eşkenar dörtgen de deltoidin özel durumu kabul edilebilir; hangi kapsama gidildiği açık olmalıdır.

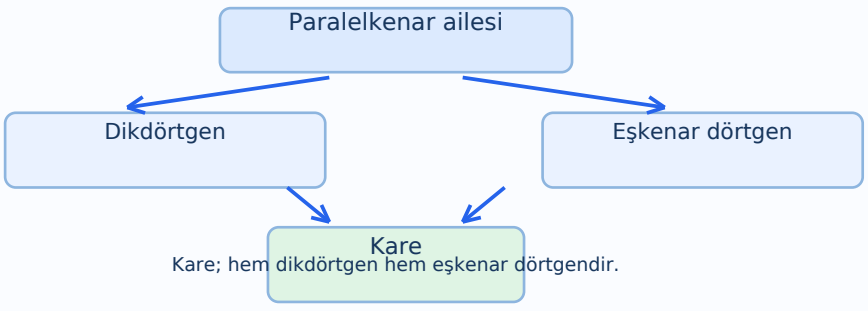
Örneğin ABCD deltoidinde AB=AD=9 cm ve BC=CD=6 cm olsun. Eşit uzunluklu kenarların birleştiği A ve C köşelerinden geçen AC köşegeni simetri eksenidir; BD köşegenini orta noktasında dik keser. BD=10 cm verilirse bu kesişim noktası O için BO=OD=5 cm elde edilir. Buna karşılık AO=OC olduğu varsayılamaz; iki farklı kenar uzunluğu buna zorunlu olarak yol açmaz. Açısal simetri ve uzunluk eşitliği ile iki köşegenin birbirini ortalaması birbirinden farklı iddialardır.

21. Özel dörtgenleri tanıma ve hatalı ters çıkarımlar

Bir şeklin köşegenlerinin birbirini ortalaması, paralelkenar olduğunu belirlemede kullanılabilir. Paralelkenarın köşegenleri ayrıca eşitse dikdörtgen; ayrıca dik kesişiyorsa eşkenar dörtgen; hem eşit hem dikse kare olur. Bu çıkarımlar basit, dışbükey ve dejenere olmayan dörtgenler için değerlendirilir. Genel bir dörtgende yalnız köşegenlerin eşit olması dikdörtgen sonucunu zorunlu kılmaz; örneğin ikizkenar yamukta da köşegenler eşittir. Aynı şekilde yalnız köşegenlerin dik kesişmesi tek başına eşkenar dörtgen olduğunu kanıtlamaz; bir deltoidde de bu özellik vardır.

Dört açının 90° olması dikdörtgen tanımını karşılar; dört kenarın eşit olması eşkenar dörtgeni tanımlar. Bu koşullar aynı dörtgende birlikte sağlanırsa kare elde edilir. Burada çıkarım yönü önemlidir: Bütün kareler dikdörtgendir, fakat bütün dikdörtgenler kare değildir. Tanımın gerekli ve yeterli koşulları, GY-07'de işlenen mantıksal çıkarım düşüncesiyle de uyumludur; yalnız görsel izlenim kanıt yerine geçmez.

Dörtgenlerin sınıflandırma ilişkisi



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

22. Çokgenlerin iç açı toplamına kısa bir genelleme

Üçgen ve dörtgen, çokgen ailesinin en temel üyeleridir. n≥3 olmak üzere dışbükey bir n-genin tek köşesinden çizilen uygun köşegenlerle n−2 üçgen elde edilir. Bu parçalama, iç açıların ölçüleri toplamının (n−2)·180° olmasını açıklar. Düzgün çokgende bütün kenarlar ve bütün iç açılar eşit olduğundan bir iç açının ölçüsü toplamın n'ye bölünmesiyle bulunur. Dört kenarlı düzgün çokgen karedir; bütün kenarların eşit olması tek başına bir çokgenin düzgün olduğunu göstermez, iç açıların eşitliği de gerekir.

Örneğin düzgün altıgenin iç açılarının toplamı (6−2)·180=720°, bir iç açısı 720/6=120°'dir. Birer dış açı seçildiğinde dış açılar toplamı 360°, düzgün altıgenin her dış açısı 360/6=60° olur. Ters kontrol 120+60=180° ve altı adet 60° dış açının 360° vermesidir. Bu bilgi çevre ve alan hesaplarına geçmeden şekil türlerini anlamak için yeterlidir.

> n-gen iç açı toplamı = (n−2)·180°; düzgün n-gen bir iç açı = [(n−2)·180°]/n
>
> **Anlamı:** Dışbükey çokgen üçgenlere ayrılarak açı toplamı bulunur; düzgün çokgende eşit paylaştırılır.
>
> **Koşullar:** n≥3 tam sayıdır, çokgen basit ve dışbükeydir; tek iç açıyı bulmak için düzgünlük gerekir.

23. Çember ile daire: sınır ve iç bölge arasındaki fark

Düzlemde sabit O noktasına uzaklığı tam r>0 olan noktaların kümesi, O merkezli r yarıçaplı çemberdir. Merkezi O'ya uzaklığı en fazla r olan bütün noktaların oluşturduğu dolu bölge ise dairedir. Dolayısıyla çember sınır eğrisidir; daire sınırla birlikte iç bölgeyi de içerir. 'Merkeze uzaklığı 4 cm' olan noktalar çember üzerinde, 'merkeze uzaklığı 4 cm veya daha az' olan noktalar daire içindedir. Çemberin merkezi çemberin bir noktası değildir; ancak dairenin içindedir.

Çember üzerindeki herhangi bir P noktası için |OP|=r olur. Örneğin r=7 cm iken |OP|=7 cm olan P sınırda, |OQ|=3 cm olan Q dairenin içinde ve |OR|=9 cm olan R dışında yer alır. Aynı merkez ve aynı yarıçap verilen iki çember tamamen çakışır; yalnız yarıçap eşitliği merkezler farklıysa çakışmayı sağlamaz. Çember ve dairedeki uzunluk ve alan formülleri GY-08.05 bölümünde ayrıca ele alınacaktır.

Merkezden uzaklığa göre noktanın yeri

O merkezine uzaklık d	Çembere göre konum	Daireye göre konum
0≤d<r	Çember üzerinde değil	İç bölgede
d=r	Çember üzerinde	Sınırda ve dairede
d>r	Çember dışında	Daire dışında

24. Yarıçap, çap, kiriş, kesen ve yay

Merkezi çember üzerindeki bir noktaya birleştiren doğru parçası yarıçap, merkezden geçip uçları çemberde bulunan doğru parçası çap, çemberdeki herhangi iki farklı noktayı birleştiren doğru parçası kiriştir. Her çap bir kiriştir; fakat her kiriş çap değildir. Çap en uzun kiriştir ve uzunluğu yarıçapın iki katıdır. Çemberi iki farklı noktada kesen doğruya kesen denir. Çember üzerindeki iki nokta arasındaki çember kısmı yaydır; iki farklı uç nokta çoğunlukla küçük ve büyük olmak üzere iki yay belirler.

Örneğin yarıçapı 9 cm olan çemberde çap 18 cm'dir. Merkezden geçmeyen kirişin uzunluğu 18 cm'den küçüktür; çapa eşit uzunluktaki bir kirişin merkezden geçmesi gerekir. İki uç noktası çemberde bulunan 12 cm'lik bir doğru parçası kiriş olabilir, ancak yalnız uzunluğunun 12 cm olması onun çap olduğunu göstermez.

Bir çember üzerindeki A ve B noktalarının oluşturduğu yayın seçimi belirtilmezse büyük yay mı küçük yay mı anlatıldığı belirsiz kalabilir.

$$d=2r;\ 0<\text{kiriş uzunluğu}\leq 2r$$

Anlamı: Çap yarıçapın iki katıdır ve herhangi bir kirişin uzunluğu çapı aşamaz.

Koşullar: $r>0$; d çap uzunluğudur. Kirişin uçları çember üzerinde farklı noktalardır.

25. Kirişin orta dikmesi ve merkezden uzaklığı

Çember merkezinden bir kirişe indirilen dikme kirişi iki eş parçaya ayırır. Ters yönde, bir kirişin orta dikme doğrusu çember merkezinden geçer. Bunun nedeni kirişi oluşturan iki uç noktanın merkeze eş uzaklıkta olmasıdır; merkez, bu iki noktaya eş uzaklıktaki noktaların oluşturduğu doğru üzerinde bulunur. Eş uzunluktaki kirişler merkezden eş uzaklıktadır; merkezden uzaklaştıkça kirişin uzunluğu azalır. Ancak bu karşılaştırma aynı yarıçaplı çemberde yapılmalıdır.

Yarıçapı 13 cm olan bir çemberde merkezden bir kirişe dik uzaklık 5 cm olsun. Dikme ayağı M, kiriş uçları A ve B ise OA=13 cm, OM=5 cm ve OMA dik üçgendir. $AM^2=13^2-5^2=169-25=144$ olduğundan AM=12 cm, AB=24 cm'dir. Bağımsız denetim: $5^2+12^2=13^2$, ayrıca 24 cm uzunluğundaki kiriş 26 cm çapı aşmaz. Kirişin orta noktasının çemberin içinde olması ile çember üzerinde olması aynı şey değildir.

$$(\text{kiriş uzunluğu}/2)^2 + h^2 = r^2$$

Anlamı: Merkezi kirişe bağlayan dikmenin oluşturduğu dik üçgende yarım kiriş, merkezin kirişe uzaklığı h ve yarıçap r ilişkilidir.

Koşullar: $0\leq h<r$; uçları farklı bir kiriş için kiriş uzunluğu pozitiftir. Formül Pisagor bağıntısına dayanır.

26. Merkez açı, yay ölçüsü ve çevre açı

Köşesi çemberin merkezinde olan açıya merkez açı denir; merkez açının derece ölçüsü gördüğü yayın derece ölçüsüne eşittir. Köşesi çember üzerinde, kenarları iki kiriş doğrultusunda olan açı ise çevre açıdır. Çevre açının ölçüsü, köşeyi içermeyen ve gördüğü yayın ölçüsünün yarısıdır. Aynı yayı gören çevre açılar eş ölçülüdür. Aynı uç noktaları kullanan fakat çemberin karşı taraflarında yer alan çevre açılar farklı yayları görebileceğinden bunların eşit olduğu gelişigüzel varsayılamaz.

O merkezli çemberde küçük AB yayını gören AOB merkez açısının ölçüsü 124° olsun. Bu küçük yayı gören, köşesi büyük AB yayı üzerinde olan ACB çevre açısı 62°'dir. İkinci kontrol merkez açı/çevre açı oranının 124/62=2 oluşudur. C noktası küçük AB yayında olsaydı ACB açısı diğer, 360−124=236° ölçülü büyük AB yayını görür ve 118° olurdu. İki çevre açının toplamı 62+118=180°'dir. Her örnekte görülen yayın doğru seçilmesi sonuca ulaşmanın asıl koşuludur.

$$\text{Merkez açının ölçüsü} = \text{gördüğü yayın ölçüsü};\ \text{çevre açının ölçüsü} = \frac{\text{gördüğü yayın ölçüsü}}{2}$$

Anlamı: Aynı yay için merkez açı çevre açının iki katıdır.

Koşullar: Açının kolları ve gördüğü yay doğru belirlenir; çevre açının tepe noktası gördüğü yayın üzerinde bulunmaz.

Merkez açı ve çevre açı örnekleri

Görülen yay ölçüsü	Merkez açı	Aynı yayı gören çevre açı
70°	70°	35°
124°	124°	62°
180°	180°	90°
160°	160°	80°

27. Çapı gören çevre açı ve çemberde dörtgen

Bir çapın uç noktaları A ile B ise bu uçları birleştiren ve üçüncü köşesi çemberin başka bir noktasında bulunan ACB üçgeninde C açısı 90°'dir. Çünkü C'nin gördüğü ve üzerinde bulunmadığı AB yarım çemberinin yay ölçüsü 180°, bunun yarısı 90°'dir. Bu sonuç Thales bağıntısı olarak da bilinir. Üçüncü nokta A veya B ile çakışmamalıdır; aksi durumda üçgen oluşmaz.

Dört köşesi aynı çember üzerinde bulunan dışbükey dörtgene çembersel dörtgen denir. Bu dörtgende karşılıklı iç açıların toplamı 180°'dir. Örneğin A=78° ise C=102°'dir. B=113° ise D=67°'dir. Toplam kontrolü 78+102+113+67=360°'dir. Her dörtgen çembersel olmak zorunda değildir; yalnız dörtgenin açı toplamının 360° olması onun köşelerinin aynı çemberde bulunduğunu göstermez. Dikdörtgen ve kare ise çembersel dörtgen örnekleridir.

Çemberin oluşturduğu özel açı ilişkileri

Düzen	Kesin ilişki	Koşul
Çapı gören çevre açı	90°	Köşe, çapın uçları dışındaki çember noktası
Aynı yayı gören çevre açılar	Eşit	Aynı yay ve geçerli köşe konumları
Çembersel dışbükey dörtgen	Karşı açılar toplamı 180°	Dört köşe tek çember üzerinde
Dörtgenin genel iç açıları	Toplam 360°	Çembersel olma zorunluluğu yok

28. Teğet doğru ve merkezle diklik bağıntısı

Çembere yalnız tek noktada değen doğru, o çembere teğettir; değme noktası T olsun. Merkez O ile T'yi birleştiren yarıçap teğet doğruya diktir. Çember dışındaki bir P noktasından aynı çembere çizilen iki teğet parçası PA ve PB eş uzunluktadır. Dış nokta ile merkez arasındaki uzaklık, yarıçap ve teğet parçası, dik üçgen oluşturur. P çember üzerinde ya da içerideyse iki farklı dış teğet parçası düzeni aynı şekilde kurulamaz.

Yarıçapı 5 cm olan O merkezli çemberde dış P noktasının merkeze uzaklığı 13 cm olsun. P'den T'ye çizilen teğette $OT \perp PT$ olduğundan $PT^2=OP^2-OT^2=169-25=144$, $PT=12$ cm'dir. İkinci kontrol $5^2+12^2=13^2$ bağıntısıdır. P'den çembere çizilebilen öbür teğet parçası da 12 cm olur. Ancak bir doğru çemberi iki noktada kesiyorsa adı teğet değil kesendir; bu iki durumun geometrik koşulları farklıdır.

$$OT \perp PT;\ PT^2=OP^2-r^2;\ PA=PB \text{ (P'den iki teğet)}$$

Anlamı: Teğet noktadaki yarıçapa diktir; dış noktadan çizilen teğet parçaları eşittir.

Koşullar: O merkez, r=OT>0; P çemberin dışındadır (OP>r); T, A ve B uygun teğet noktalarıdır.

29. Çemberde teğet-kiriş açısı ve yayla bağlantısı

Köşesi çember üzerindeki A noktasında bulunan, kollarından biri A'daki teğet doğru üzerinde ve diğeri AB kirişi üzerinde olan açıya teğet-kiriş açısı denir. Uygun yönde seçilen bu açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısıdır. Bu yön şartı önemlidir: Aynı teğet-kiriş düzeninde doğru açıyı tamamlayan öbür açı, diğer AB yayını görür. Dolayısıyla teğet-kiriş açısının ölçüsünü hesaplarken küçük mü büyük mü yayın seçildiği belirtilmelidir.

Örneğin küçük AB yayının ölçüsü 86° olsun. Bu yayı gören dar teğet-kiriş açısının ölçüsü 86/2=43°'dir. Öbür AB yayı 360−86=274°; geniş teğet-kiriş açısı 274/2=137° olur. 43+137=180° kontrolü, iki açının doğrusal bütünler olduğunu gösterir. Aynı 86°'lik yayı gören bir çevre açının ölçüsü de 43°'dir. Yay uzunluğu hesaplanmaz; burada karşılaştırılan nicelikler açısal ölçülerdir.

30. Şekil bilgisini denetleme, varsayım sınırları ve konu bütünlüğü

Geometrik çözümün başlangıcında hangi noktaların hangi kenar veya doğru üzerinde olduğu, nerelerin paralel ya da dik olduğu, eş uzunlukların gerçekten verilmiş bulunup bulunmadığı belirlenir. Şekil ölçekli değilse yalnız görünüşe bakarak kenar ve açı eşitliği ileri sürülmez. Açıların toplamı, üçgen eşitsizliği, köşegen ilişkileri ve çemberde açı-yay bağıntıları farklı türde bilgi verir; birinin sağlanması diğerlerini otomatik olarak kanıtlamaz. Sonuç bir uzunluksa negatif olamayacağı, bir açıysa modeldeki geometrik aralıkta bulunacağı ayrıca denetlenir.

Örneğin 6, 8 ve 11 cm uzunluklarıyla bir üçgen kurulabilir; çünkü 6+8>11'dir. Ancak $6^2+8^2=100$ iken $11^2=121$ olduğundan bu üçgen dik üçgen değildir. Tek tek kontrol, üçgen olma ile dik üçgen olmanın ayrı koşullarını gösterir. Benzer biçimde eş köşegenli bir dörtgen yalnız bu bilgiyle dikdörtgen sayılmaz; genel ikizkenar yamuk bu iddiaya karşı örnektir. Çemberde ise aynı AB uçlarını gören açıların eş olduğunu söylemeden önce gördükleri yayın ve köşelerin konumu denetlenir. Bu bölümün açı ve kenar özellikleri, bir sonraki GY-08.05'te ele alınacak çevre, alan ve hacim hesapları için şeklin doğru tanınmasını sağlayan temeldir.

> **Şekil ve koşul denetimi** Çizimde belirtilmeyen paralellik, diklik, eş kenar ve eş açı ilişkilerini varsayma. Üç uzunlukta önce üçgen eşitsizliğini, diklik için ayrıca Pisagor koşulunu denetle. Yamuk teriminin 'yalnız bir çift paralel' ile 'en az bir çift paralel' tanımlarının farklı kapsama yol açabileceğini göz önünde tut. Çember ve daire aynı küme değildir; çevre açının değeri gördüğü yaya bağlıdır.

KONU 8.5

ÇEVRE, ALAN VE HACİM HESAPLAMALARI

Geometrik bir şeklin çevresi, sınırını izleyerek ölçülen uzunluğu; alanı, düzlemde kapladığı bölgenin büyüklüğünü; hacmi ise üç boyutlu cismin kapladığı uzayı ifade eder. Aynı şekil hakkında bu üç ölçüden birine ulaşmak için kullanılan işlem diğerinin yerine geçmez. Bir dikdörtgenin etrafına çekilecek şeridin miktarı çevreyle, yüzeyinin kaplanacağı malzeme alanla, kutunun içine sığacak malzemenin miktarı hacimle ilgilidir. Geçmiş bölümde tanımlanan üçgen, dörtgen, çember ve dairenin yapısal özellikleri burada ölçülebilir niceliklere dönüştürülür. Bu anlatımda şekillerin geometrik koşulları metin içinde açıkça tanımlanır; bir çizimin görünüşünden ölçü tahmin edilmez.

1. Çevre, alan, yüzey alanı ve hacim arasındaki ayrım

Çevre uzunluğu, kapalı düzlemsel bir şeklin sınırının toplam uzunluğudur. Çokgende kenarlar toplanır; çemberde ise eğri sınırın uzunluğu hesaplanır. Alan iki boyutlu bölgeyi ölçtüğü için uzunluğun karesiyle, hacim üç boyutlu uzayı ölçtüğü için uzunluğun küpüyle ifade edilir. Bir cismin yüzey alanı, onu sınırlayan dış yüzlerin alanlarının toplamıdır; iç hacimden farklı bir kavramdır. Örneğin 2 metre uzunluğunda, 3 metre genişliğinde dikdörtgenin çevresi 2·(2+3)=10 metre, alanı 2·3=6 metrekaredir. Birimlerin farklılığı bile bu iki sonucun aynı nicelik olmadığını gösterir.

Düzlemsel bölgede birim kare sayısı, alanın gerekçesini verir. Bir dikdörtgenin bir kenarı boyunca üç, ona dik kenarı boyunca dört adet birim kare yerleşiyorsa toplam alan 3·4=12 birimkaredir. Birim küplerin üç doğrultuda katmanlanması ise hacmi açıklar: 3·4·5=60 birimküp. Çevre, alan ve hacim formüllerinin çoğu, bu sayma ve parçalara ayırma düşüncesinden ortaya çıkar; yalnız ezberlenmiş semboller değildir.

Geometrik niceliklerin boyutu ve birimi

Nicelik	Ne ölçülür?	Tipik birimler	Temel işlem
Çevre	Düzlemdeki kapalı sınır uzunluğu	mm, cm, m, km	Kenarları veya eğri sınırı toplama
Alan	Düzlemsel bölgenin büyüklüğü	mm^2, cm^2, m^2, km^2	Birim kare veya alan bağıntısı
Yüzey alanı	Üç boyutlu cismin dış yüzleri	cm^2, m^2	Yüz alanlarını toplama
Hacim	Cismin kapladığı üç boyutlu bölge	cm^3, dm^3, m^3	Birim küp veya taban alanı × yükseklik
Kapasite	Kabın alabileceği iç miktar	mL, L, m^3	İç hacmi esas alma

2. Ölçü birimlerini aynı tür ve aynı ölçeğe dönüştürme

Uzunluk dönüşümü ile alan ve hacim dönüşümü aynı sayısal katsayıyı kullanmaz. 1 metre 100 santimetredir; 1 metrekare, kenarı 100 santimetre olan bir karenin alanı olduğundan 100·100=10.000 santimetrekaredir. 1 metreküp ise üç doğrultuda 100'er santimetrelik küpün hacmi olduğu için 100^3=1.000.000 santimetreküptür. Dönüşüm katsayısının karesi veya küpünün ortaya çıkma nedeni, ölçülen boyut sayısıdır.

Örneğin 2,4 m uzunluğundaki bir kenarla 80 cm uzunluğundaki diğer kenar çarpılacaksa önce 80 cm=0,8 m yazılır. Alan 2,4·0,8=1,92 m^2 bulunur. Bağımsız denetimde 2,4 m=240 cm, 240·80=19.200 cm^2; 19.200÷10.000=1,92 m^2 elde edilir. 2,4·80=192 sayısını hiçbir birim dönüşümü yapmadan alan diye kabul etmek doğru değildir.

$$1\ m = 100\ cm;\ 1\ m^2 = 10.000\ cm^2;\ 1\ m^3 = 1.000.000\ cm^3;\ 1\ dm^3 = 1\ L = 1.000\ cm^3;\ 1\ cm^3 = 1\ mL$$

Anlamı: Uzunluk, alan, hacim ve kapasite birimleri farklı boyutsal katsayılarla dönüştürülür.

Koşullar: Dönüşüm yalnız aynı tür ölçüler arasında yapılır; litreyle metrekare arasında doğrudan eşitlik kurulmaz.

Birim dönüşümlerinin karşılaştırılması

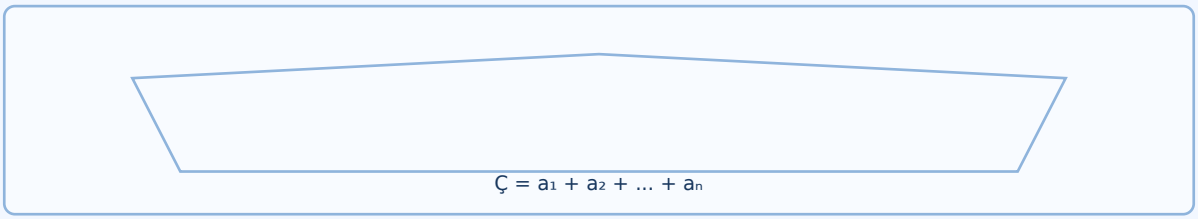
Başlangıç	Eşit değer	Denetim
1,5 m	150 cm	1,5·100
0,6 m^2	6.000 cm^2	0,6·100^2
0,004 m^3	4.000 cm^3	0,004·100^3
2,5 L	2.500 cm^3	2,5·1.000
750 mL	0,75 L	750÷1.000
1 hektar	10.000 m^2	100 m × 100 m

3. Çokgenlerde çevre ve bilinmeyen kenarı bulma

Bir çokgenin çevresi, kapalı sınırını oluşturan kenar uzunluklarının toplamıdır. Kenar sayısının çokluğu tek başına özel bir formül gerektirmez. Kenarları sırasıyla 5, 7, 9 ve 6 santimetre olan bir dörtgenin çevresi 27 santimetredir. Ölçülerin gerçek bir dörtgen oluşturması için en uzun kenarın diğer üç kenarın toplamından küçük olması gibi geometrik koşulların da sağlanması beklenir; 9<5+7+6 olduğundan bu açıdan çelişki yoktur.

Bir eşkenar üçgenin üç kenarı birbirine eşittir; kenarı a ise çevresi 3a'dır. Düzgün n-genin bütün kenarları a ise çevresi n·a olur. Örneğin bir düzgün sekizgenin kenarı 4,5 cm ise çevresi 8·4,5=36 cm'dir. Çevreden bir kenar uzunluğu bulunacaksa 36÷8=4,5 cm ters kontrolünü verir. Yalnız açıları eşit olan herhangi bir çokgen için kenarların da eşit olduğu kendiliğinden varsayılmaz; düzgünlük koşulu ayrıca belirtilmelidir.

$$Ç(\text{çokgen}) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n;\ \text{düzgün n-gen için } Ç = n \cdot a$$



Anlamı: Sınırı oluşturan kenarların uzunlukları bir kez sayılır.

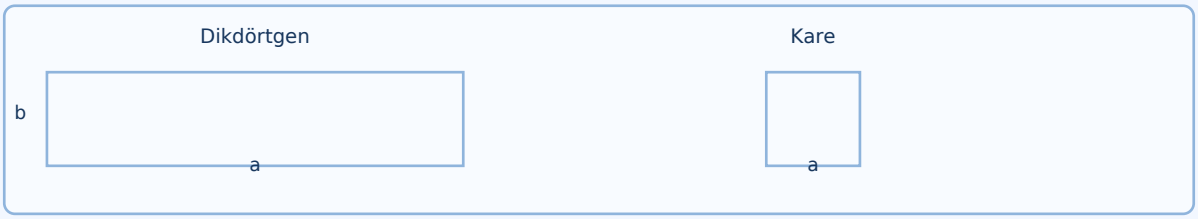
Koşullar: Uzunluklar aynı birimdedir; düzgün çokgende n≥3 ve bütün kenarlar a>0'dır.

4. Dikdörtgen ve karenin çevresi ile alanı

Dikdörtgenin ardışık iki kenarı a ve b birim ise karşılıklı kenarlar eşit olduğundan çevresi 2(a+b), alanı a·b olur. Alan bağıntısının nedeni, a boyunca birim uzunlukta ve b boyunca birim genişlikte olan birim karelerin çarpım yoluyla sayılmasıdır. Karenin iki kenarı aynı uzunlukta olduğundan çevresi 4a, alanı a^2 biçimine dönüşür.

Uzun kenarı 14 m, kısa kenarı 9 m olan dikdörtgen biçimli bir zeminin çevresi 2·(14+9)=46 m, alanı 14·9=126 m^2'dir. Çevre bağımsız biçimde 14+9+14+9=46 bulunur; alan ise 9 sıra hâlinde 14'er metrekareden 126 metrekareyi temsil eder. Çevre 46 m verildiğinde yalnız bu bilgiyle alanın kesin olarak 126 m^2 olduğu sonucuna varılamaz: 13 m ve 10 m kenarlı başka bir dikdörtgenin çevresi de 46 m iken alanı 130 m^2'dir.

Dikdörtgen: Ç = 2(a+b), A = a·b; Kare: Ç = 4a, A = a²



Anlamı: Çevre sınırı, alan iki dik doğrultudaki uzunluğun çarpımını ifade eder.

Koşullar: a,b>0 aynı uzunluk birimindedir; dikdörtgende komşu kenarlar birbirine diktir.

Eş çevreli farklı dikdörtgenler

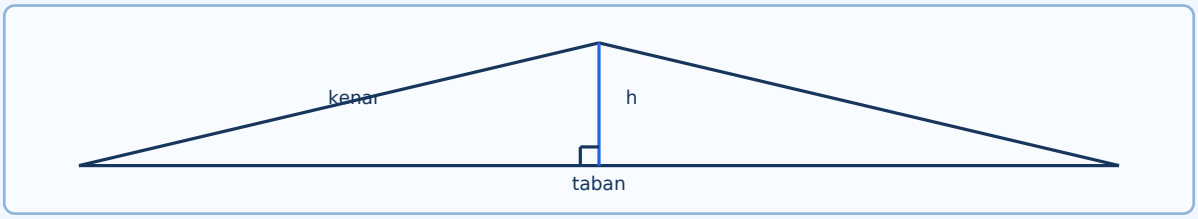
Kenar çifti	Çevre	Alan
14 m ve 9 m	46 m	126 m²
13 m ve 10 m	46 m	130 m²
12 m ve 11 m	46 m	132 m²
11,5 m ve 11,5 m	46 m	132,25 m²

5. Üçgende taban ve dik yükseklikle alan hesabı

Herhangi bir üçgende seçilen bir kenar taban olarak alınabilir. O tabanın doğrultusuna karşı köşeden indirilen dik uzaklık, ilgili yüksekliktir. Alan, tabanla ona ait yüksekliğin çarpımının yarısıdır. Bu formül, aynı taban ve yüksekliğe sahip bir üçgenin uygun bir kopyasıyla paralelkenara tamamlanabilmesinden türetilebilir. Yükseklik, üçgenin dar, dik veya geniş açılı oluşuna göre iç bölgede, kenar üzerinde veya uzantıda yer alabilir; mutlaka üçgenin içinde bir doğru parçası olması gerekmez.

Tabanı 16 cm, bu tabana dik yüksekliği 7 cm olan üçgenin alanı 16·7/2=56 cm²'dir. Birinci kontrol tabanın yarısı ile yüksekliği çarpmaktır: 8·7=56. Aynı alanlı başka bir üçgende taban 14 cm ise ilgili yükseklik 112÷14=8 cm olur; 14·8/2=56 ile yeniden doğrulanır. Üçgenin yalnız üç kenarının uzunluğu verilmişse bu taban-yükseklik hesabı doğrudan yapılamaz; uygun yükseklik türetilmeli veya farklı bir yöntem seçilmelidir.

A(üçgen) = (taban·ilgili dik yükseklik)/2



Anlamı: Üçgen alanı aynı taban-yükseklikli paralelkenarın yarısıdır.

Koşullar: Taban ve yükseklik pozitif uzunluktur; yükseklik seçilen tabana veya uzantısına diktir.

6. Dik üçgende alanı iki dik kenarla bulma

Dik üçgenin birbirine dik olan iki kenarı, alan hesabında birbirinin tabanı ve yüksekliğidir. Dik kenarlar 9 cm ile 12 cm ise alan 9·12/2=54 cm² olur. Üçüncü kenarın 15 cm olduğu Pisagor bağıntısıyla ayrıca doğrulanabilir; ancak alanı hesaplamak için hipotenüsün bilinmesi zorunlu değildir. Dik kenarların 9 ve 12 sayıları yer değiştirse de çarpım ve alan aynı kalır.

Dik üçgende hipotenüse indirilen yüksekliğin alan üzerinden bulunması da mümkündür. Aynı örnekte alan 54 cm² ve hipotenüs 15 cm olduğundan 15·h/2=54, buradan h=108/15=7,2 cm'dir. Geri yerine koyma 15·7,2/2=54 verir. Bu değer 9 veya 12 cm değildir; yükseklik hangi tabana aitse o tabanla birlikte kullanılmalıdır.

7. Paralelkenarda alanın taban-yükseklik ilişkisi

Paralelkenarın karşılıklı kenarları paralel ve eşittir; alanı seçilen bir tabanla iki paralel taban doğrusu arasındaki dik uzaklığın çarpımıdır. Bir yandaki üçgen parça uygun tarafa taşındığında alan değişmeden dikdörtgen oluşur. Bu nedenle paralelkenarda eğik yan kenarın uzunluğunu yükseklik gibi kullanmak genel olarak yanlıştır.

Bir paralelkenarın tabanı 15 cm, o tabana ait yüksekliği 6 cm ise alanı 90 cm²'dir. Yan kenarın 8 cm olduğu ayrıca verilse dahi 15·8=120 sonucu gerçek alanı göstermez; çünkü 8 cm yükseklik değil, eğik kenardır. Aynı şeklin başka bir kenarı taban olarak seçildiğinde bu kez ona dik yükseklik farklı olabilir. 8 cm'lik yan kenar taban alınırsa ona ait yükseklik 90/8=11,25 cm gerekir; alan 8·11,25=90 ile kontrol edilir. Hesaplanan 11,25 cm yüksekliği geometrik açıdan da mümkündür: 8 cm'lik yan kenarın 15 cm tabanına dik bileşeni 6 cm olduğunda, iki kenarın arasındaki açının sinüsü 6/8=3/4 olur; 15 cm'lik kenarın 8 cm tabanına dik bileşeni de 15·3/4=11,25 cm'dir. Bu ikinci kontrol, alanın seçilen tabana göre değişmediğini gösterir.

A(paralelkenar) = taban·ilgili dik yükseklik



Anlamı: Kaydırma ile dikdörtgene dönüştürülen paralelkenarda alan korunur.

Koşullar: Yükseklik seçilen taban doğrultusuna diktir; eğik kenar, dikliği kanıtlanmadan yükseklik yerine konmaz.

8. Eşkenar dörtgen ve deltoidde köşegenlerle alan

Eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirini dik olarak ortalar. Dik köşegenlerin kesişimiyle oluşan dört dik üçgenin toplam alanı, köşegen uzunluklarının çarpımının yarısıdır. Köşegenleri 10 cm ile 24 cm olan eşkenar dörtgenin alanı 10·24/2=120 cm²'dir. Yarım köşegenlerden 5 ve 12 cm dik üçgen oluşur; kenar uzunluğu √(5²+12²)=13 cm bulunur ve çevresi 4·13=52 cm olur. Buradaki çevre değeri, köşegenler yardımıyla hesaplanan alandan ayrı bir niceliktir.

Deltoidde uygun iki köşegen birbirine diktir; bu nedenle köşegen uzunluklarının çarpımının yarısı alanı verir. Ancak deltoidde her iki köşegenin de karşılıklı birbirini ortaladığı genel olarak söylenemez. Alanı bulmak için iki köşegenin dikliği ve uzunlukları yeterli olsa da kenarı hesaplamak için kesişimin köşegenleri hangi uzunluklarda böldüğüne ilişkin bilgi gerekir. Yalnız şeklin bakışına göre simetri varsaymak doğru değildir.

$$\text{Dik köşegenli dörtgende } A = (d_1 \cdot d_2)/2$$

Anlamı: Eşkenar dörtgen ve deltoidde köşegenlerle dört dik üçgene bölme sonucu elde edilir.

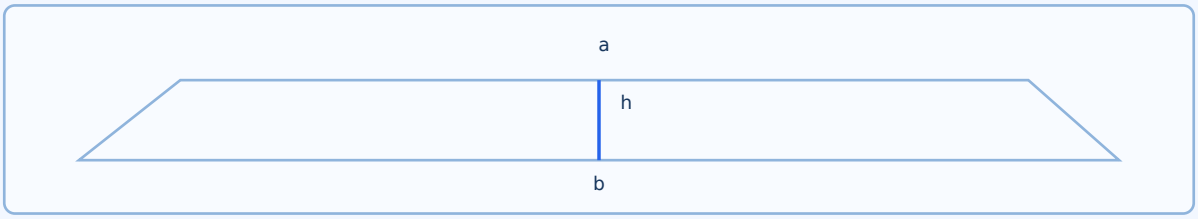
Koşullar: $d_1, d_2 > 0$ uzunluklardır ve köşegenler birbirine diktir; herhangi bir dörtgene koşulsuz uygulanamaz.

9. Yamukta paralel kenarlar ve alan

Yamukta bir çift karşı kenarın paralel olduğu kabul edildiğinde bu kenarların uzunlukları a ve b, aralarındaki dik uzaklık h olarak alınır. Alan, paralel kenarların aritmetik ortalaması ile yüksekliğin çarpımıdır. İki eş yamuğun yan yana uygun biçimde yerleştirilmesiyle tabanı a+b, yüksekliği h olan paralelkenar oluşturulabilir; yamuğun alanı bunun yarısıdır.

Paralel kenarları 18 m ve 10 m, yüksekliği 7 m olan yamuğun alanı $(18+10)\cdot 7/2 = 98$ m² olur. Önce kenar ortalaması 14 m bulunup $14\cdot 7 = 98$ ile ikinci denetim yapılır. Çevre hesabında ise paralel olmayan diğer iki kenarın uzunluğu ayrıca gereklidir. Bu yan kenarlar verilmeden yalnız tabanlar ve yükseklikten çevre tek bir sayı olarak bulunamaz.

$$A(\text{yamuk}) = [(a+b)\cdot h]/2$$



Anlamı: Paralel iki tabanın ortalama uzunluğu ile dik uzaklığı çarpılır.

Koşullar: a,b,h>0; h, paralel kenarlar arasındaki en kısa dik uzaklıktır.

Düzlemsel şekillerin alan bağıntıları

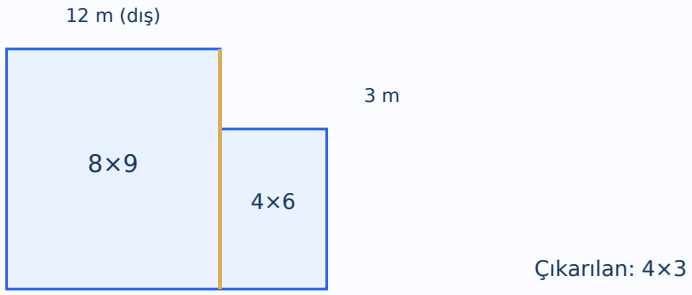
Şekil	Alan	Belirleyici uzunluklar
Dikdörtgen	$a\cdot b$	Birbirine dik komşu kenarlar
Kare	a^2	Kenar uzunluğu
Üçgen	(taban·yükseklik)/2	Seçilen tabana ait dik yükseklik
Paralelkenar	taban·yükseklik	Seçilen tabana ait dik yükseklik
Yamuk	(iki paralel taban toplamı·yükseklik)/2	Paralel tabanlar ve dik uzaklık
Eşkenar dörtgen	$(d_1\cdot d_2)/2$	Birbirine dik köşegenler
Daire	$\pi\cdot r^2$	Yarıçap

10. Bileşik çokgenlerin alanını parçalara ayırma

Bir bölge birden fazla basit şeklin çakışmadan birleşimiyse toplam alan parçaların alanlarının toplamıdır. Aynı bölge bir dış şekilden iç kısım çıkarılarak oluşuyorsa dış alan eksi iç alan alınır. Örneğin dışı 12 m × 9 m olan dikdörtgenin bir köşesinden 4 m × 3 m dikdörtgen parçası çıkarıldığında kalan L biçimli alan 108−12=96 m² olur. Bağımsız denetimde kalan şekil 8 m × 9 m'lik ana dikdörtgen (72 m²) ve 4 m × 6 m'lik ikinci dikdörtgen (24 m²) olarak bölünür; 72+24=96 m² elde edilir.

Bileşik şeklin çevresi ise parça çevrelerinin doğrudan toplamı değildir. İki parça ortak kenar boyunca birleştirildiyse o ortak kenar birleşik şeklin dış sınırında bulunmaz. Çevre toplarken iç sınırın iki kez sayılmasının önüne geçmek gerekir. Köşeden dışarı açılan basit dikdörtgen oyuklarında kimi zaman kaldırılan dış kenar parçalarının yerine eşit uzunlukta iç kenarlar oluşur; bu özel örnekte çevre değişmeyebilir, fakat genel bir kural değildir. Yalnız dış sınırın net uzunluğu hesaba katılır.

L biçimli alanı parçalayarak hesaplama



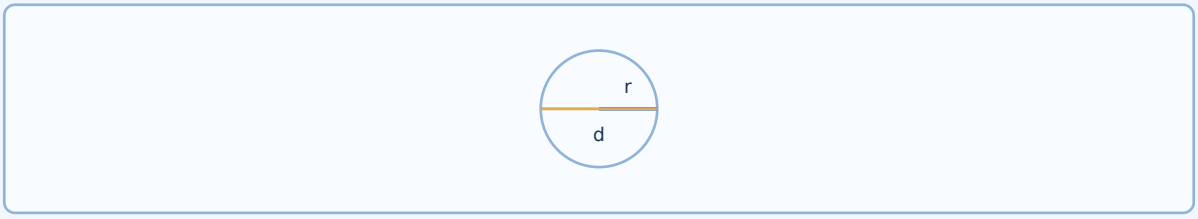
Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

11. Çemberin uzunluğu ile π sabiti

Çemberin uzunluğu, merkezden r uzaklıktaki kapalı eğrinin uzunluğudur. Bütün çemberlerde çevrenin çap uzunluğuna oranı aynı sabit sayıdır; bu sayı π ile gösterilir. Çap 2r olduğundan çember uzunluğu 2πr'dir. Daire, bu sınırın iç bölgesini de kapsar; dairenin alanı ayrıca hesaplanır. π yaklaşık 3,14159'dur, fakat kesin hesapta π sembolü korunabilir; yalnız yaklaşık değer isteniyorsa ondalık sonuç yazılır.

Yarıçapı 7 cm olan çemberin uzunluğu 14π cm'dir. π≈22/7 yaklaşımı seçilirse 44 cm, π≈3,14 seçilirse 43,96 cm bulunur; iki yaklaşımın farklı sonuç vermesi formülün yanlış olduğu anlamına gelmez. Kesin değer 14π cm olarak kalır. Çapı 14 cm olan çember için Ç=π·d=14π hesabı aynı sonucu bağımsız biçimde doğrular.

$$Ç(\text{çember}) = 2\pi r = \pi d;\ d = 2r$$



Anlamı: Çember uzunluğu çapla π oranındadır.

Koşullar: r>0; π kesin sabit, 3,14 ve 22/7 yaklaşık değerlerdir.

12. Merkez açıya göre yay uzunluğunu hesaplama

Tam çember 360 dereceye karşılık gelir. Merkez açısı α derece olan küçük veya büyük yayın uzunluğu, 2πr çember uzunluğunun α/360 oranı kadardır; hangi yayın seçildiği açıyla belirlenir. Merkez açısı 90 derece olan yay çemberin dörtte birine, 180 derece olan yay yarısına karşılık gelir. Radyan ölçüsü kullanılıyorsa yay uzunluğu r·θ'dır; bu bağıntıda θ derece değil radyan cinsindedir.

Yarıçapı 12 cm olan çemberde 150 derecelik yayın uzunluğu (150/360)·2π·12 = 10π cm olur. Alternatif yolda tam çember 24π cm, yayın payı 5/12; 24π·5/12=10π bulunur. Geri kalan 210 derecelik yay 14π cm'dir ve toplam 10π+14π=24π cm tam çevreyi verir. Bir merkezin iki nokta arasında gördüğü yayın 150 derece olduğu açıkça verilmiyorsa sırf şekle bakarak küçük yayı seçmek doğru değildir.

$$\text{Yay uzunluğu} = (\alpha/360°)\cdot 2\pi r;\ \text{radyanla } s = r\cdot\theta$$

Anlamı: Yay uzunluğu merkez açının tam açıya oranında çember uzunluğunun bir parçasıdır.

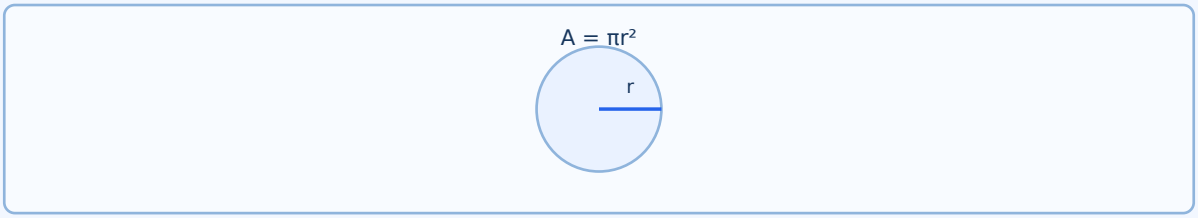
Koşullar: Derece hesabında 0≤α≤360°; radyan hesabında θ radyanla ölçülür; r>0.

13. Dairenin alanı ve yarıçapın ikinci kuvveti

Daire alanı πr² bağıntısıyla bulunur. Daire, ince dilimlere ayrılıp dilimler dönüşümlü yan yana yerleştirildiğinde yaklaşık dikdörtgensi şekil oluşturur; dilim sayısı artırıldığında uzun kenar yaklaşık πr, kısa kenar r olur. Bu düşünce, alanın neden çevreden farklı olarak yarıçapın karesiyle orantılı olduğunu açıklar. Yarıçap iki katına çıktığında alan dört katına, üç katına çıktığında dokuz katına çıkar; yarıçapın iki katına çıkması alanı iki katına çıkarmaz.

Yarıçapı 6 m olan dairenin alanı 36π m²'dir. Çapı 12 m verildiğinde önce yarıçap 6 m olarak bulunmalı; yanlış biçimde π·12² kullanılarak 144π sonucuna gidilmemelidir. Alanı 81π cm² olan dairede r²=81 ve uzunluk negatif olamayacağından r=9 cm'dir. Geri kontrol 9²·π=81π'dir.

$$A(\text{daire}) = \pi r^2 = \pi d^2/4$$



Anlamı: Daire alanı yarıçapın karesiyle orantılıdır.

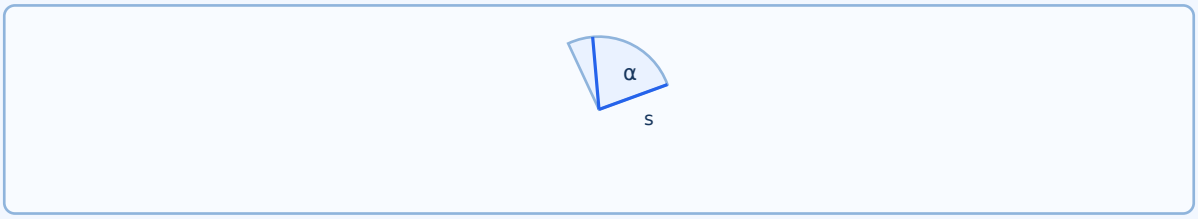
Koşullar: r>0 ve d=2r; sonuç uzunluğun karesi cinsindendir.

14. Daire diliminin alanı ve yay uzunluğuyla ilişkisi

Merkezde α derecelik açıyla sınırlanan daire dilimi, tam dairenin α/360 oranındaki parçasıdır. Dilimin alanı (α/360)πr² olur. Yay uzunluğu aynı oranla 2πr üzerinden hesaplandığı için, yarıçap r ve yay uzunluğu s biliniyorsa dilim alanı r·s/2 şeklinde de ifade edilebilir. Bu ikinci bağıntı, derece veya radyan birimiyle uğraşmadan aynı büyüklüğü bağımsız denetlemeyi sağlar.

Yarıçapı 10 cm ve merkez açısı 72 derece olan dilimin alanı 72/360·100π=20π cm²'dir. İlgili yayın uzunluğu 72/360·20π=4π cm'dir. s·r/2 hesabı 4π·10/2=20π sonucu verir. Dilimin çevresi alanından farklıdır: iki yarıçap ve yay uzunluğunun toplamıdır; bu örnekte 20+4π cm'dir. Dilimin iki doğru kenarını çevrede saymayı unutmak, yalnız yay uzunluğunu bütün çevre sanmak anlamına gelir.

$$A(\text{dilim}) = (\alpha/360°)\cdot\pi r^2 = (r\cdot s)/2;\ Ç(\text{dilim}) = 2r+s$$



Anlamı: Daire diliminde alan merkez açı oranına bağlıdır; çevre iki yarıçapla yayı içerir.

Koşullar: r>0, 0<α≤360°; s seçilen dilimin yay uzunluğudur. Tam daire sınırında iki ayrı radyal kenar dış çevrenin parçası değildir; Ç(dilim)=2r+s yalnız gerçek sektör için 0<α<360° kullanılmalıdır.

15. Halka bölgesi ve iki eş merkezli çember arasındaki alan

Eş merkezli iki daireden büyük olanın içinden küçük olan çıkarılırsa halka biçiminde bölge oluşur. Dış yarıçap R, iç yarıçap r ve R>r≥0 olmak üzere halka alanı $\pi(R^2-r^2)$'dir. Bölgenin dış ve iç sınırları ayrı kapalı eğriler olduğundan bütün sınır uzunluğu hesaplanacaksa $2\pi R+2\pi r$ alınır. Sadece dış kenara şerit çekilecekse yalnız $2\pi R$ kullanılır; neyin ölçüldüğünün açıklanması gerekir.

Dış yarıçap 8 cm, iç yarıçap 5 cm ise halka alanı $\pi(64-25)=39\pi$ cm²'dir. Bağımsız kontrol $64\pi-25\pi=39\pi$ ile yapılır. İki sınırın toplam uzunluğu $16\pi+10\pi=26\pi$ cm'dir. Dış ve iç çapın farkını kullanarak doğrudan alan bulmak doğru değildir; alan farkı yarıçapların kareleri üzerinden hesaplanır.

Dairesel bölgelere ilişkin üç farklı nicelik

Bölge	Alan	Sınır uzunluğu
Tam daire (r)	πr^2	$2\pi r$
0<α<360° daire dilimi	$(\alpha/360)\pi r^2$	$2r+(\alpha/360)2\pi r$
Halka (dış R, iç r)	$\pi(R^2-r^2)$	$2\pi(R+r)$, iki sınır birlikte
180° yarım daire bölgesi	$\pi r^2/2$	$\pi r+2r$

16. Uzunluk ölçeği değişince çevre, alan ve hacim

Benzer şekillerde bütün doğrusal uzunluklar k katına çıkarılırsa çevre k, alan k^2 katına çıkar. Üç boyutlu benzer cisimlerde hacim k^3 katına çıkar. Bu ilişkiler, bütün ilgili boyutların aynı oranda değiştirildiği durumlar içindir. Yalnız bir kenar uzatılmışsa bütün cismin ölçeği değişmiş sayılamaz ve k^2 veya k^3 genellemesi doğrudan uygulanamaz.

Bir kare 4 cm kenardan 6 cm kenara büyütüldüğünde doğrusal ölçek k=6/4=3/2 olur. Çevre 16 cm'den 24 cm'ye, yani 3/2 katına yükselir. Alan 16 cm²'den 36 cm²'ye, yani $(3/2)^2=9/4$ katına çıkar. Ters kontrol 36/16=9/4'tür. Kenarı 2 cm olan küpün her ayrıtı 6 cm olduğunda hacim 8 cm³'ten 216 cm³'e, yani 27 katına yükselir; uzunluk ölçeği 3 ve $3^3=27$'dir.

$$\text{Uzunluk ölçeği } k \Rightarrow \text{çevre ölçeği } k,\ \text{alan ölçeği } k^2,\ \text{hacim ölçeği } k^3$$

Anlamı: Benzer geometrik şekillerin ilgili ölçüleri boyut sayısına göre değişir.

Koşullar: k>0; şekiller benzer, cisimler tüm doğrultularda aynı ölçekle büyütülmüş/küçültülmüş olmalıdır.

17. Küpte yüzey alanı ve hacim

Küpün altı yüzü birbiriyle eş karedir ve bütün ayrıt uzunlukları a'dır. Bir yüzün alanı a^2, toplam yüzey alanı $6a^2$ olur. Hacim ise üç dik doğrultudaki a uzunluğunun çarpımıdır: a^3. Küpün bir ayrıtı 4 cm ise yüzey alanı $6 \cdot 16 = 96$ cm², hacmi $4^3 = 64$ cm³'tür. Altı adet 16 cm² yüzün toplamı 96'yı, her yönde dörder birimküp içeren $4 \cdot 4 \cdot 4$ katman düzeni 64'ü ikinci yoldan doğrular.

Küpte yüzey alanının hacme oranı $6a^2/a^3 = 6/a$'dır. Ayrıt uzadıkça hacim, yüzey alanına göre daha hızlı büyür. Bu özellik, iki cismin aynı hacimde fakat farklı yüzey alanında olabilmesini açıklar; yalnız hacim bilgisi dış kaplama miktarını her zaman belirlemez.

Küp için yüzey alanı $S = 6a^2$; hacim $V = a^3$

Anlamı: Altı eş kare yüz ve üç boyutlu a×a×a birimküp düzeni.

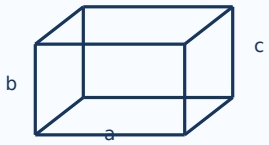
Koşullar: a>0 uzunluktur; S alan, V hacim birimiyle ifade edilir.

18. Dikdörtgenler prizmasında yüzey alanı ve hacim

Dikdörtgenler prizmasında birbirine dik üç ayrıt uzunluğu a, b, c olsun. Karşılıklı yüzler eş dikdörtgenlerdir ve toplam yüzey alanı 2(ab+ac+bc)'dir. Hacim, taban alanı ab ile ona dik yükseklik c'nin çarpımı olan abc'dir. Üç uzunluk aynı birime dönüştürülmeden çarpılmamalıdır.

Kenarları 3 cm, 4 cm ve 10 cm olan kapalı prizmanın hacmi $3 \cdot 4 \cdot 10 = 120$ cm³, yüzey alanı $2(12+30+40) = 164$ cm²'dir. Yüz alanları karşılıklı ikişer kez sayıldığında $12+12+30+30+40+40 = 164$ bulunur. Üstü açık aynı kutuda malzeme kalınlığı ihmal edilirse dış/yüzey kaplaması için yalnız taban ve dört yan yüz alınır: $12+2 \cdot 30+2 \cdot 40 = 152$ cm². Açık ve kapalı kutu yüzey alanları aynı değildir.

Dikdörtgenler prizması: $V = a \cdot b \cdot c$; $S(\text{kapalı}) = 2(ab+ac+bc)$



Anlamı: Taban alanı × dik yükseklik hacmi; üç farklı yüz çiftinin toplamı dış yüzey alanını verir.

Koşullar: a,b,c>0 ve birbirine dik ayrıt uzunluklarıdır; S kapalı, altı yüzlü cisim içindir.

3×4×10 cm prizmanın ölçüleri

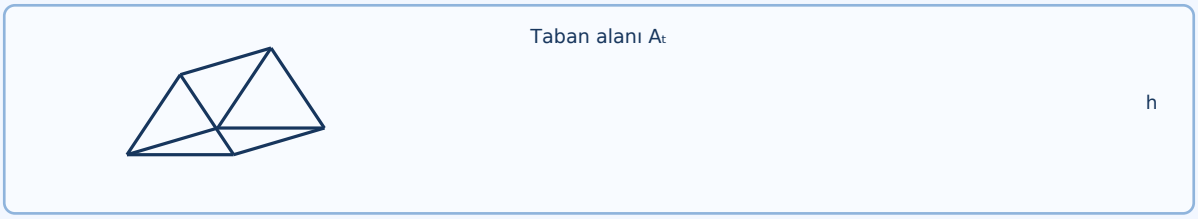
Ölçüm	Hesap	Sonuç
Taban alanı	3·4	12 cm²
Hacim	12·10	120 cm³
Bir yan yüz çifti	2·(3·10)	60 cm²
Diğer yan yüz çifti	2·(4·10)	80 cm²
Kapalı toplam yüzey	12+12+60+80	164 cm²
Üstü açık toplam yüzey	12+60+80	152 cm²

19. Dik prizmada taban alanı, yanal alan ve hacim ilişkisi

Dik prizmanın iki eş ve paralel çokgensel tabanı vardır; yan ayrıtları taban düzlemine diktir. Taban alanı A_t, taban çevresi $Ç_t$ ve dik yükseklik h ise hacmi $A_t h$, yanal alanı $Ç_t h$, iki tabanı da içeren toplam yüzey alanı $2A_t+Ç_t h$ olur. Tabanın üçgen, beşgen veya başka bir çokgen olması bu genel yöntemi değiştirmez; önemli olan dik prizma koşuludur.

Tabanı dik kenarları 6 ve 8 cm, hipotenüsü 10 cm olan dik üçgen; yüksekliği 12 cm olan dik üçgen prizmanın taban alanı $6\cdot8/2=24$ cm², taban çevresi $6+8+10=24$ cm'dir. Hacim $24\cdot12=288$ cm³, yanal alan $24\cdot12=288$ cm², toplam kapalı yüzey alanı $2\cdot24+288=336$ cm² olur. Hacimle yanal alanın sayısal olarak aynı 288 değerine sahip olması birimlerini eşitlemez: biri cm³, diğeri cm²'dir. Üç yan dikdörtgenin alanları $6\cdot12=72$, $8\cdot12=96$, $10\cdot12=120$ cm²; toplam 288 cm² ile yanal alan ikinci kez doğrulanır.

Dik prizma: $V = A_t\cdot h$; Yanal alan $= Ç_t\cdot h$; $S(\text{kapalı}) = 2A_t+Ç_t\cdot h$



Anlamı: Aynı kesitli dik prizmanın hacmi taban alanı × yükseklik; yan yüzler taban kenarları boyunca oluşan dikdörtgenlerdir.

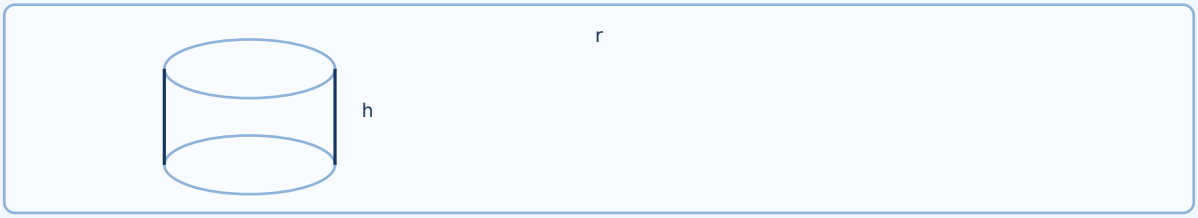
Koşullar: h tabana dik uzunluktur; taban çevresi ve alanı aynı uzunluk biriminden hesaplanır.

20. Dik dairesel silindirin hacmi

Dik dairesel silindirin tabanı bir dairedir. Taban yarıçapı r, tabanlara dik yükseklik h olduğunda taban alanı πr^2; hacim bu alanın yükseklik boyunca devam etmesi nedeniyle $\pi r^2 h$ olur. Yarıçapın iki katına çıkması taban alanı ve hacmi dört katına çıkarır; yükseklik iki katına çıkarsa hacim iki katına çıkar. Bu ayrı etkiler, tek değişkenin değiştirilmesiyle bütün boyutların birlikte ölçeklenmesini birbirinden ayırır.

Yarıçapı 3 cm, yüksekliği 10 cm olan silindirin hacmi 90π cm³'tür. Birinci hesap $\pi\cdot3^2\cdot10=90\pi$, ikinci hesap 9π cm² taban alanına sahip on eş kalınlıkta 1 cm katman düşünülerek $10\cdot9\pi=90\pi$ biçimindedir. $\pi\approx3{,}14$ alınırsa yaklaşık 282,6 cm³ sonucu bulunur. Radyus yerine çap olan 6'yı kullanarak $\pi\cdot6^2\cdot10$ sonucu çıkarmak hacmi dört kat fazla hesaplar.

Dik dairesel silindir: $V = \pi r^2 h$



Anlamı: Dairesel taban alanının dik yükseklikle çarpımı silindir hacmini verir.

Koşullar: r>0, h>0 ve yükseklik tabana diktir; π kesin sembol olarak korunabilir.

21. Dik dairesel silindirin yanal ve toplam yüzey alanı

Silindirin eğri yan yüzü uygun biçimde açıldığında bir dikdörtgen olur. Bu dikdörtgenin bir kenarı taban çevresi $2\pi r$, diğer kenarı yükseklik h'dir; dolayısıyla yanal alan $2\pi rh$'dir. İki dairesel tabanın alanları $2\pi r^2$ eklenince kapalı silindirin toplam yüzey alanı $2\pi rh+2\pi r^2$ elde edilir. Tabanı olmayan veya üstü açık silindirde eksik yüz eklenmez.

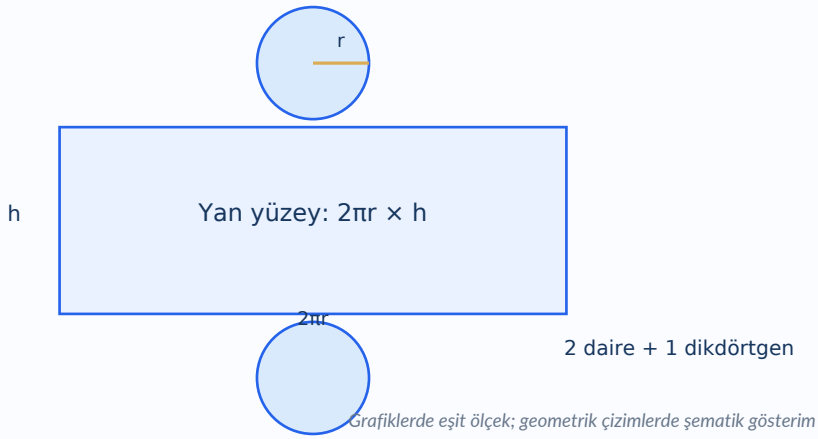
Yarıçapı 4 cm, yüksekliği 9 cm olan kapalı silindirde yanal alan $2\pi\cdot4\cdot9=72\pi$ cm², iki taban $2\cdot\pi\cdot16=32\pi$ cm², toplam yüzey 104π cm²'dir. Üstü açık ve tabanı bulunan bir silindirde alan $72\pi+16\pi=88\pi$ cm² olur. Hacim ayrıca $\pi\cdot4^2\cdot9=144\pi$ cm³'tür. Bu sonuçların birbirinden bağımsız doğrulamasında yan yüz dikdörtgeninin kenarları 8π ve 9; alanı 72π olarak kullanılır.

$$\text{Silindir: } S_{yanal} = 2\pi rh;\ S_{kapalı} = 2\pi rh+2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$$

Anlamı: Yan yüz açınımı bir dikdörtgen; iki taban ise dairedir.

Koşullar: r,h>0; kapalı toplam alan iki taban içerir, açık yüzeylerde eksik yüzler çıkarılır.

Kapalı silindirin açınımı



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

22. Piramit ve konide taban–yükseklik ile hacim

Bir piramit veya koninin hacmi, aynı taban alanına ve aynı dik yüksekliğe sahip prizma ya da silindirin hacminin üçte biridir. Bu nedenle $V=A_t h/3$ bağıntısı kullanılır. Konide taban dairesel olduğundan $A_t=\pi r^2$, hacim $\pi r^2h/3$'tür. Burada kullanılan yükseklik, tepe noktasından taban düzlemine olan dik uzaklıktır; koninin eğik ana doğrusu veya piramidin yan ayrıtı yükseklik olarak alınamaz.

Taban alanı 45 cm², dik yüksekliği 8 cm olan piramidin hacmi $45\cdot8/3=120$ cm³'tür; aynı taban ve yükseklikte prizmanın hacmi 360 cm³ olduğundan üçte biri 120 cm³ olur. Yarıçapı 3 cm ve dik yüksekliği 12 cm olan dik koninin hacmi $\pi\cdot9\cdot12/3=36\pi$ cm³'tür; aynı taban-yükseklikli silindirin hacmi 108π cm³ ve üçte biri 36π'dir. Bu bölümde alan/kaplama için piramit ve koninin eğik yüzey özellikleri verilmediğinden, bu örneklerden onların yüzey alanı hakkında tek bir sayı çıkarılmaz.

$$V(\text{piramit}) = A_t\cdot h/3;\ V(\text{koni}) = \pi r^2h/3$$

Anlamı: Aynı taban ve dik yükseklikte prizma/silindirin hacminin üçte biri.

Koşullar: Taban alanı $A_t>0$, dik yükseklik h>0; konide r>0 ve taban daireseldir.

23. Kürede yüzey alanı ile hacim

Küre, merkezinden aynı uzaklıkta bulunan noktaların oluşturduğu yüzeyle sınırlanan üç boyutlu cisimdir; yarıçapı r ise yüzey alanı $4\pi r^2$, iç bölgenin hacmi $4\pi r^3/3$ olarak hesaplanır. Çember ve daire düzlemsel, küre ise üç boyutlu bir geometrik nesnedir. Kürenin alanını dairenin alanına eşitlemek veya küre hacmini silindir hacmi gibi yazmak doğru değildir.

Yarıçapı 3 cm olan bir kürenin yüzey alanı $4\pi\cdot9=36\pi$ cm², hacmi $4\pi\cdot27/3=36\pi$ cm³'tür. Sayısal katsayıların tesadüfen eşit olması iki niceliğin aynı olduğu anlamına gelmez. Yarıçap 6 cm'ye çıktığında yüzey alanı dört katla 144π cm², hacim sekiz katla 288π cm³ olur; bu sonuçlar uzunluk ölçeklerinin ikinci ve üçüncü kuvvet kurallarına uygundur.

$$\text{Küre: } S = 4\pi r^2;\ V = (4/3)\pi r^3$$

Anlamı: Küresel dış yüzey alanı ve içerilen üç boyutlu hacim.

Koşullar: r>0; alan birimi kare, hacim birimi küptür.

Temel cisimlerin hacimleri ve tam yüzey alanları

Cisim	Hacim V	Kapalı dış yüzey alanı S
Küp, ayrıt a	a^3	$6a^2$
Dikdörtgenler prizması, a,b,c	abc	2(ab+ac+bc)
Dik prizma, taban A_t ve çevre $Ç_t$, yükseklik h	$A_t h$	$2A_t+Ç_t h$
Dik dairesel silindir, r,h	$\pi r^2 h$	$2\pi r(h+r)$
Piramit, taban A_t, dik yükseklik h	$A_t h/3$	Genel yüzey için yan yüz bilgisi gerekir
Dik dairesel koni, r,h	$\pi r^2 h/3$	Genel yüzey için eğik uzunluk gerekir
Küre, r	$(4/3)\pi r^3$	$4\pi r^2$

24. Hacim ile sıvı kapasitesi; iç ve dış ölçü ayrımı

Bir kabın dış boyutlarından bulunan hacim ile içine alabileceği sıvının hacmi farklı olabilir. Duvar kalınlığı varsa kapasite, iç ölçülere göre hesaplanır. Bir dikdörtgenler prizması biçimindeki kabın iç tabanı 20 cm × 15 cm, iç yüksekliği 10 cm ise iç hacmi $20\cdot15\cdot10=3.000$ cm³=3 L'dir. Bu eşitlik 1 L=1.000 cm³ dönüşümüyle doğrulanır. Dış ölçüler 22×17×12 cm olsa bile bunların çarpımı 4.488 cm³, kabın iç kapasitesini vermez.

Dikey kenarı 50 cm olan küp biçimli su haznesinin tam iç hacmi $50^3=125.000$ cm³=125 L'dir. Hazne %80 doluysa içindeki su $125\cdot0{,}80=100$ L olur; dolu olmayan 25 L ile toplam 125 L doğrulanır. Yüzde oranı hacim üzerinden uygulandığı için doluluk %80 ise su yüksekliğinin mutlaka %80 olacağı her biçimde söylenemez; yalnız yatay kesit alanı yüksekliğe göre sabit kalan dik prizma ve silindirlerde doğrusal orantı kurulabilir.

İç ve dış ölçüyle hacim hesabı

Model	Hesaplanan nicelik	Sonuç
İç taban 20×15, iç yükseklik 10 cm	İç kapasite	3.000 cm^3 = 3 L
Dış ölçüler 22×17×12 cm	Dıştan belirlenen kutu hacmi	4.488 cm^3
İç ayrıt 50 cm küp	Tam iç kapasite	125.000 cm^3 = 125 L
Aynı küp %80 dolu	Su miktarı	100 L
Aynı küp %20 boş	Boş kapasite	25 L

25. İçi boşaltılmış ve birleşik üç boyutlu cisimlerde hacim

Bir cisimden başka bir cisim biçiminde hacim çıkarıldığında kalan hacim dış hacimden çıkarılan iç hacim düşülerek bulunur. Ancak çıkarılan bölgenin bütünü gerçekten dış cismin içinde bulunmalı ve parçalar doğru modellenmelidir. Örneğin 10×8×6 cm ölçülü dolu dikdörtgenler prizmasından taban ölçüsü 2×3 cm ve yüksekliği 6 cm olan, tabandan tavana kadar geçen dikdörtgensel kanal açılırsa dış hacim 480 cm^3, çıkarılan kanal hacmi 36 cm^3, kalan katı hacim 444 cm^3'tür. İkinci yöntemle kalan yatay kesit alanı $10\cdot8-2\cdot3=74$ cm^2, $74\cdot6=444$ cm^3 bulunur.

Aynı kanallı cismin yüzey alanını hesaplamak, hacim çıkarma kadar basit değildir. Üst ve alt yüzlerden kaldırılan alanlar, kanalın dört yeni iç duvarının alanlarıyla birlikte değerlendirilir. Bu nedenle iç boşluk oluşturulunca yüzey alanı mutlaka azalır denemez; yeni iç yüzeyler toplam alanı artırabilir. Modelin açık/kapalı sınırları ve iç yüzeylerin kaplanıp kaplanmayacağı belirtilmedikçe toplam yüzey alanı tek bir işlemle bulunmaz.

26. Alan ve hacimde benzer şekilleri karşılaştırma

Aynı tür iki geometrik cismin taban alanları veya yükseklikleri farklıysa hacim farkı yalnız bir uzunluk farkından belirlenemez. Örneğin taban alanları eşit iki dik prizmanın dik yükseklikleri 8 ve 12 cm ise hacimleri oranı 8:12=2:3'tür. Taban alanları farklıysa yükseklik oranına yalnız başına bakmak yeterli değildir. Genel olarak $V_1/V_2=(A_1h_1)/(A_2h_2)$ bağıntısı, pozitif taban alanları ve yükseklikler için geçerlidir.

Benzer iki küpün kenar oranı 2:5 ise yüzey alanı oranı 4:25, hacim oranı 8:125'tir. Bu oranlar benzerlik bağının açıkça verilmesini gerektirir. Bir cismin yalnız yüksekliği değişmişse bu oranları uygunsuz şekilde kullanmak yanlış sonuç doğurur. Denklem kurulurken önce nelerin aynı kaldığı ve nelerin değiştiği belirtilmelidir.

27. Sabit çevre veya alan bilgisinden sonuç çıkarma sınırları

Sabit çevre verilmesi çoğu zaman tek bir alan değeri belirlemez. Çevresi 40 m olan dikdörtgenlerde a+b=20 m'dir. Kenarlar 5 ve 15 m seçilirse alan 75 m^2; 8 ve 12 m seçilirse alan 96 m^2; 10 ve 10 m seçilirse kare alanı 100 m^2 olur. Sabit çevreli dikdörtgenler içinde alanın en büyük olduğu durumun kare olması, $a(20-a)=100-(a-10)^2$ özdeşliğinden çıkar; çünkü bir karenin karesi negatif olamaz.

Aynı alanın da farklı çevreleri bulunabilir. Alanı 36 m^2 olan dikdörtgenlerden 3×12 m biçimindekinin çevresi 30 m, 4×9 m biçimindekinin çevresi 26 m, 6×6 m biçimindekinin çevresi 24 m'dir. Dolayısıyla alan veya çevre değerini tek başına bilmek, bütün kenar uzunluklarını belirlemek için genellikle yeterli değildir. Ek oran, kenar farkı veya şeklin kare olduğu gibi koşullar gerekir.

Tek bir ölçü verilince farklı şekillerin oluşabilmesi

Koşul	Kenarlar	Diğer ölçü
Çevre 40 m	5 m ve 15 m	Alan 75 m²
Çevre 40 m	8 m ve 12 m	Alan 96 m²
Çevre 40 m	10 m ve 10 m	Alan 100 m²
Alan 36 m²	3 m ve 12 m	Çevre 30 m
Alan 36 m²	4 m ve 9 m	Çevre 26 m
Alan 36 m²	6 m ve 6 m	Çevre 24 m

28. Çok adımlı alan ve hacim uygulamalarında sıralama

Çok aşamalı bir hesaplamada önce şekillerin ve birimlerin belirlenmesi, ardından hangi parçaların ekleneceği veya çıkarılacağının açıklanması gerekir. Bir dikdörtgen avlunun uzunluğu 18 m, genişliği 12 m olsun. Avlunun içinde uzun kenarı 6 m, kısa kenarı 4 m olan dikdörtgen bitki alanı ayrılırsa kalan taş kaplama alanı 18·12−6·4=216−24=192 m² olur. Aynı alan, bitki bölgesi 24 m² ile taş bölgesi 192 m² toplanarak 216 m²'nin yeniden elde edilmesiyle denetlenir.

Kalan taş bölgeye 5 cm kalınlığında düzgün bir harç katmanı uygulanacaksa hacim hesabında 5 cm=0,05 m alınır. Harç hacmi 192·0,05=9,6 m³'tür. Alternatif hesapta 192 m²=1.920.000 cm², bunun 5 cm kalınlıkla çarpımı 9.600.000 cm³ ve 1.000.000'a bölünmesi 9,6 m³ verir. Burada metre cinsinden kaplama alanıyla santimetre cinsinden kalınlığı doğrudan çarpmak birim hatasına yol açardı.

29. Yüzey kaplama, boyama ve malzeme hesabında ölçütün seçilmesi

Boya, kâğıt veya kaplama gerektiren bir işte hesaplanacak nicelik yüzey alanıdır; yalnız nesnenin hacmi değildir. Kapalı prizmanın altı yüzü boyanacaksa bütün yüzeyler, zemine oturan alt yüz boyanmayacaksa beş yüz, üstü açık bir kabın içi kaplanacaksa iç tabanla dört iç yan yüz dikkate alınır. İç ve dış yüzeylerin birlikte kaplanması isteniyorsa iki yüz ayrı ayrı değerlendirilir; kaplama kalınlığı veya malzeme fire payı ayrıca verilmedikçe varsayılmaz.

Bir yüzeyin alanı 48 m², boya sarfiyatı 1 litreyle 8 m² ise gereken teorik boya miktarı 48/8=6 litredir. İki kat boya yapılacaksa aynı kaplama gücü varsayımıyla 12 litre olur. Bu ilişki, geometriyle ölçülen alanın birim oranla malzeme miktarına dönüştürülmesidir. Boya miktarını yalnız 48 m² şeklinde bildirmek eksiktir; sonuç litre olmalıdır. Aynı yaklaşım hacimden kap dolumuna geçerken birimlerin tutarlı kullanılmasını gerektirir.

30. Geometrik ölçü problemlerini bağımsız denetleme

Elde edilen sonuç üç ayrı açıdan değerlendirilmelidir. İlk olarak şeklin türü ve verilmiş geometrik koşullar doğru tanınmalıdır: kare ile genel dikdörtgen, dik yükseklik ile eğik kenar, çember uzunluğu ile daire alanı, açık yüzey ile kapalı yüzey karıştırılmaz. İkinci olarak bütün uzunluklar aynı birimde yazılmalı ve formülün sonucu beklenen boyutta çıkmalıdır; alan birimine metre, hacim birimine metrekare yazılması açık hatadır. Üçüncü olarak mümkün olduğunda farklı yöntemlerle yeniden hesap yapılmalıdır: alan toplama–çıkarma, birim kare sayma, hacimde katman modeli, yüzey alanında ayrı yüzleri sayma gibi.

> **Ölçü ve şekil koşulları** Çevre uzunluk, alan kare birim, hacim küp birim gerektirir. Üçgen ve paralelkenarda alan, seçilen tabana ait dik yükseklikle hesaplanır. Dairede r yarıçaptır; π yaklaşım seçimine göre farklı ondalık sonuçlar çıkabilir. Bir şeklin görseldeki oranları verilmiş ölçü yerine geçmez.

Açık yüzey ve iç hacim ayrımı Prizmanın hacmi ile yüzey alanı birbirine karıştırılmaz. Kapalı yüzey bağıntıları açık kutuda doğrudan kullanılmaz; eksik yüz düşülür. Duvar kalınlığı olan kapta iç kapasite dış ölçülerden bulunamaz. Sadece hacimden boya veya kaplama miktarı çıkarılmaz; yüzey bilgisi gereklidir.

Hesap denetiminde yaygın karışıklıklar

Karışıklık	Doğru yaklaşım	Gerekçe
$1\ m^2 = 100\ cm^2$	$1\ m^2 = 10.000\ cm^2$	Katsayı iki doğrultuda karesini alır
Çapı yarıçap sanma	$r = d/2$	Daire alanında r^2 bulunur
Eğik kenarı yükseklik kullanma	Taban doğrultusuna dik uzaklığı kullanma	Alan taban × dik yükseklik ilkesine bağlıdır
Sektörün çevresini yalnız yay sanma	Yay + iki yarıçap	Düz sınır parçaları da çevreye dahildir
Açık kutuda bütün yüzleri toplama	Eksik yüzü çıkarma	Gerçekte bulunmayan yüz kaplanmaz
Dış ölçüyü iç kapasite sanma	İç uzunlukları esas alma	Duvar hacmi kapasiteyi azaltır
cm^2 ve cm^3 sayılarını eş sanma	Boyutsal farkı koruma	Alan ve hacim farklı ölçümlerdir

Geometri hesabındaki amaç, uygun formülü yalnız hatırlamak değil, formüldeki her uzunluğun hangi sınır veya düzleme ait olduğunu açıklamaktır. Çevre, alan, yüzey alanı ve hacim arasındaki ilişkinin sağlam kurulması, sonraki GY-08.06 konusundaki koordinat üzerinden şekil yorumlama ve ölçüm ilişkileri için de temel oluşturur.

KONU 8.6

KOORDİNAT VE TEMEL GEOMETRİK ŞEKİL YORUMLAMA

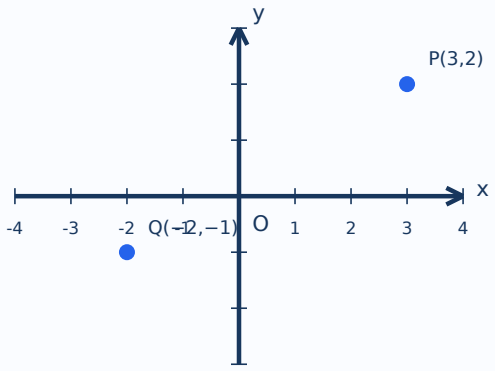
Geometrik bir şekil, yalnız kenarlarının ve açılarının sözel olarak tanımlanmasıyla değil, belirli bir düzlemdeki köşelerinin konumlarıyla da incelenebilir. Koordinat sistemi, konum bilgisini sayılara çevirir; böylece iki nokta arasındaki uzaklık, doğru parçasının orta noktası, kenarların yönleri ve bir şeklin hangi koşullarda oluştuğu denetlenebilir. Bu bölümde esas alınan model, birbirini dik kesen iki sayı ekseninin oluşturduğu düzlemdir. Önceki geometri konularında açıklanan şekil özellikleri ve ölçüler yeniden anlatılmayacak; bunların koordinatlarla nasıl yorumlandığı gösterilecektir.

1. Dik koordinat sisteminde orijin, eksenler ve ölçek

Yatay sayı doğrusu x ekseni, düşey sayı doğrusu y eksenidir. Eksenlerin dik kesiştiği O(0, 0) noktası orijin olarak adlandırılır. Yatay doğrultuda sağa gidildikçe x koordinatı artar; düşey doğrultuda yukarı çıkıldıkça y koordinatı artar. Matematiksel dik koordinat sisteminde iki eksenin pozitif birimleri aynı fiziksel uzunluk ölçeğiyle temsil edilir. Şemada farklı görsel ölçekler kullanılırsa yalnız görüntüden açı veya uzunluk sonucuna ulaşılamaz.

Bir nokta P(a, b) biçiminde gösterilir. İlk sayı a, apsis veya x koordinatı; ikinci sayı b, ordinat veya y koordinatıdır. Bu gösterim sıralıdır: P(4, −2) ile Q(−2, 4) aynı nokta değildir. Şekil ölçekli çizilmese bile sayısal konum bilgileri korunur. Harita gibi temsili uygulamalarda bir koordinat biriminin kaç metreye karşılık geldiği ayrıca belirtilmelidir; koordinat birimi kendiliğinden metre ya da kilometre değildir.

Koordinat düzleminde nokta gösterimi



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

2. Noktanın koordinatlarını okuma ve konumlandırma

P(−3, 5) için yatay eksende sıfırdan üç birim sola, düşey eksende beş birim yukarı gidilir. Bu iki hareketin kesişimi aynı noktayı verir. İşlemin sırasını değiştirmek sonucu değiştirmez; çünkü yatay ve düşey yer değiştirmeler ayrı bileşenlerdir. Buna karşılık (5, −3) sıralaması farklı bir konumu belirtir. Noktayı gösteren harfin tek başına konumu bulunmadığından, sayısal çıkarım yaparken verilen koordinat ikilisi korunur.

Bir başka örnekte A(2, −4), B(2, 3) ve C(−1, 3) noktaları ele alınsın. A ile B'nin ilk koordinatları aynı olduğundan ikisi düşey bir doğrudadır. B ile C'nin ikinci koordinatları aynı olduğundan ikisi yatay bir doğrudadır. Bu belirleme görsel çizime değil, bileşenlerin eşitliğine dayanır.

Koordinat ikilisinden doğrudan okunan bilgiler

Nokta	Yatay konum	Düşey konum	Konum özelliği
P(−3, 5)	3 birim sol	5 birim yukarı	II. bölge
A(2, −4)	2 birim sağ	4 birim aşağı	IV. bölge
B(2, 3)	2 birim sağ	3 birim yukarı	I. bölge
C(−1, 3)	1 birim sol	3 birim yukarı	II. bölge
O(0, 0)	Orijin	Orijin	Hiçbir açık bölgede değil

3. Dört bölge ve eksen üzerinde olma durumu

Eksenler düzlemi dört açık bölgeye ayırır. I. bölgede x ve y pozitif, II. bölgede x negatif ve y pozitif, III. bölgede her ikisi negatif, IV. bölgede x pozitif ve y negatiftir. Bir noktanın iki koordinatından biri sıfırsa nokta bir eksenin üzerindedir; dört açık bölgeden hiçbirine girmez. Orijin de herhangi bir açık bölgenin elemanı değildir. Eksen sınırlarının bu şekilde ayrılması, özellikle “bölgenin içinde” ve “eksenin üzerinde” ifadeleriyle kurulan koşulları değiştirir.

Bölgelere ve eksenlere ait işaret şartları

Konum	x işareti veya değeri	y işareti veya değeri
I. bölge	Pozitif	Pozitif
II. bölge	Negatif	Pozitif
III. bölge	Negatif	Negatif
IV. bölge	Pozitif	Negatif
x ekseni	Herhangi gerçek sayı	0
y ekseni	0	Herhangi gerçek sayı
Orijin	0	0

4. Eksenlere ve orijine uzaklık

P(a, b) noktasının x eksenine dik uzaklığı |b|, y eksenine dik uzaklığı |a| birimdir. Çünkü x ekseni üzerindeki en yakın nokta (a,0), y ekseni üzerindeki en yakın nokta (0,b) olur. P(−4,3) noktasının x eksenine uzaklığı 3, y eksenine uzaklığı 4 birimdir. Orijine uzaklık ise dik kenarları 4 ve 3 olan üçgenin hipotenüsü olup 5 birimdir. Bu sonuç $3^2+4^2=5^2$ eşitliğiyle denetlenir. Eksenlerden birine uzaklığı sıfır olan nokta doğrudan o eksen üzerindedir.

$$d(P,x\ ekseni)=|b|;\ d(P,y\ ekseni)=|a|;\ d(P,O)=\sqrt{(a^2+b^2)}$$

Anlamı: P(a,b) noktasının eksenlere dik ve orijine doğrusal uzaklıkları.

Koşullar: a,b gerçek sayılar; eksenler birbirine dik ve ölçekler eşittir; uzaklık negatif olamaz.

5. Yatay ve düşey yer değiştirme ile doğru parçası uzunluğu

$A(x_1,y_1)$ noktasından $B(x_2,y_2)$ noktasına gidilirken yatay değişim $\Delta x=x_2-x_1$ ve düşey değişim $\Delta y=y_2-y_1$ olur. Δx ve Δy işaretli yer değiştirmelerdir; aralarındaki doğrusal uzaklıklar $|\Delta x|$ ve $|\Delta y|$ şeklinde ölçülür. A(−2,1) ve B(4,−3) için $\Delta x=6$, $\Delta y=-4$'tür: yatay hareket altı birim sağa, düşey hareket dört birim aşağı yönündedir. A noktasına (6,−4) değişim vektörü eklenirse yeniden B bulunur: (−2+6,1−4)=(4,−3).

Eksenlere paralel iki noktanın uzaklığı tek bir bileşen farkıdır. A(−5,2) ve B(7,2) aynı yatay doğru üzerinde olduğundan araları |7−(−5)|=12 birimdir. C(1,−4) ve D(1,5) için düşey uzaklık |5−(−4)|=9 birimdir. İki bileşen birden değiştiğinde bu iki uzaklığın doğrudan toplamı, köşegenin uzunluğunu değil, yalnız yatay ve düşey hareketlerin toplam yolunu verir.

$$\Delta x=x_2-x_1;\ \Delta y=y_2-y_1;\ A\to B=(\Delta x,\Delta y)$$

Anlamı: Yatay ve düşey yer değiştirmelerin işaretli bileşenleri.

Koşullar: A ve B aynı dik koordinat sisteminde tanımlıdır; bileşenler yönlülük taşır, uzunluklar mutlak değerle okunur.

6. İki nokta arasındaki doğrusal uzaklık

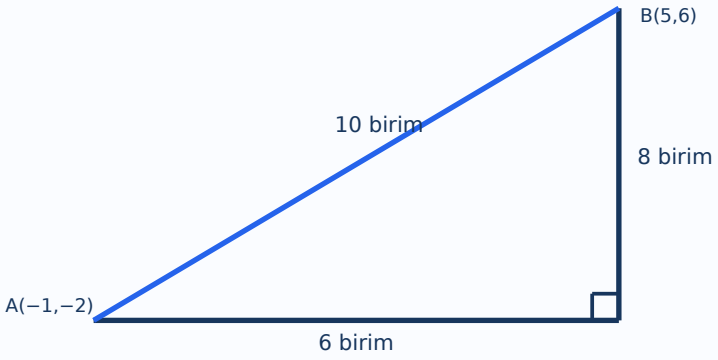
İki nokta arasında yatay ve düşey farklar bir dik üçgenin dik kenarlarını oluşturur. Bu yüzden düzlemdeki en kısa doğru parçasının uzunluğu Pisagor bağıntısıyla bulunur. A(−1,−2) ve B(5,6) için yatay fark 6, düşey fark 8 birimdir; uzaklık $\sqrt{(6^2+8^2)}=\sqrt{100}=10$ birimdir. Bağımsız kontrolde 6–8–10 üçgeninin dik kenarları arasındaki ilişki $36+64=100$ olarak yeniden elde edilir. İki noktayı ters sırayla almak yalnız değişimlerin işaretini ters çevirir; kareler aynı kaldığından uzaklık değişmez.

$$AB=\sqrt{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]}$$

Anlamı: İki nokta arasındaki doğru parçasının uzunluğu.

Koşullar: $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ aynı dik ve eş ölçekli koordinat düzlemindedir; sonuç sıfır veya pozitiftir.

Koordinatlarda uzaklık örneği



Grafiklerde eşit ölçek; geometrik çizimlerde şematik gösterim kullanılmıştır.

7. Uzaklık denkleminde bilinmeyen koordinatı yorumlama

A(1,2) ve B(x,6) noktaları arasındaki uzaklık 5 birim verilirse $(x-1)^2+(6-2)^2=25$ eşitliği kurulur. Buradan $(x-1)^2+16=25$, $(x-1)^2=9$ ve $x-1=\pm3$ elde edilir. Sonuç $x=4$ veya $x=-2$'dir. Gerçekten iki olasılıkta da yatay farkın mutlak değeri 3, düşey farkın mutlak değeri 4'tür; $3^2+4^2=25$ koşulu sağlanır. Verilen uzaklığın tek bir konum belirlemediği görülür. Ek bölge ya da yön koşulu verilmedikçe olasılıklardan biri keyfî olarak elenemez.

Sabit uzaklığın iki farklı konuma izin vermesi

B noktası	Yatay fark	Düşey fark	AB uzaklığı
B(4,6)	3	4	5
B(−2,6)	−3	4	5

8. Bir doğru parçasının orta noktasını bulma

A ile B'nin orta noktası M, her iki uç noktaya eşit uzaklıkta ve aynı doğru parçasının üzerinde bulunan noktadır. Uçların koordinatlarının aritmetik ortalamaları, bu noktayı ayrı ayrı yatay ve düşey doğrultularda yarı yola taşır. A(−3,5) ve B(7,−1) için $M((-3+7)/2,(5-1)/2)=(2,2)$ bulunur. A'dan M'ye değişim (5,−3), M'den B'ye değişim yine (5,−3) olduğundan orta nokta doğrulanır; iki yarım parçanın uzunlukları da $\sqrt{34}$ birimdir.

$$M=((x_1+x_2)/2,(y_1+y_2)/2)$$

Anlamı: $A(x_1,y_1)$ ile $B(x_2,y_2)$ doğru parçasının orta noktası.

Koşullar: Aynı düzlem ve birim sistemi; eşit bölme oranı 1:1'dir.

9. Bilinen orta noktadan eksik uç noktayı bulma

Orta nokta M(3,−2), uçlardan biri A(−1,4) ise diğer uç B'nin koordinatları 2·3−(−1)=7 ve 2·(−2)−4=−8'dir. Böylece B(7,−8) olur. Bağımsız kontrol, A ile B'nin koordinatlarını yeniden ortalamaktır: (−1+7)/2=3 ve (4−8)/2=−2. Eksik ucu, M'den A'ya olan yer değiştirmenin tersini M'den itibaren uygulayarak da bulmak mümkündür: M−A=(4,−6) ve M+(4,−6)=(7,−8).

10. Doğru parçasını belirli bir oranda içten bölen nokta

A'dan B'ye bir doğru parçasının üçte biri kadar ilerlemek, yatay ve düşey koordinat farklarının her birinin üçte birini eklemek anlamına gelir. Genel olarak 0≤t≤1 iken P=A+t(B−A) noktası parça üzerinde bulunur; t=0 için A, t=1 için B, t=1/2 için orta nokta elde edilir. A(2,−1), B(10,7) ve t=3/4 seçilirse yatay fark 8, düşey fark 8; P=(2+6,−1+6)=(8,5) olur. A−P farkı (6,6), P−B farkı (2,2) olduğundan AP:PB=3:1 oranı hem bileşen hem uzunluk bakımından sağlanır.

$$P=(x_1+t(x_2-x_1),\ y_1+t(y_2-y_1));\ 0\le t\le 1$$

Anlamı: A'dan B'ye t oranında ilerlenince parça üzerindeki nokta bulunur.

Koşullar: İki uç aynı düzlemde; t birimsiz oran; içten bölme için 0≤t≤1. t=0 ve t=1 uç noktaları verir.

11. Doğrunun eğimini artış ve azalış olarak okumak

Bir doğru üzerinde x koordinatı değiştiğinde y'nin ne kadar değiştiği eğimle ifade edilir. İki farklı nokta $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ için $x_2\neq x_1$ koşuluyla $m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ tanımlanır. A(−2,1), B(4,4) noktalarında yatay artış 6, düşey artış 3 olduğundan m=3/6=1/2'dir. x bir birim arttığında y yarım birim artar. Kontrol için iki nokta arasındaki yön değişimi (6,3) ve bunun iki katı olan (12,6) aynı oranı verir. Eğim bir açının derece cinsinden ölçüsü değildir; eş ölçekli dik düzlemde açının tanjantıyla ilişkilidir.

$$m=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)=\Delta y/\Delta x$$

Anlamı: x doğrultusundaki bir birimlik değişime karşılık y'nin yönlü değişimi.

Koşullar: $x_2\neq x_1$ olmalıdır; düşey doğrunun eğimi tanımsızdır. A=B seçilirse tek bir doğru belirlenemez.

Koordinat değişimlerinin eğim üzerindeki etkisi

İki nokta	Δx	Δy	Eğim	Yorum
(0,1) ve (4,3)	4	2	1/2	Sağa giderken yükselir
(−1,5) ve (3,1)	4	−4	−1	Sağa giderken alçalır
(−2,4) ve (5,4)	7	0	0	Yatay doğru
(3,−2) ve (3,6)	0	8	Tanımsız	Düşey doğru

12. Yatay ve düşey doğruların denklemleri

Bütün noktalarının y değeri aynı olan doğru yataydır; denklemi y=c biçimindedir. Bütün noktalarının x değeri aynı olan doğru ise düşeydir; denklemi x=a biçimindedir. Örneğin y=−3 üzerinde (0,−3), (4,−3), (−5,−3) bulunur; x=2 üzerinde (2,0), (2,4), (2,−7) yer alır. Yatay doğrunun eğimi 0, düşey doğrunun eğimi tanımsızdır. x=2 doğrusunu y=mx+b şeklinde yazmak için tek bir sabit m değeri bulunmaz; çünkü aynı x değeriyle sonsuz farklı y değeri mümkündür.

Özel doğru denklemleri ve eksenlerle ilişkisi

Denklem	Doğrultu	Eğim	Eksen kesişimi
y=3	Yatay	0	y eksenini (0,3)'te keser
x=−2	Düşey	Tanımsız	x eksenini (−2,0)'da keser
y=0	x ekseni	0	İki eksenle orijinde kesişir
x=0	y ekseni	Tanımsız	İki eksenle orijinde kesişir

13. İki noktadan geçen doğrunun denklemi

Eğimi bilinen bir doğrunun $P(x_0,y_0)$ noktasından geçmesi $y-y_0=m(x-x_0)$ ile ifade edilir. A(1,3), B(5,−1) noktaları için m=(−1−3)/(5−1)=−1'dir. A üzerinden y−3=−(x−1), yani y=−x+4 bulunur. A için 3=−1+4 ve B için −1=−5+4 eşitlikleri doğru olduğundan her iki nokta verilen doğrunun üzerindedir. Noktaların x değerleri aynı olsaydı eğim formülü yerine x=sabit düşey doğrusu kullanılacaktı.

$$y-y_0=m(x-x_0);\ \text{eşdeğer olarak}\ y=mx+b$$

Anlamı: Eğimi m olan ve (x_0,y_0)'dan geçen düşey olmayan doğrunun denklemi.

Koşullar: m gerçek sayı; düşey doğrular ayrı olarak x=a biçiminde yazılır.

14. Doğru denkleminin eksenleri kestiği noktalar

Bir doğrunun x eksenini kestiği noktada y=0, y eksenini kestiği noktada x=0'dır. Örneğin 2x+3y=12 için x ekseni kesişimi 2x=12'den (6,0), y ekseni kesişimi 3y=12'den (0,4) olur. Bu iki noktayı birleştiren doğru aynı eşitliği sağlar; örneğin orta noktaları (3,2) için 2·3+3·2=12'dir. Doğru eksenlere paralelse bir ekseni hiç kesmeyebilir ya da eksenin kendisiyle çakışabilir; her durumda iki farklı eksen kesişimi bulunduğu varsayılmaz.

15. Noktanın doğru üzerinde olup olmadığını denetleme

Bir noktanın koordinatları doğru denkleminde yerlerine konulduğunda eşitlik sağlanıyorsa nokta o doğrunun üzerindedir. x−2y=5 doğrusu için P(7,1) noktası 7−2·1=5 eşitliğini sağladığından doğru üzerindedir. Q(1,−1) için 1−2·(−1)=3 olduğundan Q doğru üzerinde değildir. Bu denetim çizime bakmaktan daha kesindir ve koordinat sayıları kesirli veya negatif olduğunda da uygulanabilir. Ancak noktanın sonsuz doğru üzerinde bulunması, iki belirli uç arasındaki sonlu doğru parçasında bulunduğunu tek başına göstermez.

Doğru denkleminde yerine koyma denetimi

Nokta	x−2y değeri	x−2y=5 üzerinde mi?
P(7,1)	5	Evet
Q(1,−1)	3	Hayır
R(3,−1)	5	Evet

16. Bir doğru parçasının üzerinde olma ve sınır koşulları

A(0,0) ile B(6,3) noktalarından geçen sonsuz doğrunun denklemi y=x/2'dir. C(4,2) bu doğru üzerindedir ve 0≤4≤6 olduğundan A ile B arasındaki doğru parçasındadır. D(8,4) ise aynı denklemi sağladığı hâlde x değeri 6'yı aştığı için parçanın dışında kalır. Genel ve güvenli yöntem, bir noktanın P=A+t(B−A) biçiminde 0≤t≤1 ile yazılıp yazılamadığını denetlemektir; bu, yatay veya düşey parçalarda da geçerlidir. Sadece doğru eşitliğine bakarak parça üyeliği kabul edilmez.

17. Paralel ve dik doğruları koordinatlarla tanıma

Düşey olmayan iki farklı doğru paralelse eğimleri eşittir. y=2x+1 ve y=2x−4 doğrularının eğimleri 2 olup kesişmezler. Aynı eğim ve aynı sabit terim verilirse bunlar iki farklı paralel doğru değil, aynı doğrudur. Eğimleri tanımlı ve sıfırdan farklı iki doğrunun birbirine dik olması için eğimleri çarpımı −1 olmalıdır. y=2x+1 ile y=−x/2+3 örneğinde 2·(−1/2)=−1 ve doğrular diktir. Bir yatay doğru ile bir düşey doğru da dik olur; bu durumda eğim çarpımı hesaplanamaz çünkü düşey doğrunun eğimi tanımsızdır.

$$m_1=m_2 \text{ (paralellik için); } m_1m_2=-1 \text{ (dik olma için)}$$

Anlamı: Düşey olmayan doğrularda eğimler doğrultu bilgisini verir.

Koşullar: Paralellik için farklı doğrular ve tanımlı eğimler; diklik çarpımı için iki eğim de tanımlıdır. Yatay–düşey dikliği ayrı durumdur.

18. Üç noktanın aynı doğru üzerinde bulunması

A(−1,2), B(2,5) ve C(5,8) noktalarında AB'nin değişimi (3,3), BC'nin değişimi de (3,3) olduğundan üçü aynı doğru üzerindedir. Eğimleri AB ve AC için 1 çıkması bunu ayrıca doğrular. Bununla birlikte ilk ikisi çakışık noktalarsa yalnız eğim karşılaştırmasıyla tek doğru belirlenemez; ayrı iki nokta gerekir. Üç noktadan oluşturulan sözde üçgenin alanı sıfır çıkması da doğrudaşlığın bir denetimidir. Aynı doğru üzerinde üç farklı nokta gerçek bir üçgenin köşeleri olamaz.

19. Üçgenin koordinatlarla modellenmesi

A(1,1), B(7,1), C(3,5) noktalarının üçgen oluşturup oluşturmadığı, doğrusallık denetimiyle belirlenir. AB yatay ve uzunluğu 6 birimdir; C'nin y koordinatı AB'nin y=1 doğrultusundan dört birim farklı olduğundan AB'ye dik yüksekliği 4 birimdir. Alan 6·4/2=12 birimkaredir. Ayrıca AC vektörü (2,4), BC vektörü (−4,4) olup ikisi de AB doğrultusunda değildir; dolayısıyla üç farklı köşe aynı doğru üzerinde değildir. Bu hesapta dik yükseklik koordinat farkından elde edilmiş, çizimin görünüşüne göre tahmin edilmemiştir.

20. Üçgenin koordinatlarından diklik ve uzunluk değerlendirmesi

A(0,0), B(4,0), C(4,3) için AB yatay dört birim, BC düşey üç birim olduğundan B açısı diktir. AC uzunluğu $\sqrt{(4^2+3^2)}=5$ birimdir. Bağımsız kontrol $4^2+3^2=5^2$ ve üçgen alanının $4\cdot3/2=6$ birimkare olmasına dayanır. A(0,0), D(4,1), E(4,4) noktaları ise benzer görünümde olsalar bile AD yatay değildir; çizime bakarak A açısının dik olduğu ileri sürülemez. Dikliği kanıtlamak için kenarların yönleri veya Pisagor ilişkisi incelenmelidir.

Koordinatlardan üçgenin kenar ve alan denetimi

Üçgen	Birinci dik kenar	İkinci dik kenar	Hipotenüs	Alan
A(0,0), B(4,0), C(4,3)	4	3	5	6 birim²
K(−2,−1), L(4,−1), M(4,7)	6	8	10	24 birim²

21. Koordinatları bilinen dikdörtgen ve kare

A(1,2), B(7,2), C(7,6), D(1,6) noktaları sırayla birleştirilsin. AB ve CD yatay, BC ve DA düşey olduğundan komşu kenarlar diktir. Yatay kenar uzunluğu $7-1=6$, düşey kenar uzunluğu $6-2=4$ birim; bu şekil 6×4 boyutlu dikdörtgendir. Köşegen $AC=\sqrt{(6^2+4^2)}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ birimdir; diğer köşegen BD de aynı değeri verir. Alan 24 birimkare, çevre 20 birimdir. İki köşegenin orta noktaları (4,4) çıktığı için paralelkenar niteliği de doğrulanır. Yatay ve düşey kenarlar eşit olsaydı bu model kare olurdu; yalnız dört koordinatın pozitif olması bir kare kanıtı değildir.

22. Eğik konumda kare veya dikdörtgeni tanıma

Bir kare her zaman eksenlere paralel çizilmez. A(0,1), B(2,3), C(4,1), D(2,−1) noktaları sırayla birleştirildiğinde AB değişimi (2,2), BC değişimi (2,−2), CD değişimi (−2,−2), DA değişimi (−2,2)'dir. Kenarların her biri $\sqrt{(2^2+2^2)}=2\sqrt{2}$ birimdir. AB'nin eğimi 1, BC'nin eğimi −1 olduğundan komşu kenarlar diktir; şekil karedir. Köşegenler AC yatay dört birim ve BD düşey dört birim olup aynı orta nokta (2,1)'de kesişir. Bu ikinci denetim eşit ve birbirini ortalayan dik köşegenlerin kareyle uyumunu gösterir. Yalnız köşegenlerin eşit olmasından bütün dörtgenlerin kare olduğu sonucu çıkarılamaz.

23. Paralelkenarın eksik köşesini bulma

A, B, C ardışık köşeler olmak üzere ABCD paralelkenarında $D=A+C-B$ vektörel toplamıyla bulunur. A(1,1), B(5,2), C(7,6) seçilirse $D=(1+7-5,1+6-2)=(3,5)$'tir. AB değişimi (4,1), DC değişimi $C-D=(4,1)$; BC değişimi (2,4), AD değişimi $D-A=(2,4)$ olduğundan karşı kenarlar eşit vektörlerdir. Köşegenler AC ve BD'nin orta noktaları aynı (4, 7/2) noktasıdır: AC için $((1+7)/2,(1+6)/2)=(4,7/2)$, BD için $((5+3)/2,(2+5)/2)=(4,7/2)$ elde edilir. Birbirine paralel iki karşı kenar çifti ve köşegen orta noktası, şeklin paralelkenar olduğunun iki bağımsız denetimidir.

$$D=(x_A+x_C-x_B,\ y_A+y_C-y_B)$$

Anlamı: A, B, C ardışık ve birbirinden farklı, doğrudaş olmayan köşelerse ABCD paralelkenarının dördüncü köşesi.

Koşullar: Köşe sırası A→B→C→D olmalıdır; nokta sırası değişirse hangi köşenin eksik olduğu da değişir.

24. Üçgenin ağırlık merkezi ve konum yorumu

Bir üçgenin üç kenarortayı tek noktada kesişir; ağırlık merkezi G'nin koordinatları, üç köşenin x ve y değerlerinin ayrı ayrı aritmetik ortalamasıdır. A(0,0), B(6,0), C(3,6) üçgeninde G((0+6+3)/3,(0+0+6)/3)=(3,2)'dir. BC'nin orta noktası ((6+3)/2,(0+6)/2)=(9/2,3)'tür. A'dan bu orta noktaya ilerleyen kenarortayın üçte ikisi (3,2)'ye ulaşır; G'nin kenarortayı 2:1 oranında böldüğü böylece bağımsız doğrulanır. Türkçe ondalık ayıracı olan virgülün koordinatları ayırmak için de kullanılmasından kaynaklanabilecek karışıklıkta kesir gösterimi tercih edilebilir.

$$G=((x_A+x_B+x_C)/3,\ (y_A+y_B+y_C)/3)$$

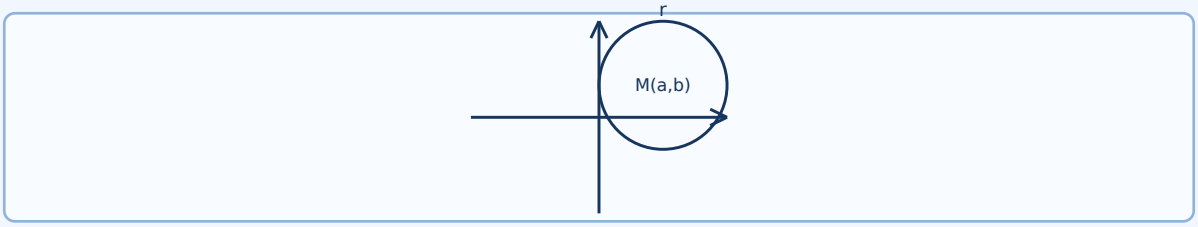
Anlamı: Üçgenin üç kenarortayının kesiştiği ağırlık merkezi.

Koşullar: A, B ve C doğrudaş olmayan üç köşedir; koordinatlar aynı ölçekte alınır.

25. Çemberin merkezini ve yarıçapını koordinatlardan yorumlama

Merkezi M(a,b), yarıçapı r>0 olan çemberdeki her P(x,y) noktasının merkeze uzaklığı r'dir. Uzaklık bağıntısının karesi alındığında $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ denklemi elde edilir. M(2,−1), r=5 için $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ olur. P(5,3) noktası için merkezden yatay fark 3, düşey fark 4 ve $3^2+4^2=25$ olduğundan P çember üzerindedir. Q(2,1) noktasında toplam $0^2+2^2=4<25$ olduğu için Q çemberin iç bölgesindedir; R(8,−1) için $6^2=36>25$ olduğundan R dışarıdadır. Çember yalnız eşitliği sağlayan sınır noktalarından oluşur; daire iç bölgeyi de kapsar.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \text{ (çember)};\ (x-a)^2+(y-b)^2\le r^2 \text{ (kapalı daire)}$$



Anlamı: Merkezi M(a,b) olan, yarıçapı r pozitif çemberin sınırı ve dairesel bölgesi.

Koşullar: Eksen ölçekleri aynı, r>0; eşitlik yalnız sınır, eşitsizlik iç ve sınır noktalarını gösterir.

M(2,−1), r=5 çemberine göre nokta konumu

Nokta	Merkeze uzaklığın karesi	25 ile karşılaştırma	Konum
P(5,3)	25	Eşit	Çember üzerinde
Q(2,1)	4	Küçük	Daire içinde, çember üzerinde değil
R(8,−1)	36	Büyük	Dairenin dışında

26. Koordinatlarda simetriyi görmek

Bir noktanın x eksenine göre yansımasında x aynı kalır, y işaret değiştirir; y eksenine göre yansımasında ise x işaret değiştirir. Orijine göre merkezî simetride iki koordinatın da işareti değişir. Örneğin P(−3,4) noktasının x ekseni yansıması (−3,−4), y ekseni yansıması (3,4), orijin yansıması (3,−4)'tür. P'den yansıma noktalarına uzaklıklar ve simetri eksenine dik uzaklıklar kontrol edildiğinde yön değişiminin yalnız ilgili bileşende gerçekleştiği görülür. y=x doğrusuna göre simetride koordinatlar yer değiştirir, ancak bu kural standart eş ölçekli dik koordinat sistemi için kullanılır.

P(a,b) noktasının temel simetri görüntüleri

Dönüşüm	Yeni nokta	P(−3,4) görüntüsü
x eksenine göre yansıma	(a,−b)	(−3,−4)
y eksenine göre yansıma	(−a,b)	(3,4)
Orijine göre simetri	(−a,−b)	(3,−4)
y=x doğrusuna göre yansıma	(b,a)	(4,−3)

27. Öteleme, yön ve değişmeyen geometrik özellikler

Bir şeklin her noktasına aynı (u,v) yer değiştirmesini eklemek, onu döndürmeden ve biçimini değiştirmeden öteler. A(1,2), B(4,2), C(4,6) üçgeni T=(−2,3) ile ötelenince A'(−1,5), B'(2,5), C'(2,9) elde edilir. Önceki kenarlar AB=3, BC=4, AC=5; sonraki kenarlar A'B'=3, B'C'=4, A'C'=5 olduğundan bütün uzunluklar korunur. Alan da 3·4/2=6 birimkare kalır. Öteleme koordinatları değiştirir ama şeklin çevresini, alanını, açılarını ve kenar uzunluklarını değiştirmez; uygulamada tüm köşelere aynı değişim eklenmelidir.

$$T_{(u,v)}(x,y)=(x+u,y+v)$$

Anlamı: Şeklin bütün noktalarına aynı yatay ve düşey yer değiştirmeyi uygulayan öteleme.

Koşullar: u,v aynı koordinat birimindedir; bütün köşelere aynı dönüşüm uygulanır.

28. Ölçekli koordinat modelleri ve ölçüm birimi

Matematiksel koordinat birimi bir fiziksel ölçüye bağlanabilir. Ölçekli temsili bir yerleşim planında her birim 25 metre olsun. P(1,2) ile Q(4,6) arasındaki koordinat farkları 3 ve 4, doğrusal uzaklık 5 birim olduğundan gerçek kuş uçuşu mesafe 5·25=125 metredir. Yatay ve düşey koridorlardan gidilmesi zorunluysa 3+4=7 birimlik güzergâh uzunluğu 175 metre olur; ancak bu yalnız koridorların uygun bağlantılarla gerçekten kullanılabilir olduğu modelde geçerlidir. Ölçek olmaksızın 5 sayısını metre diye sunmak doğru değildir.

Eş ölçekli olmayan bir çizimde bir yatay çizim birimi 20 metre, bir düşey çizim birimi 30 metreyi temsil ediyorsa üç yatay ve dört düşey hücre için fiziksel farklar 60 m ile 120 m olur. Gerçek doğrusal uzaklık $\sqrt{(60^2+120^2)}=60\sqrt{5}$ metre, yaklaşık 134,16 m'dir; 5·20 veya 5·30 olarak alınamaz. Bu ayrım, çizimin yatay ve düşey ölçüleri eşit değilse koordinat farklarının doğrudan standart uzaklık bağıntısına sokulmamasından kaynaklanır.

Ölçek kullanıldığında koordinat uzaklığının yorumu

Model	Fiziksel yatay fark	Fiziksel düşey fark	Doğrusal uzaklık
İki eksende 25 m/birim	75 m	100 m	125 m
Yatayda 20 m ve düşeyde 30 m/birim	60 m	120 m	$60\sqrt{5}$ m

29. Eksik geometrik bilgide tek sonuç ve çoklu olasılıklar

Koordinat bilgisi eksiksiz değilse aynı koşulları sağlayan birden fazla şekil veya nokta oluşabilir. A(0,0), B(6,0) verilip C'nin AB'ye uzaklığı 4 birim denildiğinde C'nin ordinatı 4 veya −4 olabilir; yatay koordinatı ise başkaca sınır verilmedikçe çok farklı değerler alabilir. Her iki taraftaki yükseklik aynı olduğundan bütün bu farklı üçgenlerin AB tabanına göre alanı $6\cdot4/2=12$ birimkaredir. Alanın tek olması C'nin konumunun tek olduğu anlamına gelmez.

Bunun tersine, köşeleri tam belirlenmiş bir şeklin çizimde yamuk veya eğik görünmesi sayısal sınıflandırmayı değiştirmez. Açı, uzunluk ve paralellik gibi sonuçlar verilen koordinatlardan hesaplanmalıdır. Bir modelde 'en yakın', 'arasında', 'aynı doğru üzerinde' gibi ifadelerin her biri ayrı koşul taşır: sonsuz doğru, sonlu doğru parçası, dik uzaklık ve yol uzunluğu birbiriyle karıştırılmamalıdır.

30. Birden çok koşulu birlikte denetleyen özgün koordinat modeli

Temsili bir açık alan krokisinde A(1,1), B(9,1), C(9,7), D(1,7) noktaları ardışık köşeler olsun. Önce AB yatay sekiz birim, BC düşey altı birimdir; karşı kenarlar da aynı doğrultularda olduğundan ABCD bir dikdörtgendir. Alanı $8\cdot6=48$ birimkare, çevresi $2\cdot(8+6)=28$ birim, köşegeni $\sqrt{(8^2+6^2)}=10$ birimdir. Köşegenlerin ortak orta noktası $M((1+9)/2,(1+7)/2)=(5,4)$ olur; B ile D'nin ortalaması da (5,4)'tür. Böylece dikdörtgen, köşegen ve orta nokta özellikleri üç ayrı yolla tutarlı biçimde doğrulanır.

Eğer krokide bir birim 2 metreyi gösteriyorsa fiziksel kenarlar 16 ve 12 metre; alan $16\cdot12=192$ m², çevre 56 metre, köşegen 20 metre olur. Aynı sonuçlar ölçeğin uzunluğa iki kat, alana dört kat etki etmesiyle bulunur: $48\cdot4=192$ m². Bu ikinci hesap, koordinat birimini alan birimiyle doğrudan özdeşleştirme hatasını önler.

31. Koordinat geometrisini yorumlamada yöntem ve kapsam sınırı

Koordinatlara dayanan bir anlatımda ilk olarak nokta adları ile sıralı ikililer doğru eşleştirilir; sonra eksen, ölçek ve birim seçimi belirlenir. Yatay ve düşey farklar ayrı bulunur; ihtiyaç duyulan uzaklık veya eğim için uygun bağıntı seçilir. Şeklin türü ileri sürülüyorsa gerekli açı, kenar, köşegen veya paralellik ilişkisi sayılardan denetlenir. Bir orta nokta doğru parçasının üzerinde olmalıdır; bir noktanın doğru üzerinde bulunması ise sonlu parçada bulunmasını garanti etmez. Sonucun birimi uzunluk, alan veya yönlü oran türüne uygun belirtilir.

Koordinat gösterimindeki kritik koşullar (x,y) sıralı ikilidir. x=0 noktaları y ekseninde, y=0 noktaları x eksenindedir. İki nokta uzaklığında iki eksen eş ölçekli olmalıdır. Düşey doğrunun eğimi 0 değil tanımsızdır. Eğim tanımlı ise payda x_2-x_1 sıfır olamaz. Bir noktanın sonsuz doğru üzerinde bulunması sonlu parça üyeliğini kanıtlamaz.

Şekilden çıkarımın sınırı Grafik ölçekli değilse görünüşe göre diklik, eş uzunluk veya alan yorumu yapılmaz. Bir noktanın çembere göre konumu merkeze uzaklığının yarıçapla karşılaştırılmasına bağlıdır. Koordinat düzleminde kullanılan birim ile fiziksel metre birimi aynı kabul edilmez; gerekiyorsa açık ölçek uygulanır.

Sonuç olarak koordinat sistemi, düzlemdeki şekilleri sayısal koşullarla belirlemeyi sağlar. Kenar uzunlukları ve açılar, çizimin görünüşü yerine nokta çiftlerinin ilişkileriyle; konum ve orta nokta bilgisi sıralı ikililerle; çevre ve alan ise doğru fiziksel ölçek kullanılarak değerlendirilir. Bu yaklaşım önceki sayısal yorumlama, cebir ve geometri bilgilerinin ortak bir uygulamasıdır.

KAYNAKÇA VE DOĞRULAMA

Bu kitabın kaynakça ve doğrulama bağlantıları, Genel Kültür ders kitabında olduğu gibi Kadro Akademi kitaplar sayfasından erişime sunulacaktır. QR kodu telefonunuzla okutarak ilgili kitap ve kaynakçaya ulaşabilirsiniz.

GENEL YETENEK — KAYNAKÇA VE DOĞRULAMA

kadroakademi.com/kitaplar

53 konu · 153 kaynak · 8 bölüm